



## 基于多目标规划的多波束测线布设模型

张泽宇, 葛晨欣, 靳琪, 李小平\*

(电子科技大学 数学科学学院, 成都 611731)

**摘要:** 针对某海域的多波束测线布设问题建立了海域地形与测线布设方案的关系模型。测线覆盖宽度与重叠率为衡量测线布设方案优劣的重要指标, 利用解析几何方法建立二维及三维海域覆盖宽度与重叠率的计算模型, 得到衡量测线布设方案的基本方法。同时将测线布设方案与最优化问题结合起来, 分别针对矩形坡面海域及某一待测真实海域建立多目标规划模型, 设计相应算法对模型进行求解, 得到矩形坡面海域的最优测线布设方案以及某待测真实海域的一种较为可行的布设方法, 对现实多波束测线布设问题具有借鉴意义。

**关键词:** 多波束测深; 空间解析几何; 多目标规划; 鲁棒性检验

中图分类号: TS941.2

文献标志码: A

DOI: 10.12179/1672-4550.20240035

## Multi-Beam Line Layout Model Based on Multi-Objective Programming

ZHANG Zeyu, GE Chenxin, JIN Qi, LI Xiaoping\*

(School of Mathematical Science, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

**Abstract:** The relationship model between the topography of the sea area and the layout scheme of the multi-beam survey line is established. The coverage width and overlap ratio of survey line are important indexes to measure the quality of survey line layout scheme. The calculation model of 2D and 3D sea area coverage width and overlap ratio is established by the analytical geometry method, and the basic method of measuring survey line layout scheme is obtained. At the same time, combining the survey line layout scheme with the optimization problem, the multi-objective planning model is established for the rectangular slope sea area and a real sea area to be measured respectively. The corresponding algorithm is designed to solve the model, and the optimal survey line layout scheme of the rectangular slope sea area and a feasible layout method of a real sea area to be measured are obtained. It is of reference significance to the practical multi-beam line layout problem.

**Key words:** multi-beam sounding; spatial analytic geometry; multi-objective programming; robustness test

多波束测深技术是一种高效的水下地形测量技术, 它通过在与航迹垂直的平面内发射和接收多个声波束来获取海底地形的详细信息<sup>[1]</sup>。近年来, 这项技术在海洋地形勘测、海底资源开发、海洋工程建设等领域得到了广泛应用, 具有高精度、高效率、覆盖范围大和自动化成图等优势<sup>[2]</sup>。

当前多波束测深系统的测线布设方案研究主要集中在开发优化算法以扩大海底区域的覆盖范围方面<sup>[3]</sup>。考虑到海底地形的复杂性, 研究者们还提出了多种测量方式相结合的布设方法, “中国近海海洋综合调查及评价专项”工作中便采用单波束、多波束、测扫声呐结合的方式获得了大量

准确可靠的水深数据<sup>[4]</sup>。

在测线布设过程中, 通常需要遵循有利于测深作业的开展, 以及有利于探测航行障碍物这两个基本原则<sup>[5]</sup>。测量精度及布设成本与测线覆盖宽度和相邻两条测线的重叠率密切相关。为保证测量效果, 重叠率应位于 10%~20%。考虑不同海域地形下测线覆盖宽度及重叠率的定义, 建立多波束测线布设及优化模型。

为此, 本文首先做了如下几条基本假设并在后文对其现实意义进行阐述:

1) 测线为一条直线且同一区域不同测线之间相互平行<sup>[6]</sup>;

收稿日期: 2024-01-26

作者简介: 张泽宇, 本科生, 数据科学与大数据技术专业。E-mail: zhangzeyu0910@foxmail.com

\* 通信作者: 李小平, 博士, 副教授, 主要从事信号处理中的数学问题、编码、有限域及应用等方面的研究。E-mail: lixiaoping.math@uestc.edu.cn

2) 测量仪器的测量误差可以忽略不计, 附件中给出的单波束测深数据准确可靠, 反映了真实海底地形;

3) 待测海域在较小的坐标范围内变化较为平缓, 可以用平滑函数进行拟合和处理;

4) 测线与海域边界之间不存在障碍物, 可以直接穿越边界进行测量。

本文的量化分析及模型结果基于 2023 年全国大学生数学建模竞赛 B 题所提供的海域数据。

### 1 二维坡面几何关系模型

对于坡面截面的几何关系模型, 以海域中心点投影为原点, 选取水平向右为  $x$  轴正方向, 竖直方向为  $y$  轴方向建立平面直角坐标系, 如图 1 所示<sup>[7]</sup>。测线覆盖宽度即为测线与海底两交点之间的距离。

设定原点处测线位置为中心测线, 此时的海水深度为  $D_0 = 70$  m。由于这部分的待求测线为等距平行分布, 故在  $x$  轴方向上对不同测线进行编号处理, 中心测线的编号为 0, 由此向正负方向推进, 分别编号为  $\{1, 2, \dots, n\}$  以及  $\{-1, -2, \dots, -n\}$ 。

在图 1 黄色参考线下方构建的直角三角形中, 由三角函数的关系可得:

$$h_i = id \tan\alpha \quad (1)$$

式中:  $h_i$  为某一条测线处海水深度与中心水深的差值,  $i = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ 。

结合两条测线竖直方向的距离关系可得中心测线两侧的海水深度  $D_i$  为:

$$D_i = D_0 - h_i = D_0 - id \tan\alpha \quad (2)$$

当海水深度已知时, 考虑某一测线的覆盖宽度为  $W_i$ , 以中心测线为界划分为  $W_{il}$ 、 $W_{ir}$ , 在左三角形中, 由正弦定理可知:

$$\frac{D_i}{\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}-\alpha\right)} = \frac{W_{il}}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad (3)$$

于是第  $i$  条测线左半部分的覆盖宽度为:

$$W_{il} = \frac{D_i \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\alpha\right)} \quad (4)$$

同理可得第  $i$  条测线右半部分的覆盖宽度为:

$$W_{ir} = \frac{D_i \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\alpha\right)} \quad (5)$$

于是得到编号为  $i$  的测线的覆盖宽度为:

$$W_i = W_{il} + W_{ir} = \frac{D_i \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\alpha\right)} + \frac{D_i \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\alpha\right)} \quad (6)$$

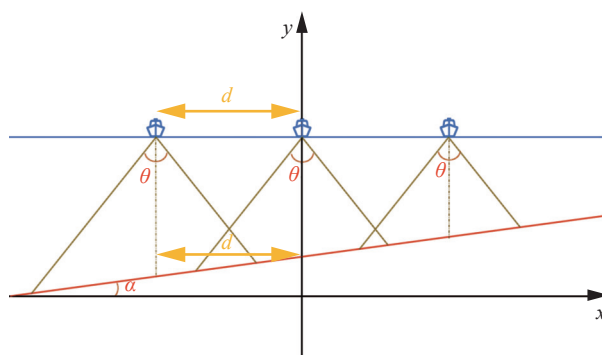


图 1 二维坡面几何关系示意图

在此基础上考虑某条测线的前向重叠率, 当测线相互平行且海底地形平坦时, 重叠率的定义为该条测线与前一条测线的重叠宽度与该条测线的覆盖宽度之比。

针对坡面地形, 相应的重叠宽度与覆盖宽度都应转化为沿坡面方向的距离。即此时编号为  $i$  的测线的前向重叠率为

$$\eta_i = \frac{c_i}{W_i} \quad (7)$$

式中:  $c_i$  表示编号  $i$  的测线与其前一条测线的重叠宽度, 可由坐标轴上的相应投影长度结合坡度求出。由此便可计算出所有测线的前向重叠率。

二维坡面几何模型覆盖宽度及相邻测线覆盖率的具体计算结果如表 1 所示。

表 1 二维坡面覆盖宽度及重叠率计算结果

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
$D_i$ /m	90.9487	85.7116	80.4744	75.2372	70.0000	64.7628	59.5256	54.2884	49.0513
$W_i$ /m	315.8133	297.6280	279.4420	261.2560	243.0700	224.8845	206.6987	188.5130	170.3270
与前一条测线的重叠率/%	—	35.6954	31.5106	26.7431	21.2622	14.8949	7.4072	-1.5252	-12.3650

## 2 三维海域覆盖宽度模型

为了适应三维海域复杂地形的探测需求, 需要建立矩形坡面海域某一点处覆盖宽度的数学描述, 为建立矩形坡面海域的测线布设优化模型做准备。

选取矩形待测海域中心点对应的海底处为原点, 以海底坡面的法向量在水平面上的投影方向为  $x$  轴, 选取此水平面与坡面的交线为  $y$  轴, 竖直方向为  $z$  轴建立坐标系如图 2 所示。

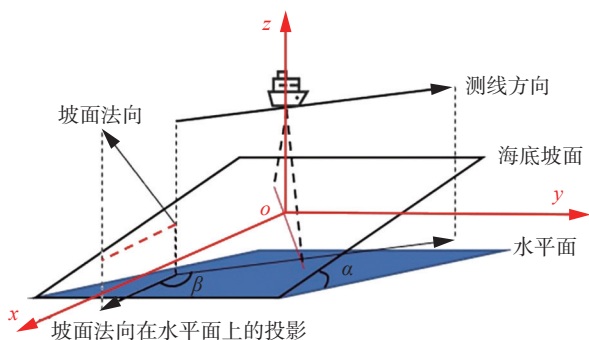


图 2 三维矩形海域坐标示意图

证明: 设坡面的法向量为  $\mathbf{n}$ , 考虑法向量位于  $xoz$  平面内, 则选取此深度水平面与坡面的交线  $l$ ,  $l$  垂直于  $\mathbf{n}$ , 且  $l$  垂直于  $z$  轴, 即  $l$  垂直于  $xoz$  平面, 且与  $xoz$  面交于原点  $o$ , 故可建立三维坐标系。

根据已构建的坐标系可知, 坡面法向量位于  $xoz$  平面内, 由其在  $x$  轴和  $z$  轴的投影可得, 此坡面法向量为  $\mathbf{n}=(\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ , 且坡面经过原点  $(0, 0, 0)$ , 联立可求得坡面所在平面的一般方程为:

$$x \sin\alpha + z \cos\alpha = 0 \quad (8)$$

测线方向为海平面上测量船的航行方向, 它与坡面法向在  $xoy$  平面上的投影所成角为  $\beta$ , 即测线方向向量在  $xoy$  平面的投影与  $x$  轴所成角为  $\beta$ , 于是可得测线方向向量为  $\mathbf{l}=(\cos\beta, \sin\beta, 0)$ 。

船距海域中心点的距离为  $d_c$ , 且沿测线方向行进, 又已知海域中心点处的海水深度为 120 m, 于是测量船的坐标可表示为:

$$(x_0, y_0, z_0) = (d_c \cos\beta, d_c \sin\beta, 120)$$

测量船发出波束的最大张角为  $120^\circ$ , 设此时左右两侧声波边界所在直线为  $l_1, l_2$ 。由直线与测线方向垂直且与  $z$  轴的夹角为  $60^\circ$  可得两直线的方

向量为

$$\mathbf{l}_1 = \left( -\sin\beta, \cos\beta, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$\mathbf{l}_2 = \left( \sin\beta, -\cos\beta, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

于是两直线的点向式方程为:

$$l_1: \frac{x-d_c \cos\beta}{-\sin\beta} = \frac{y-d_c \sin\beta}{\cos\beta} = \frac{z-120}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (9)$$

$$l_2: \frac{x-d_c \cos\beta}{\sin\beta} = \frac{y-d_c \sin\beta}{-\cos\beta} = \frac{z-120}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (10)$$

进而可得两直线的参数方程如下:

$$l_1: \begin{cases} x = d_c \cos\beta - \sin\beta t_1 \\ y = d_c \sin\beta + \cos\beta t_1 \\ z = 120 - \frac{\sqrt{3}}{3} t_1 \end{cases} \quad (11)$$

$$l_2: \begin{cases} x = d_c \cos\beta + \sin\beta t_2 \\ y = d_c \sin\beta - \cos\beta t_2 \\ z = 120 - \frac{\sqrt{3}}{3} t_2 \end{cases} \quad (12)$$

式中:  $t_1, t_2$  为待求参数。

分别将两直线的参数方程代入平面方程可求得:

$$t_1 = \frac{d_c \sin\alpha \cos\beta + 120 \cos\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cos\alpha + \sin\alpha \sin\beta}$$

$$t_2 = \frac{d_c \sin\alpha \cos\beta + 120 \cos\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cos\alpha - \sin\alpha \sin\beta}$$

代回直线方程可解得两直线与平面的交点为:

$$\left( d_c \cos\beta - \sin\beta t_1, d_c \sin\beta + \cos\beta t_1, 120 - \frac{\sqrt{3}}{3} t_1 \right)$$

$$\left( d_c \cos\beta + \sin\beta t_2, d_c \sin\beta - \cos\beta t_2, 120 - \frac{\sqrt{3}}{3} t_2 \right)$$

覆盖宽度可表示为两交点之间的距离, 由空间坐标距离公式可得:

$$W = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{\left( \sin^2\beta + \frac{1}{3} \right) (t_1 - t_2)^2 + \cos^2\beta (t_1 + t_2)^2} \quad (13)$$

结合问题二给出的参数及所建立的数学模型, 编写 MATLAB 程序求得结果如表 2 所示。

表 2 三维矩形坡面海域不同测线覆盖宽度的计算结果

$W_i/m$	测量船距海域中心点处的距离/NM							
	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
0	415.6921938	466.091055	516.4899161	566.8887772	617.2876384	667.6864995	718.0853607	768.4842218
45	416.1915233	451.871707	487.5518915	523.2320756	558.9122597	594.5924439	630.2726280	665.9528121
90	416.6918699	416.691870	416.6918699	416.6918699	416.6918699	416.6918699	416.6918699	416.6918699
测线 方向 夹角/(°)	135	416.1915233	380.511339	344.8311551	309.1509710	273.4707869	237.7906028	202.1104187
	180	415.6921938	365.293333	314.8944715	264.4956104	214.0967492	163.6978881	113.2990270
	225	416.1915233	380.511339	344.8311551	309.1509710	273.4707869	237.7906028	202.1104187
	270	416.6918699	416.691870	416.6918699	416.6918699	416.6918699	416.6918699	416.6918699
	315	416.1915233	451.871707	487.5518915	523.2320756	558.9122597	594.5924439	630.2726280

### 3 矩形海域测线布设优化模型

考虑某一坡面矩形海域的测线布设问题，在坡度、海水深度以及多波束换能器的开角已知的情况下，该测点的覆盖宽度仅与测线方向有关。

#### 3.1 多目标优化模型建立

考虑在给定待测区域、海水深度、坡度及换能器张角的情况下，寻求最优测线方向，以重叠率为约束条件，以最小化测量长度并且能够覆盖整个待测区域为目标，建立相应多目标规划模型<sup>[8]</sup>。

由假设可知，本文考虑测线为相互平行的直线族<sup>[9]</sup>，平行测线有助于确保海底地形的连续性和完整性，更好地规划测量路径，同时平行航线也有助于测量船开展作业，减小测量成本。设 $x_i$ 为第 $i$ 条测线的布设长度，则测量长度可表示为 $x_{sum} = \sum_1^n x_i$ 。

其中每条测线长度均由沿此测线方向布设的平行测线族与矩形海域边界的交点确定，考虑三维矩形海域模型所建立的空间直角坐标系，当 $\beta$ 未定时，测线方向向量为 $I=(\cos\beta, \sin\beta, 0)$ 。

假定测线在区域边界的某一起始点 $(x_i, y_i, 110)$ ，可得到直线的参数方程为

$$I = \begin{cases} x = x_i + \cos\beta t \\ y = y_i + \sin\beta t \\ z = 110 \end{cases} \quad (14)$$

通过求解此类直线与矩形海域边界直线的交点，联立初始点即可求得此条测线的测量长度 $x_i$ 。设定集合 $S$ 为该矩形海域坡面区域， $S_d$ 为沿布设测线扫描的覆盖区域。

于是目标函数为：

$$\begin{cases} \min x_{sum} \\ S \subset S_d \end{cases} \quad (15)$$

考虑平行测线时，相邻两条测线的重叠率应为二者重叠区域的面积与后向测线覆盖区域的面积之比，在具体的分析过程中也可以通过积分求解相应面积。

相应约束条件为：

$$10\% \leq \eta \leq 20\% \quad (16)$$

式中： $\eta$ 为相邻两条测线的重叠率。

结合目标函数与约束条件即可得到最终的多目标规划模型。

#### 3.2 最优测线方向讨论

由三维矩形海域覆盖宽度的模型可知，此时在该点处进行多声波探测的覆盖宽度仅与坡度 $\alpha$ 、测线方向与坡面法向所成角 $\beta$ 及海水深度 $D$ 有关，即海域内任一点处多声波测线的覆盖宽度都可以表示为：

$$W = F(\alpha, \beta, D) \quad (17)$$

当深度 $D$ 一定时，利用 MATLAB 绘制坡面中心点处测线的覆盖宽度随 $\beta$ 的变化情况如图 3 所示，当船在中心点时，多波束测深的覆盖宽度随 $\beta$ 角的变化：

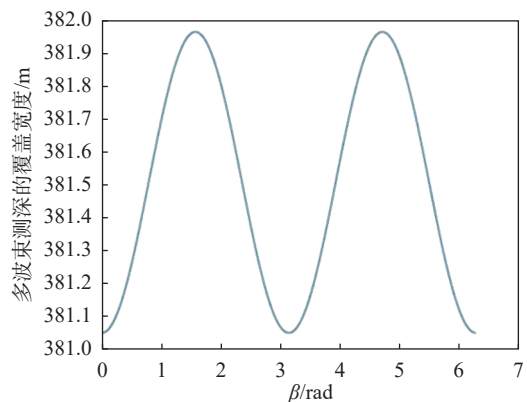


图 3 覆盖宽度随 $\beta$ 函数变化关系图

可得当  $\beta = \frac{\pi}{2}$  时, 该条测线的覆盖宽度最大, 此时测线沿坡面等深线方向分布。

在测线布设过程中, 以最大化单条测线覆盖条带面积为目标, 对坡面上的每一点考虑下一位置的最优解, 都为相应等深线方向, 即为最优测线方向。

### 3.3 模型求解

考虑沿等深线方向以 10% 的最小前向重叠率

进行布设, 可得矩形坡面海域最优测线布设方案为沿南北方向的 34 条平行测线序列。

以下为其中一组测线布设方案的部分数据。

该方案以矩形海域西边界为起点, 起始测线编号为 1, 可得测线布设位置及间距如表 3 所示。

同时利用 MATLAB 绘图可得此矩形坡面测线布设的俯视图示意图如图 4 所示, 其中蓝色为正常测量区域, 粉色为重叠区域。

表 3 测线布设位置及深度(部分)

编号	1	2	3	4	5	6	7
测线处海水深度 /m	197.6044	182.0369	167.6959	154.4846	142.3141	131.1025	120.7741
测线距西边界距离 /m	358.5218	953.0205	1500.684	2005.202	2469.973	2898.129	3292.555

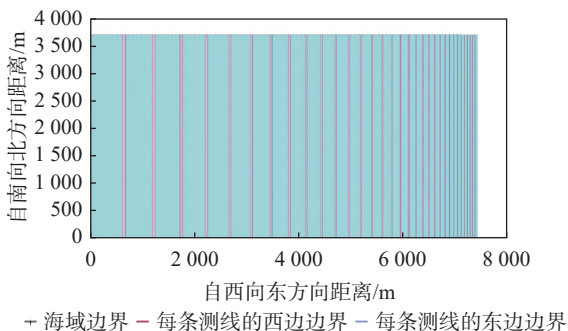


图 4 矩形海域测线布设边界俯视图

## 4 真实海域测线布设优化模型

### 4.1 待测海域地形分析

根据附件中单波束测线的数据对海底地形进行可视化处理, 假设附件单波束测深数据准确可靠, 能够反映真实海底地形, 同时待测海域在较小的坐标范围内坡度变化较为平缓, 能够用平滑函数进行处理, 得到海底地形示意图如图 5 所示。

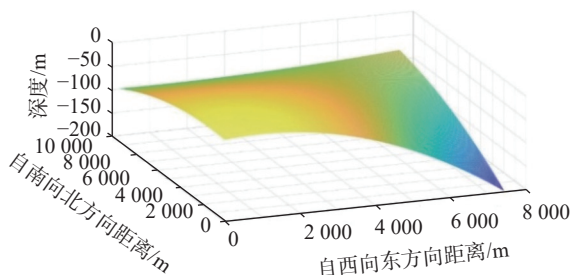


图 5 海底地形图(不等比例呈现)

对于地形变化平缓的海域, 采用平滑函数能够简化数据处理过程, 提高效率。同时, 若数据采集中存在测线间隙或数据缺失, 也可通过平滑

函数进行插值处理, 填补数据空白。

### 4.2 测线布设优化模型建立

设  $S_p$  为已布设测线条带所覆盖的待测海域内的区域,  $S$  为此块待测区域,  $d_{sum}$  为所设计测线的总长度,  $\eta$  为相邻条带之间的重叠率。仿照上文的多目标优化模型, 仍然考虑建立使得所布测线覆盖  $S$  的区域最大、测线总长度  $x_{sum}$  最短, 同时满足相邻条带之间的重叠率在 20% 以下的多目标优化模型。

其目标函数为:

$$\begin{cases} \min x_{sum} \\ \max S_p \cap S \end{cases} \quad (18)$$

约束条件为:

$$0 \leq \eta \leq 20\% \quad (19)$$

可得待测海域地形条件下的多目标规划模型<sup>[10]</sup>。

### 4.3 测线布设的一种优化方案设计

#### 4.3.1 真实海域测线布设迭代算法设计

考虑所布设测线平行于区域边界, 以便进行相关指标的计算。假设测线与海域边界之间不存在障碍物, 可以直接穿越边界进行测量, 简化了测量路径, 使测量船只能直接沿预定测线进行测量, 同时也避免了由障碍物导致的测量间隙。

此时海底地形存在高低起伏变化, 测线所形成的覆盖宽度会随测点的海水深度而变化。设计迭代求解测线布设位置的算法步骤如下:

步骤 1: 由附件数据及拟合结果确定每一点处的深度以及待测区域边界值等指标;

步骤 2: 设定初始迭代位置及条件, 以区域西边界中点作为初始位置, 迭代的起始条件为第

一条测线的西边界刚好穿过区域西边界的中点位置；

步骤 3：考虑在待测海域范围内遍历搜索所有可能的测线位置，根据测线处海水深度可确定其覆盖边界位置，与步骤 2 判定条件比对可确定初始测线的位置；

步骤 4：考虑下一迭代条件，以此条测线东边界近似对称位置作为下一迭代的初始位置，迭代的判定条件为所搜索的下一条测线的西边界刚好穿过该条测线东边界上对应位置；

步骤 5：根据完全覆盖要求设定终止条件，在未达到终止条件时逐步迭代搜索下一测线位置。

最终得到所有测线的布置位置和其覆盖区域条带分布图如图 6 所示。

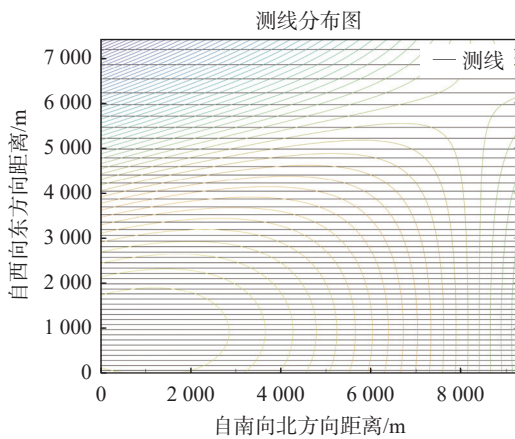


图 6 测线布置图

其中蓝色为测线覆盖区域，粉色为重叠率超过 20% 的区域。

#### 4.3.2 待测指标讨论及运算结果

##### 1) 测线总长度

考虑测线为平行与区域边界的直线，测线总长度仅由边界宽度及测线布置条数决定。

##### 2) 漏测海区面积

考虑两条测线的边界交线，前一条测线的下边界与后一条测线的上边界交叉形成的较浅区域认为是相邻两条测线的漏测区域。

在数值计算的过程中，将每一块漏测区域进行近似分块处理，累加得到漏测海区总面积。

##### 3) 重叠区域

类似漏测区域的定义，考虑前一条测线的上边界与后一条测线的下边界交叉形成的较深区域为相邻两条测线的重叠区域。

##### 4) 重叠率

在某一深度点处考虑相邻两条测线的重叠宽度与自身覆盖宽度之比。由于此时测线并非完全等深布设，某一点处的重叠率并不能代表此条测线的重叠率，需分别计算并统计重叠率大于 20% 的部分。

在以上测线布设的基础上，根据不同指标的求解方式，利用一定的数值计算近似方法求得相应指标的结果为：

测线的总长度：230 NM；

漏测海区占总待测海域面积的百分比：0.068 596 582 914 388，约为 6.85%；

重叠率超过 20% 部分的总长度：1.471 599 200 000 027 × 10<sup>5</sup> m。

## 5 模型检验

在测线布设的过程中，因海底地形并不规则，想要同时最小化漏测海区的占比和相邻测线之间的重叠率很难做到。

本文设计的测线布设方案考虑实现二者之间的平衡，即以区域边界中点作为初始位置进行迭代，这样就可以将漏测海区的占比和测量重叠率都控制在可接受的范围内。作为对比下文给出以区域两端作为初始位置迭代的结果，以证明本文测线布设方案的优越性。

以区域边界左端点作为初始位置迭代时，漏测海区占总待测海域面积的百分比约为 14.2%，重叠率超过 20.0% 部分的总长度约为 2.022 × 10<sup>5</sup> m，得到测线覆盖条带分布图如图 7 所示。

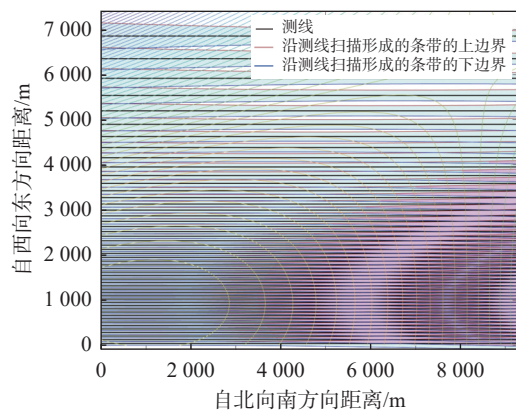


图 7 以左端点为初始位置迭代的测线覆盖条带分布图

以区域边界右端点作为初始位置迭代时，漏测海区占总待测海域面积的百分比约为 28.0%，重

叠率超过 20% 部分的总长度约为  $3.256 \times 10^4$  m, 得到测线覆盖条带分布图如图 8 所示。

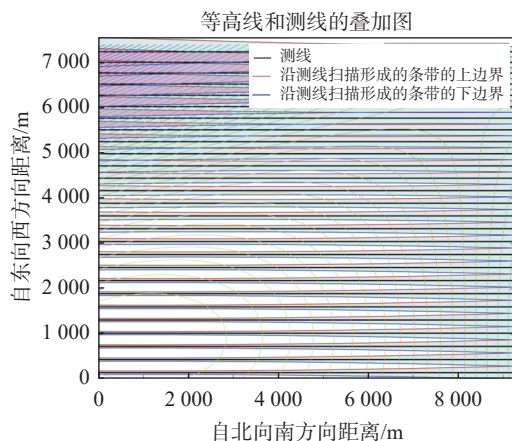


图 8 以右端点为初始位置迭代的测线覆盖条带分布图

将图 7 和图 8、图 9 的对比可知, 本文所设计的测线布设方案能够兼顾漏测区域面积与相邻测线之间的重叠率, 达到较优的测量效果, 模型具有较好的适用性与实际意义。

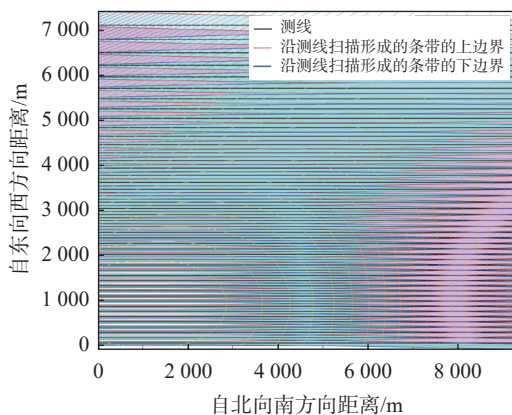


图 9 测线覆盖条带分布图

## 6 结束语

本文基于空间解析几何分析与多目标规划原理建立了矩形坡面海域与真实海域的多波束测线

布设模型, 探究了测线覆盖宽度及重叠率的数学表示, 并设计算法对模型进行求解与可视化呈现。

在矩形坡面海域内, 最优测线布设方案为沿区域等深线方向平行布设。对于真实海域, 本文设计了一种较为有效的算法进行测线布设间距的确定, 给出了一种可行的测线布设方案。

在之后的研究中, 可进一步对测线方向进行讨论搜索, 并进一步沿等深线走向对海域地形进行分块或网格化处理, 以实现更优的测量效果。

## 参考文献

- [1] 祝慧敏. 多波束测深系统水下地形测量关键技术 with 精度评估[J]. 经纬天地, 2022(2): 4-6.
- [2] 余启义. 基于多波束测深技术的海底地形测量[J]. 测绘与空间地理信息, 2022, 45(9): 262-264.
- [3] 成芳, 胡迺成. 多波束测量测线布设优化方法研究[J]. 海洋技术学报, 2016, 35(2): 87-91.
- [4] 孙和平, 李倩倩, 鲍李峰, 等. 全球海底地形精细建模进展与发展趋势[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(10): 1555-1567.
- [5] 邸智, 张一博, 韩书星, 等. 基于区域划分的多波束测线布设[J]. 数学建模及其应用, 2024, 13(1): 87-95.
- [6] 张旭, 叶小心, 洪德玫. 多波束系统在长江航道测量中的测线布设方法研究[J]. 中国水运航道科技, 2017(1): 52-55.
- [7] 王茂枚, 周广宇, 陈楠, 等. 基于高分辨率的多波束测量方案研究[J]. 水利水电技术(中英文), 2021, 52(S2): 385-389.
- [8] 马鸣, 古楠, 董佳伟, 等. 基于电子海图的无人艇集群区域覆盖路径规划[J]. 中国舰船研究, 2024, 19(1): 211-219.
- [9] 中国地质调查局. 中国地质调查局地质调查技术标准: 海洋多波束测量规程[M]. 北京: 地质出版社, 2016.
- [10] 肖波, 李善斌, 管廷波, 等. 关于多波束测绘系统在现代海洋测绘中的应用研究[J]. 中文科技期刊数据库(全文版)工程技术, 2022(3): 83-86.

编辑 王燕