

单边MOEWMA CV控制图及其在合金烧结工艺中的应用

胡雪龙, 夏凡, 张素颖

(南京邮电大学 管理学院, 江苏 南京 210009)

摘要: 在部分金融、纺织及工业过程中, 当过程均值 μ 或标准差 σ 发生变化时, 两个总体参数仍存在固定的比例关系, 此时过程处于统计受控状态。针对该类过程, 难以采用传统的均值 \bar{X} 或方差 S^2 控制图对过程进行监控和分析, 而变异系数(Coefficient of Variation, CV)控制图可以有效解决这一问题。为了改进指数加权移动平均(Exponentially Weighted Moving Average, EWMA) CV控制图的性能, 本文利用相邻时刻样本CV值的波动, 并调节该波动在整个监控统计量中的权重, 提出了一种单边改进型EWMA (Modified EWMA, MOEWMA)控制图来监控过程CV。由于提出的监控统计量结构的复杂性, 本文基于 10^4 次重复仿真实验, 采用蒙特卡罗方法模拟分析所提出的控制图的运行链长(Run Length, RL)性能。针对不同的参数组合, 采用二分法思想计算相应的控制限, 且对不同的参数偏移量, 计算所有满足 ARL_0 约束的参数组合 (λ, K) 及相应的 ARL_1 值, 并找出 ARL_1 值最小时对应的 (λ^*, K^*) , 即控制图的最优参数组合。基于设计的控制图参数, 本文模拟并比较了MOEWMA CV控制图与EWMA CV控制图的性能。结果表明, 针对过程参数向下偏移(如 $\tau \in \{0.5, 0.65, 0.8, 0.9\}$), 以及参数向上的较小(如 $\tau=1.1$)、中等(如 $\tau \in \{1.25, 1.5\}$)偏移情形, 本文提出的MOEWMA CV控制图均优于传统的单边EWMA CV控制图。最后, 在合金烧结工艺过程监控的实际应用中验证了所提出的MOEWMA CV控制图的性能优势。

关键词: EWMA; MOEWMA; 变异系数; 蒙特卡罗仿真; 运行链长

中图分类号: TB114.2 **文献标识码:** A **doi:** 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2023.07.0015

引用格式: 胡雪龙, 夏凡, 张素颖. 单边MOEWMA CV控制图及其在合金烧结工艺中的应用[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2025, 46(5): 601-610.

HU Xuelong, XIA Fan, ZHANG Suying. One-sided modified EWMA CV charts and its application in alloy sintering process[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2025, 46(5): 601-610.

One-Sided Modified EWMA CV Charts and Its Application in Alloy Sintering Process

HU Xuelong, XIA Fan, ZHANG Suying

(School of Management, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210009, China)

Abstract: In some financial, textile and industrial processes, when the process mean μ or standard deviation σ changes and there is a fixed proportional relationship, the process is still in-control. In these cases, it is difficult to use the traditional mean (\bar{X}) or variance (S^2) chart for the effective monitoring of the processes. Using control charts to monitor process Coefficient of Variation (CV) can solve this problem effectively.

收稿日期: 2023-07-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71802110, 72101123); 江苏省自然科学基金资助项目(BK20200750); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX23_0945)

作者简介: 胡雪龙(1988-), 男, 副教授, 博士, 主要从事质量管理的研究。E-mail: hxl0419@njupt.edu.cn.

tively. In order to improve the performance of existing Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) CV control chart, we considered the sample CV fluctuations at different times, and used coefficients to control the weight of the fluctuations in the monitoring statistic. A one-sided Modified EWMA (MOEWMA) control chart was proposed to monitor CV. Due to the complexity of the proposed monitoring statistic, based on 10^4 times simulations, this paper used Monte Carlo method to simulate the Run Length (RL). For different parameter combinations, the corresponding control limits were calculated by using the bisection algorithm. The optimal parameter combinations (λ, K) and the corresponding ARL_1 of the control chart were designed by satisfying the desired ARL_0 for different parameter changes. Based on the designed parameters, the ARL performance of MOEWMA CV control chart was simulated and compared with the EWMA CV chart. The simulation results show that the MOEWMA CV is superior to the EWMA CV control chart for downward changes ($\tau \in \{0.5, 0.65, 0.8, 0.9\}$) and upward small ($\tau = 1.1$) and medium ($\tau \in \{1.25, 1.5\}$) changes. Finally, the performance advantage of the proposed MOEWMA CV chart was verified in monitoring the actual alloy sintering process.

Key words: EWMA; MOEWMA; coefficient of variation; Monte Carlo simulation; run length

0 引言

随着生产工艺和客户需求的日益复杂,相应的产品质量管理方法也受到学界和业界的广泛关注。作为产品质量在线监控的重要手段,统计过程监控(Statistical Process Monitoring, SPM)借助数理统计方法控制过程的质量波动。控制图作为其重要工具之一,通过监控样本统计量的变化来判断产品质量特性分布模型的总体参数是否发生变化,进而判断过程状态,提高过程的效率和产品质量。传统 Shewhart 控制图能够快速检测出过程总体参数的较大偏移,而根据 Abid 等^[1]的研究,Shewhart 控制图仅利用了当前样本信息,其在监控过程参数的中等或较小偏移时效果不佳。为了改进这一缺陷,Page^[2]和 Roberts^[3]分别提出了累积和(Cumulative Sum, CUSUM)和指数加权移动平均(Exponentially Weighted Moving Average, EWMA)控制图。CUSUM 和 EWMA 控制图充分利用了当前及过去的样本信息,改进了 Shewhart 控制图对过程参数的较小、中等偏移的监控效果。由于 EWMA 型控制图的指数加权结构易于理解及操作,近年来相关研究受到学者们的持续关注。例如: Mitra 等^[4]设计了基于偏移信息未知情况下的自适应 EWMA 控制图; Li 等^[5]构建了一种新的非参数稳健自适应 EWMA 控制图;李龙辉等^[6]将手术中的操作因素作为分类协变量,在加权分数检验统计量的基础上,构建了考虑分类协变量的风险调整 EWMA 控制图;从经济

成本的角度,薛丽等^[7]对可变抽样区间和样本容量的非正态 EWMA 控制图进行了详细设计。

传统控制图的应用中,当总体参数(均值 μ 和标准差 σ)不变时,判断过程处于统计受控状态;当其中一个总体参数或两个总体参数同时发生变化时,判断过程处于统计失控状态。因此,传统控制图通过监控样本统计量(\bar{X} 或 S^2)的值来判断过程状态。随着控制图应用范围越来越广,传统均值(\bar{X})或方差(S^2)控制图已经不能满足产品质量监控的需求。例如:在金融业中,投资者往往更关注资产的实际收益与期望收益之间的波动,而不是均值 μ 或方差 σ^2 ,这一波动是衡量投资风险的一种指标(Khatun 等^[8]);在纺织行业中,为保证产品质量的稳定和可靠性,Chen 等^[9]指出制造商会密切关注尼龙纱延展率的离散系数(Coefficient of Variation, CV, $\gamma = \frac{\sigma}{\mu}$)的变化。在上述过程中,当参数 μ 或 σ 参数之间存在固定的比例关系(CV)时,过程仍然处于统计受控状态,此时可以采用控制图监控变异系数 CV 来判断过程状态。因此,近年来关于过程 CV 的监控问题研究受到学者们的关注。

关于 CV 监控的研究, Kang 等^[10]首先构建了 Shewhart 控制图来监控过程 CV 的偏移。与传统 Shewhart 型控制图类似,该控制图对过程 CV 的小偏移检测能力较弱。为了提高控制图对过程 CV 的小偏移的灵敏度,学者们陆续提出了几种 CV 控制图。例如, Castagliola 等^[11]研究了单边 EWMA 控制

图监控 CV 平方(EWMA- γ^2)的性能,并用马尔科夫链推导了控制图的性能指标,结果表明 EWMA- γ^2 控制图在各种 CV 偏移情况下都要优于 Shewhart CV 控制图; Zhang 等^[12]进一步改进了 EWMA- γ^2 控制图的结构,采用蒙特卡罗仿真模拟了其平均运行链长(Average Run Length, ARL)指标,结果表明提出的控制图对较小、中等偏移的检测能力优于 EWMA- γ^2 控制图; Tran 等^[13]研究了单边 CUSUM CV 控制图的性能,仿真结果表明 CUSUM CV 控制图的性能与 EWMA- γ^2 控制图的性能相当。基于前期 CV 控制图的研究,后续学者们又融合了变参数策略,如变样本容量(Variable Sample Size, VSS)和变采样间隔(Variable Sampling Intervals, VSI)等,提出了动态 CV 控制图,如 Khaw 等^[14]的 VSS 和 VSI CV 控制图, Yeong 等^[15]的 VSI EWMA CV 控制图和 Muhammad 等^[16]的 VSS EWMA CV 控制图,仿真结果表明上述动态控制图的性能均优于相应的静态 CV 控制图。

从上述研究可以看出,如何改进现有 CV 控制图的性能,更快地检测出过程参数的偏移一直是学者们关注的焦点^[17]。因此,为了进一步提高 EWMA- γ^2 控制图的性能,本文提出了一种单边改进型(Modified EWMA, MOEWMA) γ^2 控制图。与 EWMA- γ^2 控制图的统计量结构不同, MOEWMA- γ^2 控制图不仅利用当前样本 $\hat{\gamma}_t^2$, 还利用了相邻时刻样本的波动 $\hat{\gamma}_t^2 - \hat{\gamma}_{t-1}^2$ 信息,该波动可以在一定程度上反映过程总体参数的变化。关于进一步利用相邻样本值波动来监控过程参数偏移的研究可参见文献[18]。因此,本文针对当前样本以及相邻样本值的波动,在 MOEWMA 监控统计量中分别引入两个参数调节其权重,权重参数 λ 用于跟踪当前样本值 $\hat{\gamma}_t^2$ 的变化,权重参数 k 用于跟踪相邻样本值 $\hat{\gamma}_t^2 - \hat{\gamma}_{t-1}^2$ 的波动。综上,根据构建的 MOEWMA- γ^2 控制图的监控统计量,本文采用蒙特卡罗仿真进行了 10^4 次模拟,获得 MOEWMA- γ^2 控制图的链长性能,并求取相应的 ARL 和运行链长标准差(Standard Deviation of Run Length, SDRL)指标。最后,通过与 EWMA- γ^2 控制图的直观及最优性能比较,证明了所提出控制图的优越性。

1 样本 CV 的分布

假设 $X_{t,j}$ 是在第 t 个时刻采集的来自样本容量

为 n 的第 j 个观测值,其中, $t=1, 2, 3, \dots, j=1, 2, 3, \dots, n$ 。各样本间相互独立且 $X_{t,j}$ 服从总体均值 μ_t 和标准差 σ_t 的正态分布,即 $X_{t,j} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$ 。根据定义可知,该过程的 CV 值为 $\gamma_t = \frac{\sigma_t}{\mu_t}$ 。第 t 个样本的样本 CV ($\hat{\gamma}_t$) 定义为

$$\hat{\gamma}_t = \frac{S_t}{\bar{X}_t}, \tag{1}$$

式中: $\bar{X}_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{t,j}$ 为样本均值; $S_t = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{t,j} - \bar{X}_t)^2}$ 为样本标准差。根据 Iglewicz 等^[19]的研究可知, $\frac{\sqrt{n}}{\hat{\gamma}}$ 服从自由度为 $n-1$, 非中心参数为 $\frac{\sqrt{n}}{\gamma}$ 的非中心 t 分布。

为了监控过程 CV 的平方, Castagliola 等^[11]证明了 $\frac{n}{\hat{\gamma}^2}$ 服从自由度为 $(1, n-1)$, 非中心参数为 $\frac{n}{\gamma^2}$ 的非中心 F 分布,进一步得出样本 $\hat{\gamma}^2$ 的累积和分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF) $F_{\hat{\gamma}^2}(x|n, \gamma)$ 为

$$F_{\hat{\gamma}^2}(x|n, \gamma) = 1 - F_F\left(\frac{n}{x} \middle| 1, n-1, \frac{n}{\gamma^2}\right), \tag{2}$$

式中: $F_F(\cdot)$ 为非中心 F 分布的 CDF。

假设 $\gamma_t = \frac{\sigma_t}{\mu_t} = \gamma_0$ 表示过程的受控状态。此时,即使过程 μ_t 和 σ_t 是变化的,但两者的比值 γ_t 保持不变。根据 Breunig^[20]的研究, $\hat{\gamma}^2$ 的期望 $\mu_0(\hat{\gamma}^2)$ 和标准差 $\sigma_0(\hat{\gamma}^2)$ 的精确估计为

$$\mu_0(\hat{\gamma}^2) = \gamma_0^2 \left(1 - \frac{3\gamma_0^2}{n}\right), \tag{3}$$

$$\sigma_0(\hat{\gamma}^2) = \left\{ \gamma_0^4 \left(\frac{2}{n-1} + \gamma_0^2 \left(\frac{4}{n} + \frac{20}{n(n-1)} + \frac{75\gamma_0^2}{n^2} \right) \right) - (\mu_0(\hat{\gamma}^2) - \gamma_0^2)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

2 单边 MOEWMA CV 控制图

2.1 单边 EWMA- γ^2 控制图

为了提高 Shewhart CV 控制图的性能, Casta-

gliola等^[11]考虑到样本CV的分布偏度较大,提出了两个单边EWMA- γ^2 控制图来分别监控过程CV的向上和向下偏移,即上单边EWMA- γ^2 和下单边EWMA- γ^2 控制图。结果表明,该控制图明显提高了传统Shewhart控制图对过程CV偏移的灵敏度。上单边和下单边EWMA- γ^2 控制图的监控统计量分别为

$$Z_t^+ = \max(\mu_0(\hat{\gamma}^2), (1-\lambda)Z_{t-1}^+ + \lambda\hat{\gamma}_t^2), \quad (5)$$

$$Z_t^- = \min(\mu_0(\hat{\gamma}^2), (1-\lambda)Z_{t-1}^- + \lambda\hat{\gamma}_t^2), \quad (6)$$

式中: Z_t^+ 为上单边EWMA- γ^2 控制图的监控统计量; Z_t^- 为下单边EWMA- γ^2 控制图的监控统计量; $\lambda \in (0.05, 1]$ 为单边EWMA- γ^2 控制图的平滑系数; $Z_0^+ = Z_0^- = \mu_0(\hat{\gamma}^2)$ 为EWMA- γ^2 控制图的初始值。对于上单边EWMA- γ^2 控制图,当统计量 Z_t^+ 落在上控制限 UCL 外面时,即 $Z_t^+ > UCL$,判断过程进入失控状态;同理,对于下单边EWMA- γ^2 控制图,当 $Z_t^- < LCL$ 时,控制图发出过程失控信号,判断过程进入失控状态。 UCL 和 LCL 的定义为

$$UCL = \mu_0(\hat{\gamma}^2) + K \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \sigma_0(\hat{\gamma}^2), \quad (7)$$

$$LCL = \mu_0(\hat{\gamma}^2) - K \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \sigma_0(\hat{\gamma}^2), \quad (8)$$

式中: K 为EWMA- γ^2 控制图的控制限系数; $\mu_0(\hat{\gamma}^2)$ 和 $\sigma_0(\hat{\gamma}^2)$ 分别为式(3)和式(4)中过程受控时 $\hat{\gamma}^2$ 的期望和标准差。

2.2 单边MOEWMA- γ^2 控制图

基于Saghir等^[21]和Patel等^[22]的研究,本文提出一种单边MOEWMA- γ^2 控制图。与Castagliola等^[11]的EWMA控制图不同,本文提出的单边MOEWMA- γ^2 控制图在EWMA- γ^2 控制图的基础上,进一步考虑了相邻时刻的样本值的波动 $\hat{\gamma}_t^2 - \hat{\gamma}_{t-1}^2$,该波动可以在一定程度上反映过程的变化,并利用常数 k 来调节该波动在整个监控统计量中的权重。仿真结果表明该控制图兼顾了EWMA- γ^2 控制图在监控参数较小、中等偏移方面以及Shewhart- γ^2 控制图在监控较大偏移方面的优势。详细监控统计量分别为

$$M_t^+ = (1-\lambda)M_{t-1}^+ + \lambda\hat{\gamma}_t^2 + k(\hat{\gamma}_t^2 - \hat{\gamma}_{t-1}^2), \quad (9)$$

$$M_t^- = (1-\lambda)M_{t-1}^- + \lambda\hat{\gamma}_t^2 + k(\hat{\gamma}_t^2 - \hat{\gamma}_{t-1}^2), \quad (10)$$

式中: M_t^+ 为上单边MOEWMA- γ^2 控制图的监控统计量; M_t^- 为下单边MOEWMA- γ^2 控制图的监控统

计量; λ 为控制图的平滑系数; k 为常数; $M_0^+ = M_0^- = \hat{\gamma}_0^2 = \mu_0(\hat{\gamma}^2)$ 为单边MOEWMA- γ^2 控制图的初始值。根据上述构建的两种监控统计量可以看出,参数 λ 和 k 可以分别调节当前样本和相邻样本波动在监控统计量中的权重,可以有效地跟踪样本的变化值和变化方向。值得注意的是,当 $k=0$ 时,该控制图等价于Castagliola等^[11]的单边EWMA控制图。

此处,以上单边MOEWMA- γ^2 控制图为例,给出其监控统计量(9)的迭代表示形式: $M_t^+ = (\lambda + k) \sum_{i=1}^t (1-\lambda)^{t-i} \hat{\gamma}_i^2 - k \sum_{i=1}^{t-1} (1-\lambda)^{t-i-1} \hat{\gamma}_i^2 + (1-\lambda-k)(1-\lambda)^t \mu_0(\hat{\gamma}^2)$ 。进一步,根据该迭代公式,可以推导监控统计量 M_t^+ 和 M_t^- 的均值和方差分别为

$$\mu(M_t^+) = \mu(M_t^-) = \mu_0(\hat{\gamma}^2), \quad (11)$$

$$\sigma^2(M_t^+) = \sigma^2(M_t^-) = \frac{(\lambda + 2\lambda k + 2k^2) - \lambda(1-\lambda-k)^2(1-\lambda)^{2(t-1)}}{2-\lambda} \sigma_0^2(\hat{\gamma}^2). \quad (12)$$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(1-\lambda-k)^2(1-\lambda)^{2(t-1)} = 0$,可以得到 M_t^+ 和 M_t^- 的渐近方差为

$$\sigma^2(M_t^+) = \sigma^2(M_t^-) = \frac{\lambda + 2\lambda k + 2k^2}{2-\lambda} \sigma_0^2(\hat{\gamma}^2). \quad (13)$$

此外,通过最小化 $\sigma^2(M_t^+)$ 可以得到最优的 k 值 k_{opt} 。因此,令 $\sigma^2(M_t^+)$ 对参数 k 的一阶偏导数为0,

即 $\frac{d\sigma^2}{dk} = \frac{\sigma_0^2(\hat{\gamma}^2)}{2-\lambda}(2\lambda + 4k) = 0$,可以得到 k 的最优值

$$k_{opt} = -\frac{\lambda}{2}. \quad (14)$$

根据单边控制图的运行规则,当统计量 $M_t^+ > UCL$ 或 $M_t^- < LCL$ 时,控制图发出过程向上或向下偏移的失控信号,判断过程进入失控状态。对于上单边和下单边MOEWMA- γ^2 控制图,相应的控制限分别为

$$UCL = \mu_0(\hat{\gamma}^2) + K \sqrt{\frac{\lambda + 2\lambda k + 2k^2}{2-\lambda}} \sigma_0(\hat{\gamma}^2), \quad (15)$$

$$LCL = \mu_0(\hat{\gamma}^2) - K \sqrt{\frac{\lambda + 2\lambda k + 2k^2}{2-\lambda}} \sigma_0(\hat{\gamma}^2). \quad (16)$$

3 控制图的性能仿真及参数设计

3.1 性能指标

本文主要采用运行链长(Run Length, RL)指

标来评价控制图的性能,其可以定义为过程监控开始到发出失控报警信号为止抽取的样本个数。具体而言,评价指标主要包括运行链长的期望,即 ARL 和运行链长的标准差 SDRL。ARL 是从过程监控开始到发出失控报警信号抽取的平均样本数,反映了 RL 的期望水平;SDRL 是从过程监控开始到发出失控报警信号抽取的样本数的标准差,反映 RL 的离散程度。

3.2 控制图参数设计

当过程处于受控状态时,控制图的误警率越小越好,此时受控 ARL 值(用 ARL_0 表示)越大越好;当过程处于失控状态时,控制图的漏报警率越小越好,此时失控的 ARL 值(用 ARL_1 表示)越小越好。此外,较小的失控 SDRL 值(用 $SDRL_1$ 表示)代表控制图 RL 值的离散程度较低,相应控制图的监控性能更稳定。因此,针对控制图参数的优化设计首先保证 ARL_0 ,进而使得 ARL_1 最小,可以得到最优参数组合 (λ^*, K^*) 。

3.2.1 控制限系数设计

根据控制图受控 ARL_0 的约束,此处首先针对特定的 λ 值,利用二分法的思想寻优获得相应的控制限系数 K 。针对 $n \in \{5, 10\}$, $\gamma_0 \in \{0.1, 0.2\}$ 和 $\lambda \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75\}$,表 1 给出了仿真模拟得到的控制限系数 K 。

表 1 $ARL_0 = 370.4$ 时不同受控的参数组合 (n, γ_0, λ) 的控制限系数 K

Tab. 1 The coefficient K in control limits for different parameter combination (n, γ_0, λ) at $ARL_0 = 370.4$

控制限	n	γ_0	λ			
			0.10	0.25	0.50	0.75
上单边	5	0.10	2.733 0	3.264 8	3.655 8	3.799 7
		0.20	2.994 4	3.502 5	3.894 2	4.019 0
	10	0.10	2.600 8	3.029 5	3.333 8	3.454 7
		0.20	2.782 8	3.183 6	3.482 6	3.599 0
下单边	5	0.10	1.922 3	1.931 9	1.819 2	1.722 0
		0.20	1.687 5	1.759 6	1.681 4	1.598 3
	10	0.10	2.043 6	2.123 4	2.080 1	2.029 1
		0.20	1.870 2	1.995 1	1.972 2	1.930 1

从表 1 中可以看出,针对上单边 MOEWMA- γ^2 控制图,随着 λ 和 γ_0 的增加,控制限系数 K 有增加的趋势。例如,当 $n = 5$ 和 $\gamma_0 = 0.1$ 时, λ 从 0.1 增加至 0.75, K 从 2.733 0 增加至 3.799 7; 当 $n = 5$ 和 $\lambda = 0.1$ 时, γ_0 从 0.1 增加至 0.2, K 从 2.733 0 增加至 2.994 4。针对下单边 MOEWMA- γ^2 控制图,随着 γ_0 的增加,控制限系数 K 有减小的趋势。例如,当 $n = 5$ 和 $\lambda = 0.1$ 时, γ_0 从 0.1 增加至

0.2, K 值从 1.922 3 降低至 1.687 5。

3.2.2 控制图的最优参数设计

为了获得控制图对不同参数偏移 τ 的最优性能,需要寻优获得 MOEWMA- γ^2 控制图的最优参数组合 (λ^*, K^*) 。根据胡雪龙等^[23]的研究,本文设定 $\lambda \in (0.05, 1]$, 并取步长 $\Delta_\lambda = 0.01$, 计算所有满足 ARL_0 约束的参数组合 (λ, K) 。针对偏移量 τ , 采用参数 $(n, \gamma_0, \lambda, K)$ 计算相应的 ARL_1 值, 并找出 ARL_1 值最小时对应的 (λ^*, K^*) , 即为 MOEWMA- γ^2 控制图的最优参数。最优参数设计模型可以表示为

$$(\lambda^*, K^*) = \operatorname{argmin} AR L(n, \lambda, K, k_{opt}, \gamma_0, \gamma_1),$$

$$\text{s. t. } AR L(n, \lambda^*, K^*, k_{opt}, \gamma_0, \gamma_0) = AR L_0,$$

式中: $\gamma_1 = \tau\gamma_0 (\tau \neq 1)$ 表示过程失控状态下的 CV 值。当 $0 < \tau < 1$, 过程 CV 发生向下偏移; 当 $\tau > 1$ 时, 过程 CV 发生向上偏移。

4 控制图的性能比较

4.1 性能的直观比较

由于针对 EWMA 型控制图的性能比较往往会选择相同的平滑系数,因此本文首先针对给定的 λ 和 K 的参数组合(见表 1),进一步计算控制图在不同参数偏移下的失控性能。当 $n = 5$, $\gamma_0 \in \{0.1, 0.2\}$, $ARL_0 = 370.4$, $\lambda = 0.1$ 时, MOEWMA- γ^2 与 EWMA- γ^2 控制图在各种参数偏移量 τ 下的 $(ARL_1, SDRL_1)$ 值如表 2 所示,其中加粗的值代表更小的 ARL_1 值。此外,考虑到表 2 中仅给出了 $\lambda = 0.1$ 时两种控制图的性能,不能反应出控制图在不同平滑系数下的性能,所以图 1 中给出了 $\lambda \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75\}$, $n = 5$, $\gamma_0 = 0.1$ 时, MOEWMA- γ^2 与 EWMA- γ^2 控制图的 $\ln(ARL)$ 值。这里采用 $\ln(ARL)$ 主要是为了在不损失数据原有特征的前提下,把不同偏移情况下的 ARL 值缩小到较小的范围内,使图形更加清晰。根据表 2 可以得出:

1) 当 $\lambda = 0.1$ 时, MOEWMA- γ^2 控制图的性能明显优于 EWMA- γ^2 控制图。EWMA- γ^2 控制图仅在部分较大的向上偏移的监控性能上优于 MOEWMA- γ^2 控制图。例如,当 $\gamma_0 = 0.10$, $\tau = 0.80$ 和 1.10 时, MOEWMA- γ^2 控制图的 ARL_1 分别为 17.8 和 49.9, 明显低于 EWMA- γ^2 控制图的 20.7 和 57.3。

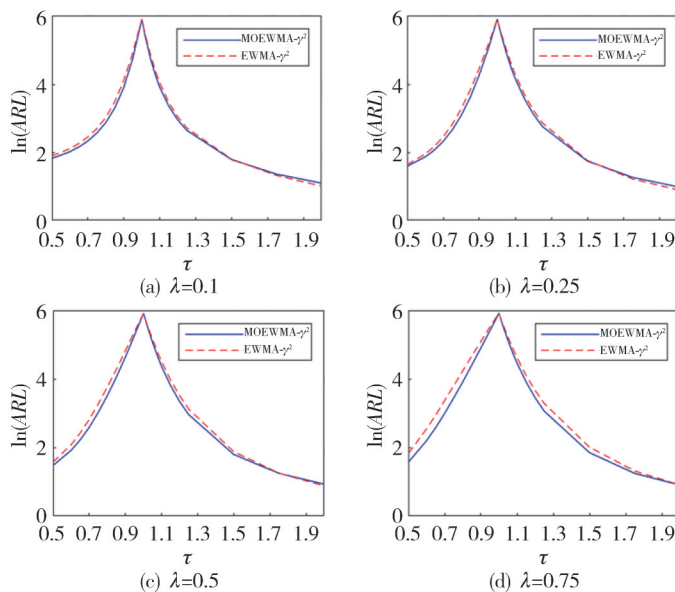


图1 $n=5, \gamma_0=0.1$ 和不同 λ 时的MOEWMA- γ^2 与EWMA- γ^2 控制图的性能比较

Fig. 1 The comparison between the MOEWMA- γ^2 and EWMA- γ^2 charts for different λ at $n=5$ and $\gamma_0=0.1$

表2 $n=5, \lambda=0.1, ARL_0=370.4$ 和 $\gamma_0 \in \{0.1, 0.2\}$ 时的MOEWMA- γ^2 与EWMA- γ^2 控制图的 $(ARL_1, SDRL_1)$ 的性能比较
Tab. 2 The $(ARL_1, SDRL_1)$ comparison between the MOEWMA- γ^2 and EWMA- γ^2 charts at $n=5, \lambda=0.1, ARL_0=370.4$ and $\gamma_0 \in \{0.1, 0.2\}$

τ	γ_0			
	MOEWMA- γ^2		EWMA- γ^2	
	0.1	0.2	0.1	0.2
0.50	(6.2, 0.8)	(5.8, 0.8)	(6.6, 0.9)	(6.5, 0.9)
0.60	(7.5, 1.5)	(7.2, 1.5)	(8.2, 1.8)	(8.1, 1.8)
0.65	(8.6, 2.2)	(8.2, 2.2)	(9.6, 2.6)	(9.5, 2.7)
0.70	(10.3, 3.4)	(9.9, 3.4)	(11.6, 3.9)	(11.6, 4.1)
0.75	(13.1, 5.4)	(12.6, 5.5)	(14.9, 6.3)	(15.0, 6.8)
0.80	(17.8, 9.3)	(17.3, 9.5)	(20.7, 11.3)	(21.2, 12.2)
0.85	(27.3, 17.9)	(26.8, 18.4)	(33.0, 22.5)	(34.1, 24.4)
0.90	(50.0, 40.0)	(49.6, 40.7)	(61.6, 50.4)	(64.7, 53.8)
0.95	(117.4, 107.8)	(116.5, 107.9)	(138.7, 127.8)	(144.5, 134.5)
1.02	(217.3, 211.7)	(222.3, 214.8)	(231.8, 225.2)	(234.5, 226.8)
1.05	(112.7, 106.3)	(116.6, 110.1)	(125.9, 119.7)	(128.1, 121.3)
1.08	(66.8, 60.3)	(70.1, 62.9)	(75.9, 69.4)	(78.3, 71.3)
1.10	(49.9, 43.6)	(53.1, 46.0)	(57.3, 51.0)	(58.7, 52.4)
1.15	(28.8, 23.1)	(30.5, 24.3)	(32.1, 26.6)	(33.3, 27.2)
1.20	(19.2, 14.2)	(20.4, 15.0)	(21.0, 16.1)	(21.9, 16.7)
1.25	(14.1, 9.7)	(15.1, 10.3)	(15.2, 10.9)	(15.9, 11.4)
1.50	(6.0, 3.3)	(6.3, 3.5)	(6.0, 3.6)	(6.3, 3.8)
1.75	(3.9, 1.9)	(4.1, 2.1)	(3.7, 2.1)	(3.9, 2.2)
2.00	(3.0, 1.3)	(3.2, 1.5)	(2.7, 1.5)	(2.9, 1.6)

2) 当 $\lambda=0.1$ 时, MOEWMA- γ^2 控制图的 $SDRL_1$ 值均小于EWMA- γ^2 控制图的 $SDRL_1$ 值, 表明MOEWMA- γ^2 控制图RL分布的离散程度低于EWMA- γ^2 控制图, 性能更优。例如, 当 $\gamma_0 \in \{0.1, 0.2\}$ 和 $\tau=2$ 时, MOEWMA- γ^2 控制图的 $ARL_1 \in \{3.0, 3.2\}$, 稍大于EWMA- γ^2 控制图的

$ARL_1 \in \{2.7, 2.9\}$, 但其 $SDRL_1 \in \{1.3, 1.5\}$ 均低于相应EWMA- γ^2 控制图的 $SDRL_1 \in \{1.5, 1.6\}$ 。

3) 当 $\lambda=0.1$ 时, 对于较小和中等参数偏移的监控, γ_0 对上单边MOEWMA- γ^2 控制图的影响更大。例如, 针对 $\tau=1.1$ 的情形, 当 γ_0 从0.1增加到0.2时, MOEWMA- γ^2 控制图的 ARL_1 值增加了 $\frac{(53.1 - 49.9)}{49.9} \times 100\% = 6.413\%$, 而EWMA- γ^2 控制图的 ARL_1 值增加了 $\frac{(58.7 - 57.3)}{57.3} \times 100\% = 2.443\%$ 。

此外, 由图1可以看出, 对于其他平滑系数 λ , MOEWMA- γ^2 控制图的性能均优于EWMA- γ^2 控制图, 具体表现为: 针对相同的参数偏移量, MOEWMA- γ^2 控制图的 $\ln(ARL)$ 曲线基本都落在EWMA- γ^2 控制图的 $\ln(ARL)$ 曲线下方。此外, 针对较大的 λ 值(例如 $\lambda=0.75$), MOEWMA- γ^2 控制图相对EWMA- γ^2 控制图的性能优势更加明显, 进一步体现了MOEWMA- γ^2 控制图的优越性。

4.2 最优性能比较

上述控制图性能的分析及比较都是针对固定的平滑系数, 而实际中, 对于参数偏移量 τ , 还需设计控制图的最优参数, 并比较其最优性能。因此, 当 $ARL_0=37.4, n \in \{5, 10\}, \gamma_0 \in \{0.1, 0.2\}$ 和 $\tau \in \{0.5, 0.65, 0.8, 0.9, 1.1, 1.25, 1.5, 2\}$ 时, 表3

给出了单边 MOEWMA- γ^2 控制图的最优参数 (λ^*, K^*) 和最优性能 ARL_1 。此外, 还给出了单边 EWMA- γ^2 控制图的最优性能 ARL_1 。表 3 中, 每个表单元的第一行为最优参数组合, 第二行依次为 MOEWMA- γ^2 和 EWMA- γ^2 控制图的最优 ARL_1 值(加粗表示二者中更小的值)。例如, 当 $n=5, \gamma_0=0.1$ 和 $\tau=1.25$ 时, 上单边 MOEWMA- γ^2 控制图的最优参数组合为 $(\lambda^*, K^*)=(0.08, 2.6092)$, 最优 $ARL_1=14.1$, 而 EWMA- γ^2 控制图的最优 $ARL_1=15.2$ 。

表 3 $ARL_0=370.4$ 时的单边 MOEWMA- γ^2 控制图的最优参数组合 (λ^*, K^*) 和性能以及 EWMA- γ^2 控制图的最优性能
Tab. 3 The optimal parameter combination (λ^*, K^*) of the MOEWMA- γ^2 and the corresponding ARL of the MOEWMA- γ^2 and EWMA- γ^2 charts at $ARL_0=370.4$

τ	γ_0			
	$n=5$		$n=10$	
	0.1	0.2	0.1	0.2
0.50	(0.52, 1.810 5)	(0.47, 1.690 9)	(0.89, 2.012 1)	(0.87, 1.915 8)
	(4.4, 4.8)	(4.4, 4.8)	(2.3, 2.5)	(2.3, 2.5)
0.65	(0.24, 1.934 5)	(0.23, 1.763 9)	(0.48, 2.083 3)	(0.46, 1.979 5)
	(7.9, 8.8)	(7.8, 8.8)	(4.3, 4.6)	(4.4, 4.7)
0.80	(0.07, 1.862 7)	(0.05, 1.475 0)	(0.16, 2.105 5)	(0.14, 1.936 4)
	(17.6, 20.6)	(16.4, 20.9)	(10.1, 11.4)	(10.1, 11.6)
0.90	(0.05, 1.781 3)	(0.05, 1.475 0)	(0.05, 1.864 8)	(0.05, 1.638 7)
	(43.4, 53.7)	(41.1, 55.8)	(25.7, 30.8)	(25.0, 31.6)
1.10	(0.05, 2.356 8)	(0.05, 2.674 1)	(0.05, 2.265 5)	(0.05, 2.504 1)
	(45.1, 51.2)	(48.7, 52.4)	(26.9, 30.3)	(29.0, 31.6)
1.25	(0.08, 2.609 2)	(0.08, 2.887 2)	(0.11, 2.641 7)	(0.10, 2.783 9)
	(14.1, 15.2)	(15.1, 15.9)	(8.1, 8.5)	(8.8, 9.0)
1.50	(0.18, 3.059 6)	(0.18, 3.280 3)	(0.50, 3.333 0)	(0.46, 3.452 6)
	(5.7, 5.8)	(6.0, 6.1)	(3.2, 3.2)	(3.4, 3.4)
2.00	(0.97, 3.835 1)	(0.99, 4.030 8)	(0.99, 3.497 4)	(1.00, 3.624 3)
	(2.4, 2.4)	(2.5, 2.6)	(1.5, 1.4)	(1.6, 1.5)

根据表 3 可以得出:

1) 随着样本容量 n 的增大, 单边 MOEWMA- γ^2 控制图的性能提高。例如, 当 $\gamma_0=0.1$ 和 $\tau=1.10, n$ 从 5 增加到 10 时, MOEWMA- γ^2 控制图的 ARL_1 从 45.1 降到 26.9。需要注意的是, 在实际使用 MOEWMA- γ^2 控制图时, 较大的样本量往往会增加过程抽样的成本, 所以质量工程师需要综合考虑控制图的性能以及抽样成本的问题。

2) 单边 MOEWMA- γ^2 控制图的最优性能优于 EWMA- γ^2 控制图, 尤其是针对过程参数的中等和较小偏移, 其优势更加明显。例如, 当 $\gamma_0=0.1, n=5$ 和 $\tau=1.10$ 时, MOEWMA- γ^2 控制图的 $ARL_1=45.1$, 明显低于 EWMA- γ^2 控制图的

$ARL_1=51.2$ 。针对过程参数的较大偏移, EWMA- γ^2 控制图的性能略优于 MOEWMA- γ^2 控制图。例如, 当 $\gamma_0=0.1, n=10$ 和 $\tau=2$ 时, EWMA- γ^2 控制图的 $ARL_1=1.4$ 略低于 MOEWMA- γ^2 控制图的 $ARL_1=1.5$ 。

5 实例应用

为了说明 MOEWMA- γ^2 控制图在实际过程中的应用, 此处同样采用 Castagliola 等^[11]关于机械零件合金烧结工艺的例子, 详细分析了控制图的参数设计及对失控样本数据的监控。

5.1 合金烧结工艺的背景

在生产制造过程中, 烧结是粉末冶金的重要步骤, 通过控制高炉的温度, 将压缩的金属粉末加热至允许单个颗粒结合的温度。在此过程中, 孔隙收缩对于颗粒间的键合强度有着重要影响。作为过程的重要质量特征之一, 该烧结过程的压力检测下降时间 T_{pd} 需要满足一定的约束条件, 即压强从 0.2 MPa 下降到 0.15 MPa 的时间大于 30 s。此外, 通过使用熔化的铜能够显著延长该下降时间。研究表明, 在冷却过程中, 合金中熔化铜的吸收量 Q_c 越大, 压力下降时间 T_{pd} 所受影响越大。基于熔化铜的吸收量 Q_c 和压力下降时间 T_{pd} 的回归分析, Castagliola 等^[11]指出 T_{pd} 的标准差和均值之间存在着一个固定的比例关系, 即 $\sigma_{pd} = \gamma_{pd} \times \mu_{pd}$ 。在实际过程中, 当烧结钢具有不均匀的微观结构和不规则的晶粒尺寸时, 会影响熔铜在烧结过程中的吸附方式和孔隙填充, 从而使得 σ_{pd} 增加, 表现为样本数据的离散程度远大于预期水平, 从而引起比例关系 γ_{pd} 的波动。因此,

工程师们需要监控 $\gamma_{pd} = \frac{\sigma_{pd}}{\mu_{pd}}$ 来发现生产过程的异常。

5.2 基于第一阶段样本数据的控制图设计

为了对上述过程进行监控, 需要根据第一阶段受控样本数据估计受控过程的 CV 值。表 4 给出了根据第一阶段 20 个受控样本(样本容量 $n=5$)估计的 CV 值 $\hat{\gamma}_i^2$, 并采用均方根法估计过程受控的 CV 值

$$\hat{\gamma}_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} \hat{\gamma}_i^2}{20}} = 0.417$$

依照质量工程人员的经验, 当 γ_{pd} 发生向上 25%(甚至更大)偏移时, 生产过程就会发生异常, 引起该异常的原因主要是生产零件质

量的恶化。因此,在控制图设计时,设定参数如下: $n=5, \gamma_0=0.417, \gamma_1=\gamma_0 \times \tau=0.417 \times 1.25=0.521$ 。此外,根据式(3)和式(4),可以求出 $\mu_0(\hat{\gamma}^2)=0.1557$ 和 $\sigma_0(\hat{\gamma}^2)=0.1634$ 。针对 $\tau=1.25$ 的参数偏移,可以根据3.2.2节中的模型寻优获得上单边MOEWMA- γ^2 控制图的最优参数 $(\lambda^*, K^*)=(0.09, 4.2524)$,最小 $ARL_1=20.1$,以及相应的控制限 $UCL=0.3040$ 。根据Castagliola等^[11]的研究,上单边EWMA- γ^2 控制图的最优参数设计为

$(0.0793, 4.3669)$,可以得到相应的 $UCL=0.3016$ 和 $ARL_1=20.2$ 。可以看出,MOEWMA- γ^2 控制图的最优性能略优于EWMA- γ^2 控制图。

5.3 基于第二阶段样本数据的控制图应用

为了说明MOEWMA- γ^2 控制图在第二阶段过程监控中的应用,本文仿真模拟了 $\tau=1.25$ 时的失控样本数据。根据表4中的第二阶段样本数据,分别绘制了相应的单边EWMA- γ^2 和MOEWMA- γ^2 控制图,如图2所示。

表4 第一阶段和第二阶段样本数据及相应控制图的监控统计量值
Tab. 4 Sample datasets in phases I and II and the statistics of the corresponding CV charts

t	$\hat{\gamma}_t^2$	第一阶段		t	$\hat{\gamma}_t^2$	第二阶段	
		$Z_t^+(\text{EWMA-}\gamma^2)$	$M_t^+(\text{MOEWMA-}\gamma^2)$			$Z_t^+(\text{EWMA-}\gamma^2)$	$M_t^+(\text{MOEWMA-}\gamma^2)$
1	0.1640	0.1564	0.1561	1	0.4255	0.1771	0.1679
2	0.1910	0.1591	0.1580	2	0.6247	0.2126	0.2000
3	0.2632	0.1674	0.1643	3	0.1465	0.2074	0.2167
4	0.1176	0.1634	0.1666	4	0.0568	0.1954	0.2064
5	0.0488	0.1557	0.1591	5	0.1074	0.1885	0.1952
6	0.3260	0.1692	0.1617	6	0.6934	0.2285	0.2137
7	0.1840	0.1704	0.1701	7	0.9256	0.2838	0.2673
8	0.1648	0.1700	0.1704	8	0.5289	0.3032	0.3087
9	0.1429	0.1678	0.1689	9	0.1355	0.2899	0.3108
10	0.1998	0.1704	0.1692	10	0.2529	0.287	0.3003
11	0.1267	0.1669	0.1686	11	0.1006	0.2722	0.2892
12	0.0441	0.1572	0.1611	12	0.6181	0.2996	0.2955
13	0.3069	0.1690	0.1624	13	0.3010	0.2997	0.3103
14	0.2016	0.1716	0.1707	14	0.3057	0.3002	0.3096
15	0.1318	0.1685	0.1703	15	0.3306	0.3026	0.3104
16	0.1063	0.1635	0.1657	16	0.1980	0.2943	0.3063
17	0.3399	0.1775	0.1709	17	0.5430	0.3140	0.3120
18	0.0365	0.1663	0.1724	18	0.0383	0.2922	0.3101
19	0.0847	0.1599	0.1624	19	0.2955	0.2924	0.2972
20	0.3025	0.1712	0.1652	20	0.4836	0.3076	0.3055

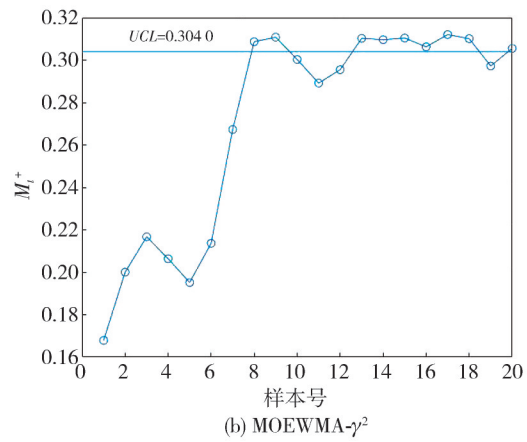
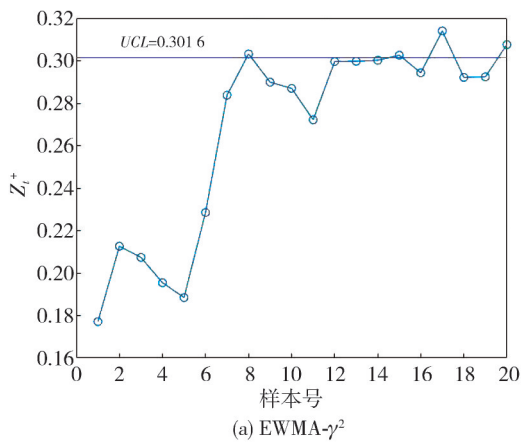


图2 上单边EWMA- γ^2 和MOEWMA- γ^2 控制图

Fig. 2 Upward EWMA- γ^2 and MOEWMA- γ^2 charts

从图2中可以发现,EWMA- γ^2 控制图和MOEWMA- γ^2 控制图都在第8个样本点发出过程

失控的报警信号,且MOEWMA- γ^2 控制图在第9个,第13个至第18个以及第20个样本点都发

出过程失控的信号,而 EWMA- γ^2 控制图仅在第 15 个、第 17 个和第 20 个样本点发出过程失控的报警信号。上述所有报警信号的样本统计量值见表 4 中的加粗部分。虽然 EWMA- γ^2 控制图与 MOEWMA- γ^2 控制图同时给出过程失控的报警信号(第 8 个样本点),但可以看出,MOEWMA- γ^2 控制图的样本统计量值 $M_i^+ = 0.3087$ 相较于 EWMA- γ^2 控制图的样本统计量值 $Z_i^+ = 0.3032$ 更加远离相应的控制限 $UCL = 0.3040$ 和 $UCL = 0.3016$,且 MOEWMA- γ^2 控制图发出的报警信号更多。综上所述,MOEWMA- γ^2 控制图在监控过程 CV 偏移方面的效率高于 EWMA- γ^2 控制图,更能节约生产成本及提高产品质量。

最后,当控制图给出过程异常信号后,质量工程师应按程序查找并排除异常原因,需要检查可能导致过程均值和标准差发生变化的原因。此时,质量工程师在控制图发出异常信号后继续收集异常样本,并分别绘制样本均值和标准差的时间序列图来确定 CV 偏移的来源。当几个连续样本均值(或标准差)落在控制限同一边时,质量工程师将对过程均值(或标准差)参数进行分析,结合过程操作人员、质量检验员等研究样本失控原因,查找引起参数变化的异常因素。

6 结 论

针对过程 CV 的监控问题,本文提出了单边 MOEWMA- γ^2 控制图,并通过蒙特卡罗仿真模拟了控制图的性能。针对不同的平滑系数 λ ,分析了 MOEWMA- γ^2 控制图的 ARL_1 和 $SDRL_1$ 性能,并分析了 λ 、 γ_0 对 MOEWMA- γ^2 控制图参数及性能的影响。通过与单边 EWMA- γ^2 控制图的比较,发现 MOEWMA- γ^2 控制图在多数情况下的性能均优于 EWMA- γ^2 控制图,尤其对于过程参数的较小、中等偏移,其性能优势更加明显。此外,基于 $SDRL_1$ 的性能比较还表明,MOEWMA- γ^2 控制图的 RL 离散程度低于 EWMA- γ^2 控制图,说明 MOEWMA- γ^2 控制图的性能更稳定。进一步,针对不同的参数偏移大小,本文给出了 MOEWMA- γ^2 控制图的最优参数及性能指标。通过与 EWMA- γ^2 控制图的最优性能比较发现,MOEWMA- γ^2 控制图在监控向下偏移方面,完全优于 EWMA- γ^2 控制图;在监控向上的较小、中等

偏移方面,其最优性能也优于 EWMA- γ^2 控制图;在监控向上的大偏移方面,其最优性能略差于 EWMA- γ^2 控制图。综上,可以看出 MOEWMA- γ^2 控制图在监控过程 CV 的偏移方面整体性能明显优于 EWMA- γ^2 控制图,能够更快地检测出过程中的异常,从而减少不合格产品的数量。

参考文献:

- [1] ABID M, SUN M, NAZIR H Z, et al. A mixed HWMA-CUSUM mean chart with an application to manufacturing process [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2021, 37(2): 618-631.
- [2] PAGE E S. Continuous inspection schemes [J]. *Biometrika*, 1954, 41(1/2): 100-115.
- [3] ROBERTS S W. Control chart tests based on geometric moving averages [J]. *Technometrics*, 1959, 1(3): 239-250.
- [4] MITRA A, LEE K B, CHAKRABORTI S. An adaptive exponentially weighted moving average-type control chart to monitor the process mean [J]. *European Journal of Operational Research*, 2019, 279(3): 902-911.
- [5] LI Y, QIN J, WU C. A robust adaptive exponentially weighted moving average control chart with a distribution-free design strategy [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2023, 177: 109083.
- [6] 李龙辉, 商艳芬, 刘彦利, 等. 考虑手术分类协变量的风险调整 EWMA 控制图 [J]. *工业工程与管理*, 2023, 28(6): 193-200.
LI Longhui, SHANG Yanfen, LIU Yanli, et al. A risk-adjusted EWMA chart for monitoring surgical performance considering categorical covariates [J]. *Industrial Engineering and Management*, 2023, 28(6): 193-200. (in Chinese)
- [7] 薛丽, 李聪凯, 贾元忠. 可变抽样区间和样本容量的非正态 EWMA 控制图经济设计 [J]. *运筹与管理*, 2022, 31(2): 111-118.
XUE Li, LI Congkai, JIA Yuanzhong. Economic design of variable sampling interval and sample size EWMA control chart under non-normal distributions [J]. *Operations Research and Management Science*, 2022, 31(2): 111-118. (in Chinese)
- [8] KHATUN M, KHOO M B, LEE M H, et al. One-sided control charts for monitoring the multivariate coefficient of variation in short production runs [J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2019, 41(6): 1712-1728.

- [9] CHEN R, LI Z, ZHANG J. A generally weighted moving average control chart for monitoring the coefficient of variation [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 70: 190-205.
- [10] KANG C W, LEE M S, SEONG Y J, et al. A control chart for the coefficient of variation [J]. *Journal of Quality Technology*, 2007, 39(2): 151-158.
- [11] CASTAGLIOLA P, CELANO G, PSARAKIS S. Monitoring the coefficient of variation using EWMA charts [J]. *Journal of Quality Technology*, 2011, 43(3): 249-265.
- [12] ZHANG J, LI Z, CHEN B, et al. A new exponentially weighted moving average control chart for monitoring the coefficient of variation [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2014, 78: 205-212.
- [13] TRAN P H, TRAN K P. The efficiency of CUSUM schemes for monitoring the coefficient of variation [J]. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2016, 32(6): 870-881.
- [14] KHAW K W, KHOO M B C, YEONG W C, et al. Monitoring the coefficient of variation using a variable sample size and sampling interval control chart [J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2017, 46(7): 5772-5794.
- [15] YEONG W C, KHOO M B C, THAM L K, et al. Monitoring the coefficient of variation using a variable sampling interval EWMA chart [J]. *Journal of Quality Technology*, 2017, 49(4): 380-401.
- [16] MUHAMMAD A N B, YEONG W C, CHONG Z L, et al. Monitoring the coefficient of variation using a variable sample size EWMA chart [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2018, 126: 378-398.
- [17] JALILIBAL Z, AMIRI A, CASTAGLIOLA P, et al. Monitoring the coefficient of variation: A literature review [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2021: 107600.
- [18] KHAN N, ASLAM M, JUN C H. Design of a control chart using a modified EWMA statistic [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2017, 33(5): 1095-1104.
- [19] IGLEWICZ B, MYERS R H, HOWE R B. On the percentage points of the sample coefficient of variation [J]. *Biometrika*, 1968, 55(3): 580-581.
- [20] BREUNIG R. An almost unbiased estimator of the coefficient of variation [J]. *Economics Letters*, 2001, 70(1): 15-19.
- [21] SAGHIR A, ASLAM M, FARAZ A, et al. Monitoring process variation using modified EWMA [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2020, 36(1): 328-339.
- [22] PATEL A K, DIVECHA J. Modified exponentially weighted moving average (EWMA) control chart for an analytical process data [J]. *Journal of Chemical Engineering and Materials Science*, 2011, 2(1): 12-20.
- [23] 胡雪龙, 张素颖, 孙金生, 等. 改进型单边EWMA指数控制图设计 [J]. *数理统计与管理*, 2023, 42(1): 26-34.
HU Xuelong, ZHANG Suying, SUN Jinsheng, et al. Design of an improved one-sided exponential EWMA chart [J]. *Journal of Applied Statistics and Management*, 2023, 42(1): 26-34. (in Chinese)

(上接第591页)

- [25] LI H, WU X J, KITTLER J. MDLatLRR: A novel decomposition method for infrared and visible image fusion [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2020, 29: 4733-4746.
- [26] WANG D, LIU J, LIU R, et al. An interactively reinforced paradigm for joint infrared-visible image fusion and saliency object detection [J]. *Information Fusion*, 2023, 98: 101828.
- [27] TANG L, YUAN J, MA J. Image fusion in the loop of high-level vision tasks: A semantic-aware real-time infrared and visible image fusion network [J]. *Information Fusion*, 2022, 82: 28-42.
- [28] TANG W, HE F, LIU Y, et al. DATFuse: Infrared and visible image fusion via dual attention transformer [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2023, 33(7): 3159-3172.