云南民族大学学报(自然科学版),2024,33(2):266 - 270　　CN 53 - 1192/N　ISSN 1672 - 8513
doi:10.3969/j.issn.1672 - 8513.2024.02.016　　http://ynmz.cbpt.cnki.net

极大类 p 群的非线性非忠实不可约特征标个数

王　雪,李亚利
(云南民族大学 数学与计算机科学学院,云南 昆明 650500)

摘要: 利用极大类 p 群的性质以及有限群的特征标理论探究了极大类 p 群 G 的非线性非忠实不可约特征标的个数. 证明了 p^n 阶的极大类 p 群 G 的非线性非忠实不可约特征标的个数等于 p^{n-1} 阶的极大类 p 群 $G/Z(G)$ 的非线性不可约特征标的个数. 特别地,分析了只有 3 个非线性非忠实不可约特征标的有限 p 群的性质.

关键词: 极大类 p 群;非线性不可约特征标;非忠实不可约特征标
中图分类号: O152　**文献标志码:** A　**文章编号:** 1672 - 8513(2024)02 - 0266 - 05

本文考虑的群都是有限群. 设 G 是有限群,符号 $Irr(G)$ 表示群 G 的所有不可约特征标的集合,$Irr_1(G)$ 表示群 G 的所有非线性不可约特征标的集合,$N(G)=\{N \mid G' \subseteq N \trianglelefteq G\}$, $\mathrm{Kern}(G)=\{\ker\chi \mid \chi\in Irr_1(G)\}$. 若 G 是幂零群,则 $c(G)$ 表示群 G 的幂零类. 本文中的 p 均是素数. 其它符号都是标准的,可以参阅文献[1].

群 G 的任意一个正规子群是 G 的一些不可约特征标的核的交,所以群的不可约特征标核的研究对于探究群的结构和性质有着十分重要的意义. 近年来,从群的非线性不可约特征标到非线性非忠实不可约特征标的研究中取得了一些进展. 文献[9]考察了只有 1 个非线性不可约特征标的有限群;文献[6]研究了素数幂阶的有限群的特征标的核,并得到了十分有用的结论,例如下文中的引理 5[6];文献[8]研究了只有 1 个非线性非忠实不可约特征标的有限群,证明了幂零类为 3 的 16 阶群是唯一一类具有 1 个非线性非忠实不可约特征标的 p 群;文献[10]分类了恰有 2 个非线性非忠实不可约特征标的有限 p 群;文献[5]研究了只含有 2 个非线性非忠实不可约特征标的有限群的性质;文献[4]探究了只有 3 个非线性非忠实不可约特征标的有限 p 群的结构.

有限 p 群在群论研究中具有重要地位,而有限 p 群中的极大类 p 群有最少可能的正规子群,这使得极大类 p 群在 p 群中的地位与单群在有限群中的地位类似,所以极大类 p 群有很大的研究价值. 我们回忆下极大类 p 群的定义:

定义 1　令 G 为 p^n 阶群,$n\geqslant 3$ 且 n 为整数. 称群 G 为极大类 p 群,如果 G 的幂零类 $c(G)=n-1$.

近来,在文献[3]中,李璞金、张勤海等学者继续深入研究了非线性非忠实不可约特征标对 p 群结构的影响. 可以从文献[3]中得到 K(m,n) - 群的定义:

定义 2[3]　称有限群 G 为 K(m,n) - 群,如果 $|\mathrm{Kern}(G)|=m$, $|N(G)|=n$.

本文继续探究极大类 p 群的非线性非忠实不可约特征标的个数. 我们得到了 p^n 阶极大类 p 群 G 的非线性非忠实不可约特征标的个数等于 p^{n-1} 阶极大类 p 群 $G/Z(G)$ 的非线性不可约特征标的个数. 具体本文的主要结论可见下述的定理部分.

1　预备引理

近年来,有很多的学者利用不同的证明方法对有限非交换群的非线性不可约特征标核的交的情况进行

收稿日期: 2021 - 12 - 12.
基金项目: 国家自然科学基金(12201553,11861078);云南民族大学教学研究项目(2022JG - 032).
作者简介: 王雪(1995 -),女,硕士研究生. 主要从事有限群及其表示论研究.
通信作者: 李亚利(1984 -),女,博士,讲师. 主要从事有限群及其表示论研究.

了研究,得到了如下结论:

引理 1[6]　设 G 是有限非交换群,K 是 $\mathrm{Kern}(G)$ 的所有元素的交,那么 $K=1$.

引理 2[3]　设 G 是有限 p-群,$m\geqslant 2$. 则 G 是 $\mathrm{K}(\mathrm{m},\mathrm{m})$-群当且仅当 G 是 p^{m+2} 阶的极大类群.

得到极大类 p 群 G 的非线性不可约特征标核的个数后,还需要进一步探究这些核的具体结构,这时极大类 p 群的性质就极为重要. 从文献[2]中可以得到如下极大类 p 群的性质:

引理 3[2]　设 G 为 p^n 阶极大类群,则

(1) $|G/G'|=p^2$, $G'=\Phi(G)$ 且 $d(G)=2$;

(2) $|G_i/G_{i+1}|=p$, $i=2,3,\cdots,n-1$;

(3) 对 $i\geqslant 2$, G_i 是 G 中唯一的 p^{n-i} 阶正规子群;

(4) 如果 $N\trianglelefteq G$, $|G/N|\geqslant p^2$,那么 G/N 亦为极大类 p 群;

(5) 对于 $0\leqslant i\leqslant n-1$,有 $Z_i(G)=G_{n-i}$;

(6) 对于 $p>2$, $n>3$, G 中不存在 p^2 阶循环正规子群.

由引理 3 可以进一步得到:

引理 4[2]　p^n 阶极大类 p 群 G 除了有 $(p+1)$ 个极大子群是正规子群外,对每个阶 $p^i(i<n-1)$ 都只有一个正规子群.

集合 $\mathrm{Kern}(G)=\{\ker\chi\,|\,\chi\in Irr_1(G)\}$ 的性质对于本文主要结论的证明起着非常重要的作用.

引理 5[6]　设 G 是有限非交换 p 群. 则下列的陈述是等价的:

(1) $\mathrm{Kern}(G)$ 是一个具有包含关系的链.

(2) G 是下列群之一:

(2.1) G' 是 G 的唯一的极小正规子群.

(2.2) G 是极大类群.

(3) 如果 $N\trianglelefteq G$ 且 $N<G'$,则 $\mathrm{N}\in\mathrm{Kern}(G)$.

(4) $\mathrm{Kern}(G)\subseteq N(G)$ 且 $N(G)=\{\bigcap\limits_{H\in\mathrm{T}}H\,|\,\mathrm{T}\subseteq\mathrm{Kern}(G)\}$.

引理 6　设 G 是 p^n 阶极大类 p 群,则 $Z(G)$ 是 G 的唯一的 p 阶正规子群.

证明　因为群 G 是极大类 p 群,所以 G 的幂零类 $c(G)=n-1$,从而有上中心群列:

$1=\mathrm{Z}_0(\mathrm{G})\leqslant\mathrm{Z}_1(\mathrm{G})=\mathrm{Z}(\mathrm{G})\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{Z}_{\mathrm{n}-1}(\mathrm{G})=\mathrm{G}$

及下中心群列:

$$G=G_1\geqslant G_2=G'\geqslant\cdots\geqslant G_n=1.$$

由引理 3(5) 可以得到 $Z(G)=G_{n-1}$,由引理 3(2) 有 $|G_{n-1}/G_n|=p$. 注意到 $G_n=1$,所以 $|Z(G)|=|G_{n-1}|=p$,因此 $Z(G)$ 为群 G 的 p 阶正规子群. 由引理 4 知 p 阶正规子群唯一. 故引理得证.

2　结论和证明

定理 1　p^4 阶的极大类 p 群 G 有 p^2-1 个非线性不可约特征标,其中非线性非忠实不可约特征标的个数是 $p-1$.

证明　设 G 是 p^4 阶的极大类 p 群. 由引理 2 知 G 是 $\mathrm{K}(2,2)$-群,即 $|\mathrm{Kern}(G)|=|N(G)|=2$. 由引理 6 知 $Z(G)$ 是 G 的唯一的 p 阶正规子群. 由引理 3(1) 有 $|G'|=p^2$,所以 $Z(G)<G'$,由引理 5 知 $Z(G)\in\mathrm{Kern}(G)$. 因为 $Z(G)$ 循环,所以 $1\in\mathrm{Kern}(G)$. 则有

$$\mathrm{Kern}(G)=\{1,Z(G)\}=N(G).$$

因为 $|G:G'|=p^2$,所以 G 有 p^2 个线性特征标. 又因为 $|G|=\sum\limits_{\chi\in Irr(G)}\chi(1)^2=p^4$,所以有

$$\sum_{\chi\in Irr_1(G)}\chi(1)^2=p^4-p^2=p^2(p^2-1).$$

设 $\chi_i\in Irr_1(G)$,其中 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$, $m\geqslant 2$,因为 $\chi_i(1)\,|\,|G|$,所以 $\chi_i(1)\in\{p,p^2,p^3\}$,从而有

$$\chi_1(1)^2+\chi_2(1)^2+\cdots+\chi_m(1)^2=p^4-p^2.\tag{1}$$

记$\chi_i(1)=px_i$,其中 $x_i\in\{1,p,p^2\}$. 则由(1)式可得:

$$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_m{}^2=p^2-1<p^2. \tag{2}$$

通过(2)式可知 $x_i=1$, $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 所以$\chi_i(1)=p$ 对于任意的 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$. 从而有 $mp^2=p^4-p^2$,则 $m=p^2-1$,所以 G 有 p^2-1 个非线性不可约特征标.

不妨记$\overline{G}=G/Z(G)$. 由[1,Lemma 2.22]知$\chi\in Irr_1(G)$当且仅当$\hat{\chi}\in Irr_1(\overline{G})$,其中$\hat{\chi}(Z(G)g)=\chi(g)$. 设$\chi\in Irr_1(G)$且 $\ker\chi\neq1$,因为 $\mathrm{Kern}(G)=\{1,Z(G)\}=N(G)$,所以 $\ker\chi=Z(G)$,从而有$\hat{\chi}\in Irr_1(\overline{G})$. 由此可知 G 的非线性非忠实不可约特征标的个数等于$\overline{G}$的非线性不可约特征标的个数.

接下来考虑$\overline{G}$. 由引理 3(4)知$\overline{G}$为 p^3 阶极大类 p 群且$\overline{G}$非交换. 因为$\overline{G}$是 p^3 阶极大类群,所以$|\overline{G}:(\overline{G})'|=p^2$,$\overline{G}$有 p^2 个线性不可约特征标且$|(\overline{G})'|=p$,由引理 4 知$(\overline{G})'$是$\overline{G}$的唯一的 p 阶正规子群,此时 $Z(\overline{G})=(\overline{G})'$,所以 $N(\overline{G})=\{\overline{1}\}$,又因为$\overline{G}$非交换且 $\mathrm{Kern}(\overline{G})\subseteq N(\overline{G})$,从而有

$$\mathrm{Kern}(\overline{G})=N(\overline{G})=\{\overline{1}\}.$$

如果设$\hat{\chi}_j\in Irr_1(\overline{G})$,$j\in\{1,2,\cdots n\}$,$n\geqslant1$,对于群$\overline{G}$用同上的方法,可以得到:

$$\hat{\chi}_1(\overline{1})^2+\hat{\chi}_2(\overline{1})^2+\cdots+\hat{\chi}_n(\overline{1})^2=p^2(p-1). \tag{3}$$

从而$\forall j$,$\hat{\chi}_j(\overline{1})=p$,故 $np^2=p^2(p-1)$,即 $n=p-1$. 由此可知$\overline{G}$有$(p-1)$个非线性不可约特征标,则 G 的非线性非忠实不可约特征标的个数为 $p-1$. 定理得证.

注意,当 $p=2$ 时,由定理 1 的结论可以知道,p^4 阶极大类 p 群 G 有 3 个非线性不可约特征标. 由文献[2,定理2.5.3]知 2^4 阶的极大类 p 群同构于 16 阶二面体群、16 阶广义四元数群、16 阶半二面体群,则这三类群有 3 个非线性不可约特征标,这与文献[7,Chapter 31,§5,Theorem 9(e)]的结论一致. 进一步地,又由定理 1 得到,G 的非线性非忠实不可约特征标的个数是 1,而这与文献[8,corollary 2.4]的结论一致.

推论 1 设有限 p 群 G 只有 3 个非线性非忠实不可约特征标χ_1,χ_2,χ_3,则满足条件 $\ker\chi_1=\ker\chi_2=\ker\chi_3\neq1$ 的群 G 不存在.

证明 设有限 p 群 G 只有 3 个非线性非忠实不可约特征标χ_1,χ_2,χ_3,若 $\ker\chi_1=\ker\chi_2=\ker\chi_3\neq1$,则由引理 1 可知 G 存在忠实不可约特征标. 所以$|\mathrm{Kern}(G)|=2$,$|N(G)|=2$,因此 G 是 $\mathrm{K}(2,2)-$群. 从而由引理 2 知 G 是 p^4 阶的极大类群. 但由定理 1 知 G 不可能恰有 3 个非线性非忠实不可约特征标. 矛盾.

从定理 1 的证明过程可以得到:

推论 2 p^3 阶极大类 p 群有$(p-1)$个非线性不可约特征标,且所有非线性不可约特征标均忠实.

至此 p^3 阶和 p^4 阶的极大类 p 群的非线性非忠实不可约特征标的个数已经确定,接下来探究 p^5 阶极大类 p 群的非线性非忠实不可约特征标的个数.

定理 2 p^5 阶极大类 p 群 G 有 p^2-1 个非线性非忠实不可约特征标.

证明 设 G 是 p^5 阶极大类 p 群. 由引理 2 知 G 是 $\mathrm{K}(3,3)-$群,即$|\mathrm{Kern}(G)|=3$,$|N(G)|=3$. 设$\chi_i\in Irr_1(G)$,其中 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$,$m\geqslant3$. 由引理 6 知 $Z(G)$是 G 的唯一的 p 阶正规子群,由引理 3(3)知 G'是 G 的唯一的 p^3 阶正规子群,所以 $Z(G)<G'$,进而有

$$N(G)=\{1,Z(G),N\}=\mathrm{Kern}(G),$$

其中 N 是 G 的 p^2 阶正规子群. 由引理 3(4)知 $G/Z(G)\triangleq\overline{G}$是 p^4 阶极大类 p 群. 由[1,Lemma 2.22]知$\chi\in Irr_1(G)$当且仅当$\hat{\chi}\in Irr_1(\overline{G})$,其中$\hat{\chi}(Z(G)g)=\chi(g)$. 设$\chi\in Irr_1(G)$,且 $\ker\chi\neq1$,由 $\mathrm{Kern}(G)=\{1,Z(G),N\}$,知 $\ker\chi=Z(G)$或 $\ker\chi=N$,所以$\hat{\chi}\in Irr_1(\overline{G})$. 由此可知 G 的非线性非忠实不可约特征标的个数等于$\overline{G}$的非线性不可约特征标的个数. 由定理 1 知$\overline{G}$有 p^2-1 个非线性不可约特征标,所以 G 有 p^2-1 个非线性非忠实不可约特征标. 定理 2 得证.

文献[4]中,作者给出了结论:设有限 $p-$群 G 只有 3 个非线性非忠实不可约特征标χ_1,χ_2,χ_3,记 $\mathrm{Ker}\,\chi_i$

$=K_i, i=1,2,3$. 若 $K_i \cap K_j = 1$，其中 $i,j\in\{1,2,3\}$，则当且仅当 G 是 2^{2m} 阶特殊 2－群，其中 m 是正整数，$z_1 = |\{x\in G \mid |G:C_G(x)| = p\}| = 0$，以及 $Z(G)=C_2\times C_2$. 由此本文得到下列结论：

推论 3　设有限 p 群 G 只有 3 个非线性非忠实不可约特征标 χ_1,χ_2,χ_3，并且 $\ker\chi_i=\ker\chi_j\neq\ker\chi_k$，$\ker\chi_i\cap\ker\chi_k=\ker\chi_i$ 或 $\ker\chi_i\cap\ker\chi_k=\ker\chi_k$，其中 $i,j,k\in\{1,2,3\}$. 则当且仅当 G 是 2^5 阶的极大类 2 群.

证明 必要性：设有限 p 群 G 只有 3 个非线性非忠实不可约特征标 χ_1,χ_2,χ_3，若

$$\ker\chi_i=\ker\chi_j\neq\ker\chi_k,$$

且

$$\ker\chi_i\cap\ker\chi_k=\ker\chi_i \text{ 或 } \ker\chi_i\cap\ker\chi_k=\ker\chi_k,$$

则有

$$\ker\chi_i\cap\ker\chi_k\cap\ker\chi_j\neq 1.$$

于是由引理 1 知 G 存在非线性忠实不可约特征标，所以 $|\mathrm{Kern}(G)|=3$，进而有 $|N(G)|=3$，因此得到 G 是 K(3,3)－群. 又由引理 2 知 G 是 p^5 阶极大类群. 注意到 G 只有 3 个非线性非忠实不可约特征标，结合定理 2 可得 G 有 p^2-1 个非线性非忠实不可约特征标，故得到 $p^2-1=3$，得证 $p=2$.

充分性：若 G 是 2^5 阶的极大类 2 群，由定理 2 知 G 恰有 3 个非线性非忠实不可约特征标，且有

$$N(G)=\{1,Z(G),N\}=\mathrm{Kern}(G),$$

其中 N 为 G 的 2^2 阶正规子群. 于是对任意的 $\chi\in Irr_1(G)$ 且 $\ker\chi\neq 1$，则 $\ker\chi=Z(G)$ 或 $\ker\chi=N$. 又因为 $Z(G)$ 是群 G 的唯一极小正规子群，所以 $Z(G)\leqslant N$. 故定理充分性得证.

由定理 1 和定理 2 可以进一步得到：

定理 3　p^n 阶极大类 p 群 G 的非线性非忠实不可约特征标的个数等于 p^{n-1} 阶极大类 p 群 $\overline{G}=G/Z(G)$ 的非线性不可约特征标的个数，其中 $n\geqslant 4$. 且 G 的非线性不可约特征标的核具有包含关系，即若 $\chi_i,\chi_j\in Irr_1(G)$，则 $\ker\chi_i\subseteq\ker\chi_j$.

证明　设 G 为 p^n 阶极大类 p 群，由引理 6 可知 $Z(G)$ 是 G 的唯一的 p 阶正规子群. 由引理 4 知 p^i 阶正规子群唯一，其中 $i<n-1$，所以 G' 是 G 的唯一的 p^{n-2} 阶正规子群. $\forall N\trianglelefteq G$，若 $|N|\geqslant|G'|=p^{n-2}$，则 $G'\leqslant N$，从而 $N\notin N(G)$. 故利用引理 2 得到 G 是 $K(n-2,n-2)$－群，即

$$|\mathrm{Kern}(G)|=|N(G)|=n-2.$$

又因为 $\mathrm{Kern}(G)\subseteq \mathrm{N}(G)$，所以有

$$\mathrm{Kern}(G)=N(G)=\{N_1=1,N_2=Z(G),N_3,\cdots,N_{n-2}\},$$

其中 $|N_i|=p^{i-1}, i\in\{1,2,\cdots,n-2\}$，且 $N(G)$ 中的所有元素组成一个具有包含关系的链. 由引理 3(4) 知 $G/Z(G)\triangleq\overline{G}$ 是 p^{n-1} 阶极大类 p 群. 由[1, Lemma 2.22]知 $\chi\in Irr_1(G)$ 当且仅当 $\hat{\chi}\in Irr_1(\overline{G})$，其中 $\hat{\chi}(Z(G)g)=\chi(g)$. 设 $\chi\in Irr_1(G)$，且 $\ker\chi\neq 1$，则 $\mathrm{Z(G)}\subseteq\ker\chi$，从而 $\hat{\chi}\in Irr_1(\overline{G})$，所以 G 的非线性非忠实不可约特征标是 $\overline{G}$ 的非线性不可约特征标，故 G 的非线性非忠实不可约特征标的个数等于 $\overline{G}$ 的非线性不可约特征标的个数. 综上定理 3 得证.

对于只有 3 个非线性非忠实不可约特征标 χ_1,χ_2,χ_3 的有限 p－群 G，推论 1 考虑了 $\ker\chi_1=\ker\chi_2=\ker\chi_3\neq 1$ 的情况；推论 3 考虑了 $\ker\chi_i=\ker\chi_j\neq\ker\chi_k$，且 $\ker\chi_i\cap\ker\chi_k=\ker\chi_i$ 或 $\ker\chi_i\cap\ker\chi_k=\ker\chi_k$ 的情况；接下来考虑 $\ker\chi_i\subset\ker\chi_j\subset\ker\chi_k$ 的情况.

推论 4　设有限 p 群 G 只有 3 个非线性非忠实不可约特征标 χ_1,χ_2,χ_3，则满足条件 $\ker\chi_i\subset\ker\chi_j\subset\ker\chi_k$ 的群 G 不存在，其中 $i,j,k\in\{1,2,3\}$.

证明　设有限 p 群 G 只有 3 个非线性非忠实不可约特征标 χ_1,χ_2,χ_3. 若存在 $i,j,k\in\{1,2,3\}$，使得 $\ker\chi_i\subset\ker\chi_j\subset\ker\chi_k$ 成立，则有

$$\ker\chi_i\cap\ker\chi_j\cap\ker\chi_k=\ker\chi_i\neq 1.$$

所以 G 存在忠实不可约特征标，从而 $|\mathrm{Kern}(G)|=4$，$|N(G)|=4$. 于是根据引理 2 得，G 是 p^6 阶极大类 p 群.

再由定理3可知 G 的非线性非忠实不可约特征标的个数等于 p^5 阶极大类 p 群 $G/Z(G)$ 的非线性不可约特征标的个数. 而利用定理2得, p^5 阶极大类 p 群的非线性不可约特征标的个数一定大于 p^2-1. 于是得到 $3>p^2-1$,这是不可能的. 推论得证.

参考文献:

[1] ISAACS I M. Character theory of finite groups[M]. New York: Academic Press,1976.

[2] 徐明曜,曲海鹏. 有限p群[M]. 北京:北京大学出版社,2010.9.

[3] Li P,REN D,ZHANG Q. Finite p - groups with few kernels of nonlinear irreducible characters[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2023, 18: 65 - 80.

[4] 李亚利. 只有3个非线性非忠实不可约特征标的有限p-群[J]. 云南民族大学学报(自然科学版),2018,27(4): 294 - 296.

[5] 李亚利,王雪. 含有2个非线性非忠实不可约特征标的有限群的若干性质[J]. 云南民族大学学报(自然科学版),2020,29(6): 565 - 567.

[6] QIAN G,WANG Y. A note on character kernels in finite groups of prime power order[J]. Archiv der Mathematik, 2008(90): 193 - 199.

[7] BERKOVICH G YA,ZHMUD M E. Characters of finite groups,Part 2[M]. American Mathematical Society,1997.

[8] IRANMANESH A,SAEIDI A. Finite groups with a unique nonlinear nonfaithful irreducible character[J]. Archivum Mathematicum,2011, 47(2):91 - 98.

[9] SEITZ G M. Finite groups having only one irreducible representation of degree greater than one[J]. Proceedings of American Mathematical Society,1968,(19):459 - 461.

[10] LI Y,CHEN X,LI H. Finite p - groups with exactly two nonlinear non - faithful irreducible characters[J]. Czeehoslovk Mathematical Journal, 2019,69(144):173 - 181.

The number of nonlinear non - faithful irreducible character of p - group of maximal class

WANG Xue,LI Ya-li

(School of Mathematics and Computer Science,Yunnan Minzu University,Kunming 650500,China)

Abstract: In This paper,we studied the number of nonlinear non - faithful irreducible characters of p - group G of maximal class,by using the properties of p - group of maximal class and character theory of finite groups. It is proved that the number of nonlinear non - faithful irreducible characters of p - group G of maximal class of order p^n equal the number of nonlinear irreducible characters of p - group $G/Z(G)$ of maximal class of order p^{n-1}. In particular,the properties of finite groups with exactly three nonlinear non - faithful irreducible characters are analyzed.

Key words: p - group of maximal class; nonlinear irreducible character; non - faithful irreducible character

(责任编辑 杨柱元)