



材料力学叠合梁弯曲正应力的虚拟仿真 拓展研究

敖日汗, 崔丹, 田红艳, 马驰骋*

(河北工业大学机械工程学院, 天津 300401)

摘要: 弯曲变形是材料力学中的重要章节, 也是学生普遍反映的材料力学知识难点之一。为了加深学生对中性层、胡克定律、应力分布等知识点的理解和掌握, 该文开展了材料力学弯曲正应力的拓展教学。在平面弯曲单梁的授课基础上, 增加了层合梁和粘合梁的弯曲正应力讲解, 并进行了正应力测试实验。由于借助了虚拟仿真可以具象化应力分布、中性层等传统教学无法直观展示的物理概念, 该文在上述理论与实验基础上, 进一步实施了弯曲正应力的虚拟仿真拓展, 利用有限元软件对上述两类梁结构进行了仿真计算。通过理论、实验和仿真的系统讲授, 让学生对弯曲应力、中性层、胡克定律等概念有了更深入的认识与理解。

关键词: 弯曲正应力; 材料力学; 组合梁; 虚拟仿真; 剖面应力

中图分类号: TP75

文献标志码: A

DOI: 10.12179/1672-4550.20240293

An Extended Virtual Simulation Study on Bending Normal Stress of Composite Beams in Mechanics of Materials

AO Rihan, CUI Dan, TIAN Hongyan, MA Chicheng*

(School of Mechanical Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: Bending deformation is an important chapter in Mechanics of Materials and is also a concept that students commonly find challenging. In order to deepen students' understanding and mastery of concepts such as the neutral layer, Hooke's law, stress distribution, an extended teaching module on bending normal stress in Mechanics of Materials is presented. Building upon the instruction of single-beam bending, this module expands to include the analysis of bending normal stress in both superimposed and bonded beams, complemented by corresponding normal stress tests. To help visualize physical concepts—such as stress distribution and the neutral layer—which are difficult to demonstrate intuitively in traditional teaching, a virtual simulation extension is implemented based on the theoretical and experimental foundations. This involves using finite element software to carry out simulation calculations for the above two types of beam structures. Through the systematic approach integrating theory, experiment, and simulation, students can achieve a more profound and intuitive understanding of key concepts, including bending stress, the neutral layer, and Hooke's law.

Key words: bending normal stress; mechanics of materials; composite beams; virtual simulation; section stress

材料力学是工科专业的必修基础课, 是奠定力学基本思想的基础理论课程之一, 也是开展工程应用技术的入门课程之一^[1-2]。弯曲变形是材料力学课程的重要内容, 也是学生反映比较难学的

章节^[3]。因此, 针对材料力学课程的教学特点与授课问题, 各种新的教学改革方案被不断提出并进行了相应的探索与实践研究^[4-8]。

在材料力学的教学改革中, 有限元技术的发

收稿日期: 2024-05-31

基金项目: 河北工业大学 2023—2024 年度本科教育教学改革研究与实践项目(202301005); 河北工业大学 2022—2023 年度本科教育教学改革研究与实践项目(202202001)。

作者简介: 敖日汗, 博士, 讲师, 主要从事工程结构分析与仿真方面的研究。E-mail: aorihan@hebut.edu.cn

* 通信作者: 马驰骋, 博士, 副教授, 主要从事复杂结构动力学分析和微纳流体力学方面的研究。E-mail: machch@hebut.edu.cn

展及广泛应用为材料力学(包括工程力学)的教学注入了新的活力。文献 [9-10] 利用 ABAQUS 软件把工程力学课程教学中的概念和公式转化为有限元算例,通过仿真计算和应力应变云图结构,帮助学生消化理解课程中的概念和公式,使用仿真进行辅助教学,在一定程度上提高了学生对工程力学知识点的理解。文献 [11] 使用仿真软件 ANSYS 对材料力学基本变形进行了深入讨论,建立了材料力学基本概念与仿真结果间的联系。文献 [12] 在材料力学的课程教学中,引入了 COMSOL Multiphysics 仿真教学案例,该混合教学方法一方面可以帮助学生更好地掌握和理解相关的基础知识,另一方面也可以增强学生的实践能力与创新思维。文献 [13] 在工程力学课程教学中利用了仿真软件 ADINA 对工程力学案例与课程算例开展了仿真教学研究。

利用有限元软件可以对应力、应变有一个直观显示,这是实验手段无法达到的,也可以辅助学生完成复杂结构的剪力图、弯矩图等。主流的有限元软件已经被广泛应用于力学课程的教学改革中,也取得了良好的教学效果。文献 [14] 总结到:在教学中,有限元分析应作为教学辅助,而不是教学引导。有限元理论这门课程需要人们具备一定的数学、物理和力学等知识。因此,这就要求教师深挖教学案例背后的力学等多学科理论,利用好有限元仿真赋能教学。

随着“新工科”建设的推进,高校传统专业也在积极转型,在强调立德树人的前提下^[15-16],培养学生的工程素养和提高学生的工程技能是当前课程转型的重要方向之一。学校十分注重材料力学中工程案例的拓展教学,如在弯曲变形章节的学习过程中,介绍了大量的工程梁结构案例,针对如何从单梁结构的平面弯曲扩展到工程中的复杂梁结构。这对学生来说是一个挑战,因为他们对中性层、惯性矩等概念的理解不深入。因此,本文拟通过理论、实验及仿真 3 个方面加强学生对上述力学概念的领会与应用。

综上所述,本文对层合梁结构的正应力分析展开进一步的研究,探讨了复杂梁结构弯曲变形的一些概念。具体工作包括:首先介绍了复杂梁结构弯曲变形的理论,给出了层合梁和粘合梁两类结构的惯性矩和应力分布;然后开展了两类梁结构的实验测量;最后利用虚拟仿真实现了

两类结构的静态分析,根据理论分析、实验测量和虚拟仿真的结果对比,对该问题进行了讨论与总结。

1 理论分析

关于简单梁结构的平面弯曲问题在教材中已有详细阐述^[1-2]。本文挑选两端简支复合梁结构展开分析,针对钢-铝粘合梁(钢、铝不分离)和钢-钢层合梁(钢、钢之间可以相对滑动)两类结构的弯曲变形,阐述中性层、惯性矩和正应力等概念。

1.1 钢-铝粘合梁的纯弯曲理论分析

两端简支钢-铝粘合梁如图 1 所示,粘合梁上部子梁材料为钢,下部子梁材料为铝,子梁之间胶合制成无相对滑动,梁的材料常数及几何尺寸如表 1 所示。

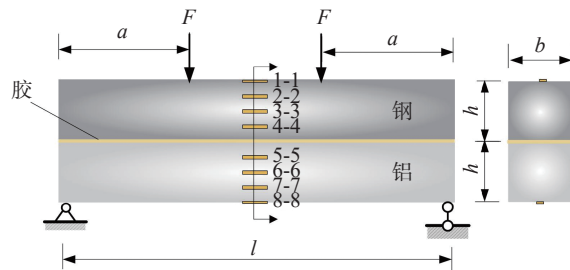


图 1 钢-铝粘合梁受力简图

表 1 材料常数及几何参数

弹性模量		泊松比		a/mm	l/mm	b/mm	h/mm
钢(E_1)/GPa	铝(E_2)/GPa	钢	铝				
206	70	0.26	0.33	200	600	20	20

对于不同材料胶合而成的粘合梁弯曲变形问题,材料力学通常采用折算相当截面的方法进行求解。本文采用将铝梁折算为钢的相当截面,可得到中性轴的计算公式为:

$$\bar{y} = \frac{h}{2} \cdot \frac{E_2 + 3E_1}{E_2 + E_1} \quad (1)$$

式中: \bar{y} 为中性轴与截面下边缘的间距,如图 2 所示,将表 1 相关数据代入式(1),计算得 $\bar{y}=24.93$ mm,中性轴位于钢梁截面处。

粘合梁在两个集中力均为 $F=1000$ N 作用下,两个集中力之间为纯弯曲变形,可得各子梁纯弯曲变形下的正应力计算公式为:

$$\sigma_1 = \frac{Fay}{I_z} \quad (2)$$

$$\sigma_2 = n \cdot \frac{Fay}{I_z} \quad (3)$$

式中: σ_1 和 σ_2 分别为钢梁和铝梁的弯曲正应力; n 为铝与钢的弹性模量之比, 即 $n = E_2/E_1$; a 为力 F 至两端约束间的距离(图1); y 为梁横截面任一点至中性轴的距离; I_z 为粘合梁截面关于中性轴 z 轴的惯性矩, 其计算公式为:

$$I_z = \frac{(1+n)bh^3}{12} + \left[n\left(\bar{y} - \frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{3h}{2} - \bar{y}\right)^2 \right] bh \quad (4)$$

式中: b 为梁横截面的宽度, h 为梁横截面的高度(图1)。由式(2)和式(3)绘制该粘合梁正应力分布图, 如图2(a)所示。图中, z 轴为中性轴, y 轴为截面的对称轴。通过该图可以观察到, 钢梁截面中性轴以上为受压区, 最大压应力位于截面上边缘, 其值可由式(2)计算为 -51.58 MPa; 铝梁整个截面处于受拉区, 最大拉应力位于截面下边缘, 其值可由式(3)计算为 28.99 MPa。其中, 胶合附近处正应力不连续, 位于钢梁侧有拉应力值为 16.86 MPa, 位于铝梁侧有拉应力值为 5.73 MPa。

纯弯曲变形处各纵向纤维满足单向受力假设, 由胡克定律并结合式(2)和式(3), 可以得到应变的计算公式为:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{Fay}{E_1 I_z} \quad (5)$$

式中: ε_1 和 ε_2 分别为钢梁和铝梁的纯弯曲线应

变。由于将铝折算为钢的相当截面, 因此应变计算公式中含有钢梁的弹性模量 E_1 。通过式(5)可以计算得到最大压应变为 -250×10^{-6} , 位于钢梁上边缘处; 最大拉应变为 414×10^{-6} , 位于铝梁下边缘处; 胶合处的线应变为拉应变, 其值为 82×10^{-6} 。同时通过式(5)绘制该粘合梁应变分布图, 如图2(b)所示, 各纵向纤维应变呈线性分布, 与其到中性层的距离呈正比, 其中胶合层应变连续。

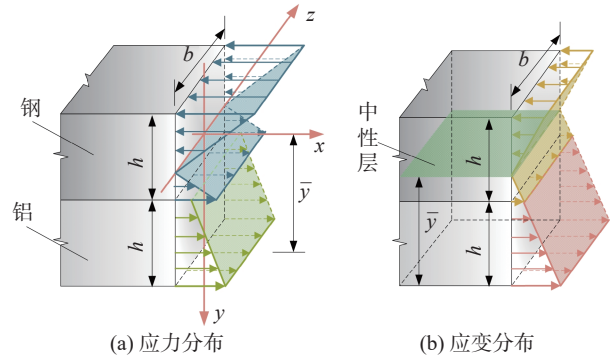


图2 粘合梁纯弯曲应力应变分布图

选取8个测点, 如图1所示。按照命名顺序, 8个测点距胶合面分别为 -20 、 -15 、 -10 、 -5 、 5 、 10 、 15 、 20 mm。结合式(2)和式(3), 计算得到测点的应力值, 理论应力值 $\sigma_{理}$ 如表2所示。

表2 粘合梁弯曲正应力数据对比

测点	理论值($\sigma_{理}$)/MPa	实测值($\sigma_{实}$)/MPa	仿真值($\sigma_{仿真}$)/MPa	误差 $\left(\frac{\sigma_{理} - \sigma_{实}}{\sigma_{理}} \times 100\%\right)/\%$	误差 $\left(\frac{\sigma_{理} - \sigma_{仿真}}{\sigma_{理}} \times 100\%\right)/\%$
1-1	-51.58	-51.36	-51.58	0.42	0
2-2	-34.47	-37.56	-34.47	-8.97	0.01
3-3	-17.36	-19.84	-17.32	-14.32	0.23
4-4	-0.25	-2.68	-0.13	—	—
5-5	11.54	11.41	11.55	1.16	-0.08
6-6	17.36	17.20	17.35	0.93	0.05
7-7	23.17	23.05	23.16	0.52	0.04
8-8	28.99	29.31	28.99	-1.10	0.02

1.2 钢-钢层合梁的纯弯曲理论分析

层合梁由两个子梁自由叠合而成, 如图3所示, 材料均为钢, 忽略不计各子梁之间的摩擦, 子梁将独立发生弯曲变形。梁的材料常数及几何尺寸如表1所示。

同样, 该层合梁在两个集中力均为 $F=1000$ N作用下, 两个集中力之间为纯弯曲变形。考虑纯弯曲处各子梁的曲率相等, 截面弯矩将均匀地由每根子梁承担。因此, 每根子梁的正应力计算公

式为:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{6Fay}{bh^3} \quad (6)$$

式中: σ_1 和 σ_2 分别为各子梁的弯曲正应力, y 为截面任一点到各自中性轴的距离。由此式可绘制该层合梁正应力分布图, 如图4所示。图中, z_1 轴和 z_2 轴为各子梁的中性轴, y 轴为截面的对称轴。通过该图可以观察到, 各子梁截面均为中性轴以上为受压区, 中性轴以下为受拉区。子梁

截面应力分布对称，最大压应力位于各子梁截面上边缘，其值可由式(6)计算为-75.00 MPa；最大拉应力位于各子梁截面下边缘，其值为 75.00 MPa。其中，叠合处正应力有突变，位于上方子梁侧有最大拉应力，位于下方子梁侧有最大压应力。

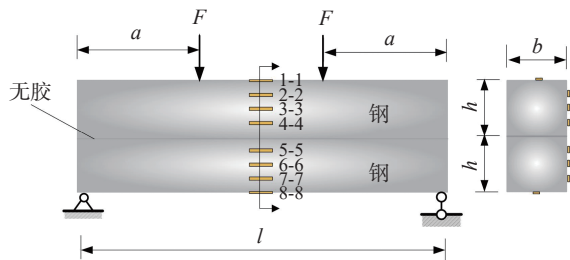


图 3 钢-钢层合梁受力简图

根据胡克定律并结合式(6)，可以得到层合梁应变的计算公式为：

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{6Fay}{E_1bh^3} \quad (7)$$

式中： ε_1 和 ε_2 分别为各子梁的纯弯曲线应变。通过此式可以计算得到最大压应变为 -364×10^{-6} ，位

于各子梁上边缘处；最大拉应变为 364×10^{-6} ，位于各子梁下边缘处。结合式(7)绘制该层合梁应变分布图(图 4)，各纵向纤维应变呈线性分布，与其到中性层的距离成正比，子梁间应变不连续。

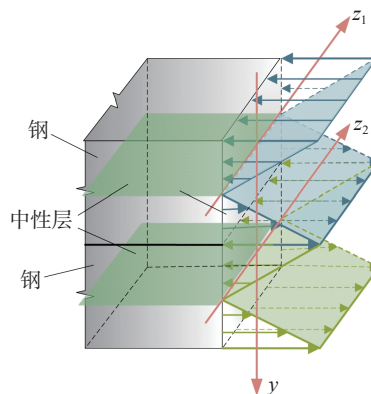


图 4 层合梁弯曲应力(应变)分布图

与钢-铝粘合梁相同，选取 8 个测点，如图 3 所示，结合式(5)计算得到测点的应力值，理论应力值 $\sigma_{理}$ 如表 3 所示。

表 3 层合梁弯曲正应力数据对比

测点	理论值($\sigma_{理}$)/MPa	实测值($\sigma_{实}$)/MPa	仿真值($\sigma_{仿真}$)/MPa	误差 $(\frac{\sigma_{理}-\sigma_{实}}{\sigma_{理}} \times 100\%) / \%$	误差 $(\frac{\sigma_{理}-\sigma_{仿真}}{\sigma_{理}} \times 100\%) / \%$
1-1	-75.00	-73.82	-75.06	1.58	-0.07
2-2	-37.50	-34.88	-37.48	6.98	0.05
3-3	0	1.37	0	—	—
4-4	37.50	37.63	37.55	-0.34	-0.13
5-5	-37.50	-37.49	-37.47	0.02	0.08
6-6	0	-0.14	0	—	—
7-7	37.50	38.25	37.47	-1.99	0.08
8-8	75.00	77.04	74.94	-2.73	0.08

2 实验分析

本文采用应力分析法即电测法测定梁跨中处的线应变。实验设备为 XL3418A 型材料力学多功能试验台一套(图 5)以及 XL2118A16 (U)型静态应变测试仪。

按照 1/4 桥接方法将测量应变片和温度补偿片接在应变测试仪对应的接线柱上，如图 6 所示。

实验时摇动手柄实现加载，载荷及应变数值由应变测试仪读出。由于摇动手柄通过两根加载杆向梁施加外力，为使得梁受力点力值与理论分析相同均为 1000 N，摇动手柄施加的力值应为 2000 N。加载后依次测得 8 个测点的应变数值，实验重复 3 次并计算平均值，如表 4 所示。

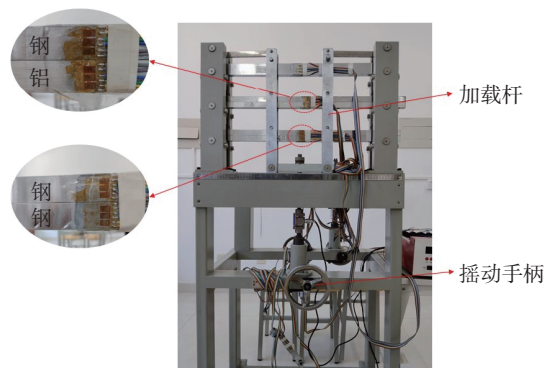


图 5 材料力学多功能试验台实物图

测试位置为梁的纯弯曲变形处，根据平截面假设及纵向纤维的单向受力假设，将实测应变值与材料弹性模量相乘计算得到实测应力值，如

表 2 和表 3 所示。分析各测点数据, 可以看到钢-铝粘合梁 2-2 和 3-3 测点及钢-钢层合梁 2-2 测点处误差较大, 这是由于此 3 处测点位于中性层附近, 应变数值较小, 微小的应变贴片技术误差也会导致较大的误差率。除上述测点外, 实验值与理论值误差较小, 说明了实验的有效性及理论公式的正确性。

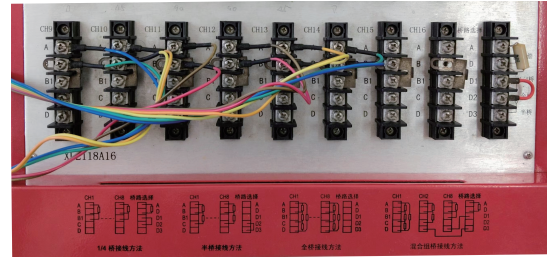


图 6 应变测试仪(1/4 桥接)实物图

表 4 实验应变数据

测点	实测应变值($\times 10^{-6}$)			平均应变值 $\epsilon_{实}$ ($\times 10^{-6}$)	
	实验次数				
	1	2	3		
钢-铝粘合梁	1-1	-242	-253	-253	-249.33
	2-2	-182	-183	-182	-182.33
	3-3	-97	-96	-96	-96.33
	4-4	-13	-13	-13	-13.00
	5-5	163	163	163	163.00
	6-6	245	246	246	245.67
	7-7	329	330	329	329.33
	8-8	419	419	418	418.67
钢-钢层合梁	1-1	-361	-357	-357	-358.33
	2-2	-170	-169	-169	-169.33
	3-3	8	7	5	6.67
	4-4	184	182	182	182.67
	5-5	-182	-182	-182	-182.00
	6-6	0	-1	-1	-0.67
	7-7	187	185	185	185.67
	8-8	375	373	374	374.00

3 虚拟仿真及评价指标

为了更加清晰地展示弯曲变形的应力分布, 以及弥补实验中测点有限的不足, 使用仿真软件 ANSYS 对钢-钢层合、钢-铝粘合简支梁进行静态仿真分析。按照图 1 和图 3 所示的结构形状与尺寸, 使用有限元仿真软件 ANSYS 对梁进行网格划分。采用三维八节点六面体单元(SOLID185)对结构进行离散化, 分别在尺寸为 2.0、1.0、0.5 mm 的网格单元进行仿真分析, 发现应力应变仿真结果差距很小, 因此选择尺寸为 2.0 mm 的网格单元进行仿真分析, 最终模型包含 277882 个节点和 60000 个单元。为了模拟简支梁的实际工作状态, 在叠合梁的下方设置了两种不同类型的支撑约束。具体设置方法为: 在梁的左端下方设置固定铰链支座, 该支座对梁的所有位移方向进行约束, 限制梁在 x 、 y 、 z 方向上的位移; 在梁的右端

下方设置了滑动铰链支座, 此支座只限制梁在竖直方向(y 方向)和横向(z 方向)的位移, 但允许在轴向(x 方向)的自由滑动, 如图 7 所示。

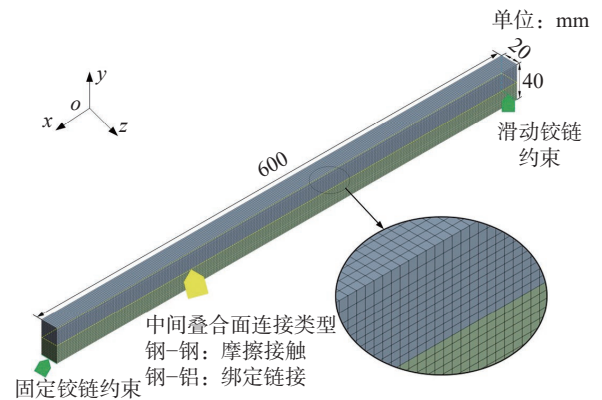


图 7 有限元分析设置示意图

首先对钢-钢层合梁, 考虑形状相同、材料均为钢的两个梁叠放在一起, 上下两梁之间不考虑

润滑情况，仅有摩擦接触，摩擦系数设置为 0.15。梁上方施加载荷，通过使用有限元仿真软件 ANSYS，可得钢-钢层合梁在静态加载条件下的应力应变分布图(图 8)及各测点应力数值(表 2)。需要指出的是，集中载荷施加方式是距离左右支座为 a (200 mm) 处，在梁的上方，沿着梁的横向施加均布载荷。因此，仿真结果图中应力集中现象是不显著的。

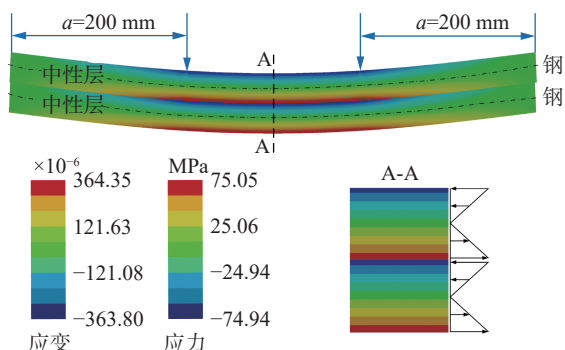


图 8 钢-钢层合梁应变、应力分布图

当两梁材料相同的情况下，可以观察到两个梁的应力和应变分布大致相似，而在两梁叠合面处的应力和应变存在明显差异，如图 8 所示。此外在每个梁中都观察到了中性层的存在，中性层是梁截面上一个不受拉伸或压缩的区域，在该区域内应力为零，在中性层上方，梁材料呈现受压状态；而在中性层下方，梁材料则处于受拉状态。对于中间截面处的应力应变分布，也可以观察到相似的特征，这表明在梁的中间位置，由于受力均匀分布，梁的受力情况相对均匀，无明显应力集中现象。

对钢-铝粘合梁，将形状相同、材料不同的两梁绑定在一起，上方梁的材料为钢，下面是铝，在有限元仿真软件 ANSYS 中对钢-铝粘合梁进行静态分析，得到应变、应力分布图(图 9)及各测点应力数值(表 3)。

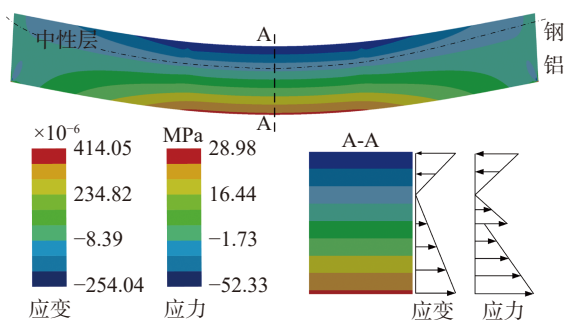
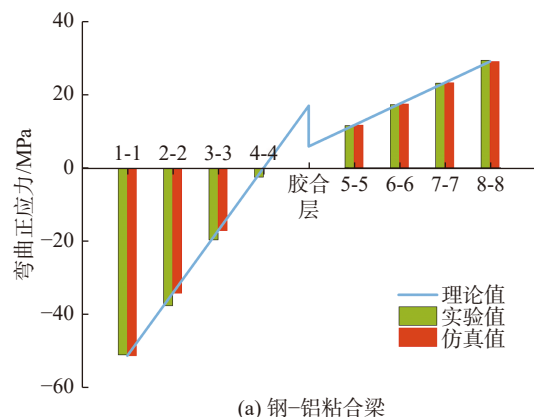


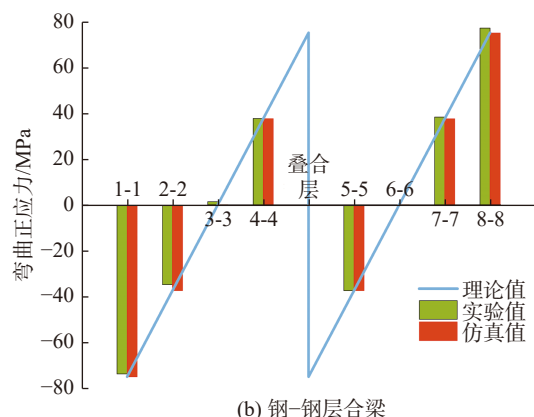
图 9 钢-铝粘合梁应变、应力分布图

应力分布表明材料性质的不均匀性导致了粘合梁在受力时表现出更加复杂的应力应变分布规律，中性层位于结构钢一侧，即位于弹性模量较大的钢材料一侧。这与钢-钢层合梁存在两个中性层的情况有所不同，是由于钢和铝的弹性模量差异所引起。

观察上下两梁的应力应变分布，与钢-钢层合梁有明显差异，在中性层上方，受到了压力的作用，而在中性层下方则受到了拉力的作用，即在整个铝部分，应力应变均呈现出受拉的状态。应力应变分布规律与中间截面的应力应变分布规律相似，均为从下到上的由最大变为最小，应变变化连续，但应力由于在叠合面弹性模量的突变导致变化不连续，这一点也与钢-钢层合梁有所不同。将两种梁的纯弯曲正应力理论值、实验值以及仿真值数据汇总绘制，如图 10 所示，通过对比可以发现，数据结果一致。特别地，由于实验存在环境等因素的影响，使得仿真值与理论值吻合度更高。



(a) 钢-铝粘合梁



(b) 钢-钢层合梁

图 10 数据结果对比图

通过对比图 10 (a)与图 10 (b)，从理论、实验和仿真 3 个结果均可以得到，由于钢材的弹性 (下转第 64 页)