云南民族大学学报(自然科学版),2024,33(3):396 -400,410 CN 53 -1192/N ISSN 1672 -8513
doi:10.3969/j.issn.1672 -8513.2024.03.015 http://ynmz.cbpt.cnki.net

2 种低秩矩阵恢复优化模型的误差估计定理

郑 珂,宋儒瑛
(太原师范学院 数学系,山西 晋中 030619)

摘要: 近年来低秩矩阵恢复问题逐渐引起人们的关注,类似于向量稀疏恢复的充分条件是需要测量矩阵满足限制等距性质,低秩矩阵恢复的充分条件是需要一个线性映射满足限制等距性质.低秩矩阵恢复时所需的模型大致分为有噪和无噪两种恢复模型,恢复出来的结果需要不同的限制等距常数界去保证. 文章证明了这 2 种优化模型的误差界估计定理,并得出了 2 种不同的限制等距常数界.

关键词: 线性映射的限制等距性质;低秩矩阵恢复;压缩感知;Frobenius 范数
中图分类号:O178 **文献标志码:**A **文章编号:**1672 -8513(2024)03 -396 -05

压缩感知中若要使得信号通过稀疏恢复模型成功恢复出来,一个充分条件便是测量矩阵满足限制等距性质(简称 RIP),类比来讲,若要使得低秩矩阵通过恢复模型成功恢复出来,一个充分条件便是线性映射满足限制等距性质. 文献[1]给出了线性映射的限制等距性质的定义,并且得出了随机线性映射下的低秩矩阵恢复定理,以及在给定线性映射下,通过 Dantzig selector 进行低秩矩阵恢复的稳定性和鲁棒性定理. 文献[2]得出了随机线性映射下低秩矩阵恢复的稳定性和鲁棒性定理. 文献[3]得出了通过 Schatten p - Quasi - Norm 极小化进行低秩矩阵恢复的定理. 文献[4]得出了针对低秩矩阵恢复的限制等距常数界. 文献[5]介绍了低秩矩阵恢复的秩一投影模型,并提出了一种约束核范数极小化方法,用于低秩矩阵在噪声情况下的稳定恢复. 本文是在文献[6]对有噪和无噪信号稀疏恢复模型研究的基础上,对低秩矩阵恢复的优化模型进行误差估计,并得出了限制等距性质的 2 种限制等距常数界,总结出了两种优化模型的误差界估计定理. 这两种限制等距常数的界与文献[6]中所得的限制等距常数界相同.

1 预备知识

定义 1(线性映射的限制等距性质)[1-3] 对于一个线性映射 $\boldsymbol{A}:\mathbf{C}^{n_1\times n_2}\to\mathbf{C}^m$,秩限制等距常数 $\delta_r=\delta_r(\boldsymbol{A})$(其中 $r\leqslant n:=\min\{n_1,n_2\}$)被定义为一个最小值 $\delta\geqslant 0$,使得对于所有秩最多为 r 的矩阵 $X\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2}$,都有以下不等式成立

$$(1-\delta_r)\|X\|_F^2\leqslant\|\boldsymbol{A}(X)\|_2^2\leqslant(1+\delta_r)\|X\|_F^2. \tag{1}$$

定义 2[6] 给定映射 $\boldsymbol{A}:\mathbf{C}^{n_1\times n_2}\to\mathbf{C}^m$ 并且令 $n=\min\{n_1,n_2\}$,对于 $\forall M\in\ker\boldsymbol{A}\setminus\{0\}$ 满足以下不等关系

$$\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell(M)\leqslant\rho\sum_{\ell=r+1}^{n}\sigma_\ell(M),$$

那么称映射 $\boldsymbol{A}$ 满足秩 r 的稳定零空间性质,其中常数 $0<\rho<1$ 与矩阵秩 r 相关.

定义 3[2] 给定映射 $\boldsymbol{A}:\mathbf{C}^{n_1\times n_2}\to\mathbf{C}^m$ 并且令 $n=\min\{n_1,n_2\}$,其中 $\|\cdot\|$ 表示 C^m 上的一个范数. 对于 $\forall M\in\ker\boldsymbol{A}\setminus\{0\}$ 奇异值满足以下不等关系

$$\left[\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell(M)^2\right]^{1/2}\leqslant\frac{\rho}{\sqrt{r}}\sum_{\ell=r+1}^{n}\sigma_\ell(M)+\tau\|A(M)\|,$$

收稿日期:2022 -05 -11.
作者简介:宋儒瑛(1964 -),男,教授,博士. 主要从事逼近论及压缩感知研究.
通信作者:郑珂(1995 -),女,硕士研究生. 主要从事压缩感知研究.

那么称映射 $\boldsymbol{A}$ 满足秩 r 的 Frobenius 鲁棒秩零空间性质(与$\|\cdot\|$相关),其中常数 $0<\rho<1$ 以及 $\tau>0$ 都与矩阵秩 r 相关.

定理 1[2,6]　给定一个线性映射 $\boldsymbol{A}:\mathbf{C}^{n_1\times n_2}\to\mathbf{C}^m$,每个秩最多为 r 的矩阵 $X\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2}$都是优化问题

$$\underset{Z\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2}}{\mathrm{mini}mize}\|\mathrm{Z}\|_*\ \text{subject to}\ \boldsymbol{A}(Z)=y \tag{2}$$

的唯一解,当且仅当对于 $\forall M\in\ker\boldsymbol{A}\setminus\{0\}$ 的奇异值满足

$$\sigma_1(M)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(M)\geqslant 0(\text{其中 } n=\min\{n_1,n_2\}),$$

有以下不等式成立

$$\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell(M)\leqslant\sum_{\ell=r+1}^{n}\sigma_\ell(M). \tag{3}$$

注:令 $\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell(M)=\|M_1\|_*$, $\sum_{\ell=r+1}^{n}\sigma_\ell(M)=\|M_2\|_*$. 这里可以将矩阵的奇异值看做向量

$$\sigma(M)=(\sigma_1(M),\cdots,\sigma_n(M)),$$

所以相应的核范数, Frobenius 范数以及无穷范数如下[7]:

$$\sum_{\ell=1}^{n}\sigma_\ell(M)=\|\sigma(M)\|_1=\|M\|_*,$$

$$\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n}\sigma_\ell^2(M)}=\|M\|_F,$$

$$\sigma_1(\mathrm{M})=\sigma_{\max}(\mathrm{M})=\|\mathrm{M}\|_\infty,$$

类似就有

$$\sigma(M_1)=(\sigma_1(M_1),\cdots,\sigma_r(M_1)),$$
$$\sigma(M_2)=(\sigma_{r+1}(M_2),\cdots,\sigma_n(M_2)), \tag{5}$$

相应的核范数,Frobenius 范数以及无穷范数如下:

$$\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell(M)=\|\sigma(M_1)\|_1=\|M_1\|_*,\ \sum_{\ell=r+1}^{n}\sigma_\ell(M)=\|\sigma(M_2)\|_1=\|M_2\|_*, \tag{6}$$

$$\sigma_1(\mathrm{M}_1)=\sigma_{\max}(\mathrm{M}_1)=\|\mathrm{M}_1\|_\infty,\ \sigma_1(\mathrm{M}_2)=\sigma_{\max}(\mathrm{M}_2)=\|\mathrm{M}_2\|_\infty,$$

$$\sqrt{\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell^2(M_1)}=\|M_1\|_F,\ \sqrt{\sum_{\ell=r+1}^{n}\sigma_\ell^2(M_2)}=\|M_2\|_F,$$

结合以上分析公式(3)等价于

$$\|M_1\|_*\leqslant\|M_2\|_*. \tag{7}$$

定理 2[1]　一个线性映射 $\boldsymbol{A}:\mathbf{C}^{n_1\times n_2}\to\mathbf{C}^m$ 满足定义 1. 设 $X,Z\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2}$,并且$\langle X,Z\rangle_F=tr(XZ^*)=0$,$rank(X)+rank(Z)\leqslant r$. 那么有以下不等式成立

$$|\langle A(X),A(Z)\rangle|\leqslant\delta_r\|X\|_F\|Z\|_F.$$

定理 3[2]　假设映射 $\boldsymbol{A}:\mathbf{C}^{n_1\times n_2}\to\mathbf{C}^m$ 满足秩 r 的 Frobenius 鲁棒零空间性质(与$\|\cdot\|=\|\cdot\|_2$ 相关),并且常数 $0<\rho<1$ 以及 $\tau>0$ 都与矩阵秩 r 相关. 那么对于 $X\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2}$,以及某个 $\eta\geqslant 0$,假设 $y=\boldsymbol{A}(X)+e$ 并且$\|e\|_2\leqslant\eta$,二次约束核范数极小化问题

$$\underset{\mathrm{Z}\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2}}{\mathrm{mini}mize}\|\mathrm{Z}\|_*\ \text{subject to}\ \|\boldsymbol{A}(Z)-y\|_2\leqslant\eta \tag{8}$$

的解 $X^\#$与 X 的近似误差为

$$\|X-X^\#\|_F\leqslant\frac{C}{\sqrt{r}}\sum_{\ell=r+1}^{n}\sigma_\ell(X)+D\eta,$$

其中常数 $C=\dfrac{2(1+\rho)^2}{1-\rho}>0$, $D=\dfrac{2\tau(3+\rho)}{1-\rho}>0$.

引理 1[6]　对于 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_s\geqslant 0$,有以下不等式成立

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_s^2}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_s}{\sqrt{s}}+\frac{\sqrt{s}}{2}(a_1-a_s). \tag{9}$$

2 新定理

本节主要有四个新定理理,其中前两个新定理是低秩矩阵通过无噪模型的重建,后两个新定理是低秩矩阵通过有噪模型的重建.

新定理1 假设线性映射 $\boldsymbol{A}:\mathbf{C}^{n_1\times n_2}\to\mathbf{C}^m$ 关于矩阵秩 r 的 RIC 满足 $\delta_{2r}<1/3$. 那么对于每个秩至多为 r 的矩阵 $X\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2}$ 都是核范数极小化问题(2)的唯一解.

根据定理1可以知道新定理1等价于如下定理:

新定理2 假设线性映射 $\boldsymbol{A}:\mathbf{C}^{n_1\times n_2}\to\mathbf{C}^m$ 关于矩阵秩 r 的 RIC 满足 $\delta_{2r}<1/3$. 那么对于 $\forall M\in\ker\boldsymbol{A}\setminus\{0\}$ 的奇异值满足

$$\sigma_1(M)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(M)\geqslant 0(\text{其中 } n=\min\{n_1,n_2\}),$$

有不等式(3)成立.

注: 不等式(3)等价的结论为

$$\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell(M)+\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell(M)=2\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell(M)=2\|M_1\|_*\leqslant\sum_{\ell=r+1}^{n}\sigma_\ell(M)+\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell(M)=\sum_{\ell=1}^{n}\sigma_\ell(M)=\|M\|_*,$$

即

$$\|M_1\|_F\leqslant\|M_1\|_*<\frac{1}{2}\|M\|_*. \tag{10}$$

所以新定理2的结果等价于上述不等式.

证明 对于 $\forall M\in\ker\boldsymbol{A}\setminus\{0\}$ 以及矩阵的秩 r,令

$$M:=X-Z\in\ker\boldsymbol{A}\setminus\{0\}(\text{其中 } M_1=X,M_2=-Z),$$

那么有

$$\boldsymbol{A}(M)=\boldsymbol{A}(X-Z)=\boldsymbol{A}(M_1+M_2)=0,$$

由此可得

$$\boldsymbol{A}(M_1)=\boldsymbol{A}(-M_2),$$

接着根据定理2可得

$$\langle\boldsymbol{A}(M_1),\boldsymbol{A}(-M_2)\rangle\leqslant\delta_{2r}\|M_1\|_F\|M_2\|_F,$$

根据公式(1)可知

$$\|M_1\|_F^2\leqslant\frac{1}{1-\delta_{2r}}\|\mathbf{A}(M_1)\|_2^2=\frac{1}{1-\delta_{2r}}|\langle\boldsymbol{A}(M_1),\boldsymbol{A}(-M_2)\rangle|\leqslant\frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\|M_1\|_F\|M_2\|_F,$$

即

$$\|M_1\|_F\leqslant\frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\|M_2\|_F,$$

根据公式(5),(6)可知

$$\|M_1\|_\infty\leqslant\|M_1\|_F\leqslant\|M_1\|_*\leqslant\sqrt{r}\|M_1\|_F\leqslant r\|M_1\|_\infty,$$

$$\|M_2\|_\infty\leqslant\|M_2\|_F\leqslant\|M_2\|_*\leqslant\sqrt{n-r}\|M_2\|_F\leqslant(n-r)\|M_2\|_\infty,$$

据此继续进行推导可得

$$\|M_1\|_F\leqslant\frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\|M_2\|_F\leqslant\frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\|M_2\|_*\leqslant\frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\|M\|_*.$$

若要使公式(10)成立,那么就要有

$$\frac{\delta_{2r}}{1-\delta_{2r}}\leqslant\frac{1}{2},$$

可得 δ_{2r} 需要满足条件

$$\delta_{2r} \leqslant \frac{1}{3}.$$

这便是新定理 1 成立的条件,结论得证.

新定理 3　假设映射 $\boldsymbol{A}:\mathbf{C}^{n_1\times n_2}\to\mathbf{C}^m$ 的限制等距常数满足 $\delta_{2r}<0.6246$. 那么,对于 $X\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2}$ 以及某个 $\eta\geqslant 0$,假设 $y=\boldsymbol{A}(X)+e$ 并且 $\|e\|_2\leqslant\eta$,二次约束核范数极小化问题(8)的解 $X^{\#}$ 与 X 的近似误差为

$$\|X-X^{\#}\|_F \leqslant \frac{C}{\sqrt{r}}\sum_{\ell=r+1}^{n}\sigma_\ell(X)+D\eta,$$

其中常数 $C,D>0$ 仅仅依赖于 ρ 和 τ.

证明该定理时需要以下新定理辅助证明,这里给出该新定理.

新定理 4　若映射 $\boldsymbol{A}:\mathbf{C}^{n_1\times n_2}\to\mathbf{C}^m$ 的 r 阶秩限制等距常数遵循 $\delta_{2r}<0.6246$. 那么就称映射 $\boldsymbol{A}$ 满足秩 r 的 Frobenius 鲁棒零空间性质(与 $\|\cdot\|=\|\cdot\|_2$ 相关),其中常数 $0<\rho<1$ 以及 $\tau>0$ 仅仅取决于 δ_{2r}.

证明　这里需要寻找合适的常数 $0<\rho<1$ 以及 $\tau>0$. 对于秩为 r 的 $\forall M\in\ker\boldsymbol{A}\setminus\{0\}$,根据定义 3 可得

$$\|M_1\|_F \leqslant \frac{\rho}{\sqrt{r}}\|M_2\|_* + \tau\|A(M)\|,$$

由于矩阵 M 的秩为 r,根据线性映射的限制等距性质并取 $|t|\leqslant\delta_r$ 可得

$$\|\boldsymbol{A}(M_1)\|_2^2=(1+t)\|M_1\|_F^2\leqslant(1+\delta_r)\|M_1\|_F^2, \tag{11}$$

由于 $M_2=M-M_1$,继续推导可得

$$\langle\boldsymbol{A}(M_1),\boldsymbol{A}(M_2)\rangle\leqslant\sqrt{\delta_{2r}^2-t^2}\|M_1\|_F\|M_2\|_F, \tag{12}$$

这里首先单位化矩阵 M_1 以及 M_2,即

$$U:=\frac{M_1}{\|M_1\|_F},\ W:=e^{i\theta}\frac{M_2}{\|M_2\|_F},$$

θ 的取值应该使得 $|\langle\boldsymbol{A}(U),\boldsymbol{A}(W)\rangle|\leqslant\mathrm{Re}[\mathrm{A(U)},\mathrm{A(W)}]$. 设两个实数 $\alpha,\beta\geqslant 0$ 使得

$$2|\langle\boldsymbol{A}(U),\boldsymbol{A}(W)\rangle|=\frac{1}{\alpha+\beta}[\|\boldsymbol{A}(\alpha U+W)\|_2^2-\|\boldsymbol{A}(\beta U-W)\|_2^2-(\alpha^2-\beta^2)\mathrm{A(U)}_2^2]\leqslant$$

$$\frac{1}{\alpha+\beta}[(1+\delta_{2r})\|\alpha U+W\|_F^2-(1-\delta_{2r})\|\beta U-W\|_F^2-(\alpha^2-\beta^2)(1+t)\|U\|_F^2]=$$

$$\frac{1}{\alpha+\beta}[(1+\delta_{2r})(\alpha^2+1)-(1-\delta_{2r})(\beta^2+1)-(\alpha^2-\beta^2)(1+t)]=$$

$$\frac{1}{\alpha+\beta}[\alpha^2(\delta_{2r}-t)+\beta^2(t+\delta_{2r})+2\delta_{2r}].$$

根据以上推导可以取 $\alpha=\dfrac{\delta_{2r}+t}{\sqrt{\delta_{2r}^2-t^2}}$ 并且 $\beta=\dfrac{\delta_{2r}-t}{\sqrt{\delta_{2r}^2-t^2}}$,可得

$$2|\langle\boldsymbol{A}(U),\boldsymbol{A}(W)\rangle|\leqslant\frac{\sqrt{\delta_{2r}^2-t^2}}{2\delta_{2r}}[\delta_{2r}-t+t+\delta_{2r}+2\delta_{2r}]=2\sqrt{\delta_{2r}^2-t^2},$$

接下来证明公式(12). 首先观察

$$\|\boldsymbol{A}(M_1)\|_2^2=\langle\boldsymbol{A}(M_1),\boldsymbol{A}(M-M_2)\rangle=\langle\boldsymbol{A}(M_1),\boldsymbol{A}(M)\rangle-\langle\boldsymbol{A}(M_1),\boldsymbol{A}(M_2)\rangle\leqslant$$

$$\|\boldsymbol{A}(M_1)\|_2\|\boldsymbol{A}(M)\|_2+\sqrt{\delta_{2r}^2-t^2}\|M_1\|_F\|M_2\|_F=\sqrt{1+t}\|M_1\|_F\|\boldsymbol{A}(M)\|_2+\sqrt{\delta_{2r}^2-t^2}\|M_1\|_F\|M_2\|_F=$$

$$\|M_1\|_F\left(\sqrt{1+t}\|\boldsymbol{A}(M)\|_2+\sqrt{\delta_{2r}^2-t^2}\|M_2\|_F\right),$$

其中 $\|M_2\|_F$ 可以用引理 1 中的公式(9)放大可得

$$\|M_2\|_F=\left(\sum_{\ell=r+1}^{n}\sigma_\ell^2(M)\right)^{1/2}\leqslant\frac{\sum\limits_{\ell=r+1}^{n}\sigma_\ell(M)}{\sqrt{r}}+\frac{\sqrt{r}}{4}(\sigma_1(M)-\sigma_r(M))\leqslant$$

$$\frac{\|M_2\|_*}{\sqrt{r}}+\frac{\sqrt{r}}{4}\left(\sum_{\ell=1}^{r}\sigma_\ell(M)^2\right)^{1/2}=\frac{\|M_2\|_*}{\sqrt{r}}+\frac{1}{4}\|M_1\|_F.$$

结合以上结果,并将$\mathrm{A}(\mathrm{M}_1)_2^2$用公式(11)取代可得

$$(1+t)\|M_1\|_F\leqslant\sqrt{1+t}\|AM\|_2+\frac{\sqrt{\delta_{2r}^2-t^2}}{\sqrt{r}}\|M_2\|_*+\frac{\sqrt{\delta_{2r}^2-t^2}}{4}\|M_1\|_F\leqslant$$

$$(1+t)\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\|AM\|_2+\frac{\delta_{2r}}{\sqrt{r}\sqrt{1-\delta_{2r}^2}}\|M_2\|_*+\frac{\delta_{2r}}{4\sqrt{1-\delta_{2r}^2}}\|M_1\|_F\right),\tag{13}$$

这里选择不等式$\frac{\sqrt{\delta_{2r}^2-t^2}}{(1+t)}\leqslant\frac{\delta_{2r}}{\sqrt{1-\delta_{2r}}}$,接着在不等式(13)两边同时除$1+t$,并运用不等式$\frac{1}{\sqrt{1+t}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\delta_{2r}}}$,移项重排可得

$$\|\mathrm{M}_1\|_\mathrm{F}\leqslant\frac{\sqrt{1+\delta_{2\mathrm{r}}}}{\sqrt{1-\delta_{2\mathrm{r}}^2}-\frac{\delta_{2\mathrm{r}}}{4}}\|\boldsymbol{A}(M)\|_2+\frac{\delta_{2r}}{\sqrt{1-\delta_{2r}^2}-\frac{\delta_{2r}}{4}}\frac{\|M_2\|_*}{\sqrt{r}},$$

由于

$$\rho:=\frac{\delta_{2r}}{\sqrt{1-\delta_{2r}^2}-\frac{\delta_{2r}}{4}}<1,$$

解得$\delta_{2r}<0.624\,6$. 这便是使得新定理 4 成立的条件,新定理 4 得证.

接下来开始证明新定理 3.

证明(新定理 3) 当限制等距常数$\delta_{2r}<0.624\,6$时,根据新定理 4 可知映射 A 满足秩 r 的 Frobenius 鲁棒零空间性质(与$\|\cdot\|=\|\cdot\|_2$相关),其中常数$0<\rho<1$以及$\tau>0$仅仅取决于δ_{2r}. 接着根据预备知识中定理 3 可得新定理 3 的结论成立.

3 结语

文章主要是证明得出了针对两类低秩矩阵恢复模型的误差估计定理,其中新定理 1 和新定理 2 为无噪恢复模型的误差估计定理,成立的条件为限制等距常数满足$\delta_{2r}<1/3$. 限制等距常数的界新定理 3 和新定理 4 为有噪恢复模型的误差估计定理,成立的条件为限制等距常数满足$\delta_{2r}<0.624\,6$.

参考文献:

[1] CANDÈS EJ, PLAN Y. Tight oracle inequalities for low－rank matrix recovery from a minimal number of noisy random measurements[J]0IEEE Transactions on Information Theory,2011,57(4):2342－2359.

[2] KABANAVA M,KUENG R,RAUHUT H,et al. Stable low－rank matrix recovery via null space properties[J]. A Journal of the IMA,2016,5(4):405－441.

[3] LAI M J,LIU Y,LI S,et al. On the Schatten p－quasi－norm minimization for low－rank matrix recovery[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis,2021,51(2):157－170.

[4] WANG H M,LI S. The bounds of restricted isometry constants for low rank matrices recovery[J]. SCIENCE CHINA Mathematics,2013,56(6):1117－1127.

[5] T. TONG CAI, ANRU ZHANG. ROP:Matrix recovery via rank－one projections[J]. The Annals of Statistics,2015,43(1):102－138.

[6] SIMON FOUCART,HOLGER RAUHUT. A mathematical introduction to compressive sensing [M]. Springer Science:Business Media New York,2013.

[7] 衡东县博文苑文化传媒工作室. 矩阵 Schatten－p 范数及其性质[DB/OL]. https://www.docin.com/p－2496294412.html. 2020－11－12.

(下转第 410 页)