

一类具有隔离和消毒剂影响的霍乱模型研究

刘慧, 乔志琴

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

摘要: 本文建立了一个考虑隔离和消毒剂影响的霍乱传染病模型, 探究了这些因素对霍乱传播动态的影响。运用微分方程理论描述了模型的传播动力学, 使用下一代矩阵法对模型的基本再生数进行了计算。在此基础上, 详细阐述了无病平衡点和地方病平衡点的存在性和局部渐近稳定性, 并对各平衡点处的全局渐近稳定性进行了深入讨论。结果显示, 当基本再生数 $R_0 < 1$ 时, 模型的无病平衡点具有全局渐近稳定性; 而当基本再生数 $R_0 > 1$ 时, 得出了地方病平衡点全局渐近稳定的充分条件。此外, 采用PRCC法进行了敏感性分析, 模拟隔离率和消毒剂对感染者和霍乱弧菌密度的影响, 使用数值模拟验证了理论结果的正确性。对具有隔离和消毒剂双重控制策略影响下的霍乱传染病模型的研究表明, 多重控制策略能够更加有效地抑制霍乱的传播。

关键词: 霍乱模型; 基本再生数; 稳定性; 平衡点

中图分类号: O175.1 **文献标识码:** A **doi:** 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2024.03.0002

引用格式: 刘慧, 乔志琴. 一类具有隔离和消毒剂影响的霍乱模型研究[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2025, 46(2): 261-270.

LIU Hui, QIAO Zhiqin. Study on a cholera model with the incorporation of isolation and disinfectant effects [J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2025, 46(2): 261-270.

Study on a Cholera Model with the Incorporation of Isolation and Disinfectant Effects

LIU Hui, QIAO Zhiqin

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: This paper established a cholera epidemic model considering the influence of isolation and disinfectants to investigate their impact on the dynamics of cholera transmission. The transmission dynamics of the model were described using the theory of differential equations, and the basic reproduction number of the model was computed using the next-generation matrix method. On this basis, our study thoroughly investigate the conditions for the existence of disease-free and endemic equilibrium points, along with their global asymptotic stability. Findings reveal that with a basic reproduction number of $R_0 < 1$, the disease-free equilibrium point gradually stabilizes globally, while for a basic reproduction number of $R_0 > 1$, the endemic equilibrium point's gradual stabilization towards a stable value and attainment of global stability are delineated. Furthermore, sensitivity analysis is conducted using PRCC method, considering the impact of isolation rates and disinfectants on the density of infected individuals and cholera Vibrio. Theoretical findings are validated through numerical simulations. Through investigating a cholera model with

收稿日期: 2024-03-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11401541); 山西省回国留学人员科研资助项目(2024-110)

作者简介: 刘慧(1999-), 女, 硕士生, 主要从事生物数学的研究。

通信作者: 乔志琴(1981-), 女, 副教授, 博士, 主要从事常微分方程分支的研究。E-mail: qiaozhiqin@nuc.edu.cn。

dual control strategies of isolation and disinfectants, it is concluded that multiple control strategies can more effectively suppress the transmission of cholera.

Key words: cholera model; basic regeneration number; stability; equilibrium point

0 引言

霍乱是由霍乱弧菌引起的一种致命的肠道传染病,其主要传播方式有人和环境之间的接触,例如人体摄入在环境中被弧菌污染的水源或者食物^[1],还有通过人和人之间的接触进行传播,例如未感染的人与感染者近距离接触^[2]。迄今为止,全世界已经发生了7次重大霍乱疫情,造成无数人死亡和受伤。因此,如何有效控制霍乱的传播是需要共同解决的一个重要问题。

通过理论分析研究传染病的传播趋势,尽快采取相应的防控措施,有助于在疾病暴发初期发现首批病例,防止大规模疫情的发生。Capasso等^[3]首次提出了关于霍乱传播的数学模型,按照非线性饱和定律对模型进行分析,得出结论印证了霍乱病毒的演变规律。Codeco^[4]在Capasso等的模型中增加了易感者,研究表明,合理调整各个参数的相对权重,可以影响霍乱病菌的传播。Tien等^[5]利用双线性发生率提出了一个传染病模型,该模型考虑了环境与人以及人与人之间两种传播途径,但未考虑到传染病传播过程中的饱和效应。Mukandavire等^[6]提出了一种考虑到饱和发生率的模型。另一方面,Liao等^[7]利用非线性发生率分别描述了传染病在人与人之间直接传播以及人与环境之间的间接传播。Misra等^[8]建立了使用DDT和氯等化学品控制环境中携带者种群密度的霍乱模型,深入研究了该疾病的传播机制,研究表明,使用化学品不仅控制了携带者的数量,而且减少了社区中感染者的数量,但该文没有明确考虑细菌的密度。Misra等^[9]分析了一个使用化学物质来降低水环境中的细菌密度的霍乱模型,假设了易感者与细菌密度之间的双线性相互作用,以及在水生环境中使用化学品的速率与水生环境中的细菌密度成正比。Kumar等^[10]建立并分析了一个用化学物质控制环境中细菌密度的数学模型,假设一部分化学品用于处理受感染人群的排泄物,即在源头降低细菌密度,其余部分化学品用于杀死环境中的细菌。为了更好地研究霍乱传播规律,本文在此基础上建立了一个具有隔离和消毒剂双重控制策略影响的霍乱模型,并且假设感染者在接受隔

离期间不与外界接触,直至恢复健康,不会再变为感染者,并考虑在传染病流行期间感染者与隔离者的因病死亡率,忽略短期内康复者丧失免疫力可能的情况。

1 模型的建立

将环境中整个人群划分为4个仓室:易感者 $S(t)$,感染者 $I(t)$,隔离者 $Q(t)$,恢复者 $R(t)$ 。总人口为 $N(t)$,且有 $N(t)=S(t)+I(t)+Q(t)+R(t)$,环境中霍乱弧菌浓度为 $B(t)$,消毒剂浓度为 $C_h(t)$,根据霍乱的传播特点建立SIQRBC_h传染病模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \eta \frac{B}{L+B} S - dS, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI + \eta \frac{B}{L+B} S - (v + \alpha_1 + d + \delta) I, \\ \frac{dQ}{dt} = \delta I - (\epsilon + d + \alpha_2) Q, \\ \frac{dR}{dt} = \epsilon Q + vI - dR, \\ \frac{dB}{dt} = \left(\theta_1 - \theta_2 \frac{kC_h}{M + kC_h} \right) I - \pi_1 \phi_1 C_h B - \theta B, \\ \frac{dC_h}{dt} = \phi B - \phi_0 C_h - kC_h - \phi_1 C_h B, \end{cases} \quad (1)$$

式中: Λ 为易感者的人口输入量; β 为直接传播率; η 为间接传播率; L, M 为半饱和常数; d 为自然死亡率; v 为感染者恢复率; α_1 为感染者因病死亡率; δ 为感染者的隔离率; ϵ 为隔离者的恢复率; α_2 为隔离者的因病死亡率; θ 为霍乱弧菌自然死亡率与自生长率的差值; θ_1 为环境中感染者排放的霍乱弧菌的生长速率系数; θ_2 为消毒剂降低感染者排放霍乱弧菌密度的效果; k 为人均使用消毒剂降低受感染个体在源头排放的霍乱弧菌密度; π_1 为吸收消毒剂导致环境中霍乱弧菌衰减的系数; ϕ 为消毒剂的增长速率; ϕ_0 为消毒剂的自然损耗; ϕ_1 为霍乱弧菌平均吸收消毒剂的量。

利用 $N=S+I+Q+R$,将系统(1)写为

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \left(\beta I + \eta \frac{B}{L+B} \right) (N - I - Q - R) - (v + \alpha_1 + d + \delta) I, \\ \frac{dQ}{dt} = \delta I - (\epsilon + d + \alpha_2) Q, \\ \frac{dN}{dt} = \Lambda - dN - \alpha_1 I - \alpha_2 Q, \\ \frac{dR}{dt} = \epsilon Q + vI - dR, \\ \frac{dB}{dt} = \left(\theta_1 - \theta_2 \frac{kC_h}{M + kC_h} \right) I - \pi_1 \phi_1 C_h B - \theta B, \\ \frac{dC_h}{dt} = \phi B - \phi_0 C_h - kC_h - \phi_1 C_h B. \end{cases} \quad (2)$$

因为少量的消毒剂可能杀死大量的霍乱弧菌, 所以 π_1 应大于 1。霍乱弧菌的自然死亡率应该大于其自生长率, 即 $\theta > 0$, 如果 $\theta < 0$, 那么环境中的霍乱弧菌种群就会爆发。因此, 为了限制环境中霍乱弧菌的净生长速率, 必须在系统(1)中施加条件 $\theta > 0$ 。此外, 根据流行病学可知 $\theta_1 > \theta_2$, 系统(1)中包含的所有参数都是正的。

假设霍乱模型的初始条件是非负的, 其可行域为

$$R_+^6 = \{(I, Q, N, R, B, C_h) | I \geq 0, Q \geq 0, N \geq 0, R \geq 0, B \geq 0, C_h \geq 0\}.$$

记

$$\Omega = \{(I, Q, N, R, B, C_h) \in R_+^6 : 0 \leq I + Q + R \leq N \leq \frac{\Lambda}{d}, 0 \leq B \leq \frac{\theta_1 \Lambda}{d\theta}, 0 \leq C_h \leq \frac{\theta_1 \phi \Lambda}{d\theta(\phi_0 + k)}\}.$$

引理 1 Ω 为系统(2)的正向不变集。

证明 将系统(1)重写为

$$\frac{dX}{dt} = C(X) + D,$$

其中, $X = [S, I, Q, R, B, C_h]^T$,

$$C = \begin{bmatrix} -C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & -C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & \epsilon & -d & 0 & 0 \\ 0 & C_{52} & 0 & 0 & -C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi & -C_{66} \end{bmatrix},$$

$C_{11} = \beta I + \frac{\eta B}{L+B} + d$, $C_{21} = \beta I + \frac{\eta B}{L+B}$, $C_{22} = v + d + \alpha_1 + \delta$, $C_{33} = \epsilon + d + \alpha_2$, $C_{52} = \theta_1 - \theta_2 \frac{kC_h}{M + kC_h}$, $C_{55} = \pi_1 \phi_1 C_h + \theta$, $C_{66} = \phi_0 + k + \phi_1 C_h$, 向量 $D = [\Lambda, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ 是正的。矩阵 $C(X)$ 的所有非对角线项都是非负的。因此, 对于

每个 $X \in R_+^6$, 矩阵 $C(X)$ 是 Metzler 矩阵, 从而系统(1)在 $X \in R_+^{6[11]}$ 中是正不变的。因此, 源于 $X \in R_+^6$ 中初始条件的系统(1)的所有解轨迹将永远限制在其中, 系统(2)中, $\frac{dN}{dt} = \Lambda - dN -$

$\alpha_1 I - \alpha_2 Q \leq \Lambda - dN$, 根据常数变易法求解 $\frac{d\tilde{N}}{dt} =$

$\Lambda - d\tilde{N}$, 可得 $\tilde{N}(t) = \frac{\Lambda}{d} + \left(N(0) - \frac{\Lambda}{d} \right) e^{-dt}$ 。由

比较定理^[12] 可得 $0 \leq N(t) \leq \frac{\Lambda}{d} + \left(N(0) -$

$\frac{\Lambda}{d} \right) e^{-dt}$ 。若 $N(0) \leq \frac{\Lambda}{d}$, 则 $0 \leq N(t) \leq \frac{\Lambda}{d}$ 。当

$N - I - Q - R = 0$ 时, $\frac{d(N - I - Q - R)}{dt} =$

$\Lambda > 0$, 即, $N - I - Q - R \geq 0$, 那么 $0 \leq I +$

$Q + R \leq N \leq \frac{\Lambda}{d}$ 。

当 $I \leq \frac{\Lambda}{d}$ 时, $\frac{dB}{dt} \leq \theta_1 \frac{\Lambda}{d} - \theta B$, 由比较定理可

得 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} B(t) \leq \frac{\theta_1 \Lambda}{d\theta}$, 则 $0 \leq B(t) \leq \frac{\theta_1 \Lambda}{d\theta}$ 。

当 $B(t) \leq \frac{\theta_1 \Lambda}{d\theta}$ 时, 可知 $\frac{dC_h}{dt} \leq \phi \frac{\theta_1 \Lambda}{d\theta} - (\phi_0 +$

$k) C_h$, 根据比较定理可以得出 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} C_h(t) \leq$

$\frac{\theta_1 \phi \Lambda}{d\theta(\phi_0 + k)}$, 则 $0 \leq C_h(t) \leq \frac{\theta_1 \phi \Lambda}{d\theta(\phi_0 + k)}$, 因此, 霍

乱传染病系统(2)的解 $(I, Q, N, R, B, C_h) \in \Omega$, 即 Ω 是系统(2)的正向不变集。

2 无病平衡点的存在性与稳定性

易知系统(2)始终存在唯一的无病平衡点

$E_0 = \left(0, 0, \frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0 \right)$ 。利用下一代矩阵法^[13] 求出

基本再生数 R_0 。

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \left(\beta I + \frac{\eta B}{L+B} \right) (N - I - Q - R) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} (v + \alpha_1 + d + \delta) I \\ -\delta I + (\epsilon + d + \alpha_2) Q \\ -\left(\theta_1 - \theta_2 \frac{kC_h}{M + kC_h} \right) I + \theta B + \pi_1 \phi_1 C_h B \end{bmatrix},$$

则在无病平衡点 E_0 处的感染矩阵 $F =$

$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(I, Q, B)} \Big|_{E_0}$, 转移矩阵 $V = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial(I, Q, B)} \Big|_{E_0}$ 。故基本再生数为

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta\Lambda L\theta + \eta\Lambda\theta_1}{(v + \alpha_1 + d + \delta)dL\theta}$$

定理 1 如果 $R_0 < 1$, 无病平衡点 E_0 在正不变集 Ω 内是局部渐近稳定的; 如果 $R_0 > 1$, 则无病平衡点不稳定。

证明 系统(2)在 E_0 的 Jacobian 矩阵

$$J_{(E_0)} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{\eta\Lambda}{dL} & 0 \\ \delta & -(\varepsilon + d + \alpha_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -d & 0 & 0 & 0 \\ v & \varepsilon & 0 & -d & 0 & 0 \\ \theta_1 & 0 & 0 & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi & -\phi_0 - k \end{bmatrix}$$

其中, $a_{11} = \frac{\beta\Lambda}{d} - (v + \alpha_1 + d + \delta)$ 。

$J_{(E_0)}$ 的特征方程为

$$(\lambda + \phi_0 + k)(\lambda + d)(\lambda + d)(\lambda + \varepsilon + d + \alpha_2) \times (\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

易知特征值为 $\lambda_1 = -(\phi_0 + k) < 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -d < 0$, $\lambda_4 = -(\varepsilon + d + \alpha_2) < 0$, λ_5 和 λ_6 满足 $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, 其中, $b = (v + \alpha_1 + d + \delta)(1 - R_0) + \frac{\eta\Lambda\theta_1}{dL\theta} + \theta$, $c = (v + \alpha_1 + d + \delta)\theta(1 - R_0)$ 。

当 $R_0 < 1$ 时, $c > 0$ 且 $b > 0$, 满足 Hurwitz 判据的条件, 即特征值 λ_5 和 λ_6 都具有负实部, 则无病平衡点 E_0 在可行域内局部渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, $c < 0$, 特征值 λ_5 和 λ_6 其中一个具有正实部, 无病平衡点 E_0 不稳定。得证。

定理 2 如果 $R_0 < 1$, 系统(2)的无病平衡点 E_0 在正不变集 Ω 内全局渐近稳定。

证明 根据文献[14]的方法进行证明。

令 $f(x, y) := (F - V)x - F(x, y) + V(x, y)$, 将系统(2)的染病仓室重新表示为

$$x' = (F - V)x - f(x, y), \quad (3)$$

其中, $x = (I, Q, B)^T$ 为染病仓室中的种群, $y = (R, C_h)^T$ 为非染病仓室中的种群,

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ 0 \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}$$

$$f_1(x, y) = \beta I \left(\frac{\Lambda}{d} - N \right) + \beta I (I + Q + R) +$$

$$\frac{\eta B \Lambda}{L d} - \frac{\eta B}{L + B} (I + Q + R),$$

$$f_2(x, y) = \frac{\theta_2 k C_h}{M + k C_h} I + \pi_1 \phi_1 C_h B.$$

运用矩阵理论中的 Perron 特征向量^[14], 可以求出非负矩阵 $V^{-1}F$ 对应的特征值 R_0 的左特征值 $\omega^T = \left(\beta, 0, \frac{\eta}{L} \right)$ 。易知在考虑的正不变集 Ω 内有

$N \leq \frac{\Lambda}{d}$ 成立, 则 $f(x, y) \geq 0$ 。

定义 Lyapunov 函数

$$L = \omega^T V^{-1}x = \frac{\beta L \theta + \eta \theta_1}{(v + \alpha_1 + d + \delta) \theta L} I + \frac{\eta}{\theta L} B,$$

则关于系统(3)的全导数为

$$\frac{dL}{dt} = \omega^T V^{-1}x' = (R_0 - 1)\omega^T x - \omega^T V^{-1}f(x, y) =$$

$$(R_0 - 1) \left(\beta I + \frac{\eta}{L} B \right) - \omega^T V^{-1}f(x, y),$$

则当 $R_0 < 1$ 时, $\frac{dL}{dt} \leq 0$, 从而系统(2)的无病平衡点 E_0 在正不变集 Ω 内全局渐近稳定。

3 地方病平衡点的存在性与稳定性

令系统(2)的右边等于零, 整理可得

$$Q = \frac{\delta I}{\varepsilon + d + \alpha_2}, \quad (4)$$

$$N = \frac{\Lambda - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2 \delta}{\varepsilon + d + \alpha_2} \right) I}{d}, \quad (5)$$

$$R = \frac{\left(v + \frac{\varepsilon \delta}{\varepsilon + d + \alpha_2} \right) I}{d}, \quad (6)$$

$$C_h = \frac{\phi B}{\phi_0 + k + \phi_1 B}, \quad (7)$$

$$\frac{\theta_1 M(\phi_0 + k) + [\phi_1 \theta_1 M + (\theta_1 - \theta_2) k \phi] B}{M(\phi_0 + k) + (M\phi_1 + k\phi) B} I =$$

$$\left(\theta + \frac{\pi_1 \phi_1 \phi B}{\phi_0 + k + \phi_1 B} \right) B. \quad (8)$$

等式左边是 B 的递减函数, 右边是 B 的递增函数, 因此如果存在正解, 则它在 $(0, +\infty)$ 中是唯一的。若 $B \rightarrow 0$, 等式右边变为零, 对于 $I \neq 0$, 等式左侧是正的, 等式左边始终大于右边; 若 $B \rightarrow +\infty$, 那么等式的右边趋近于 $+\infty$, 而等式左边始终为正并

且趋近于某一个值, 这种情况下, 等式左边小于右边。因此, 式(8)在区间(0, +∞)内存在唯一正解, 即 $B=f_B(I)$, 可以将等式改写为

$$B=f(B)I, \tag{9}$$

其中, $f(B)=\frac{f_1(B)}{f_2(B)}$,

$$f_1(B)=\frac{\theta_1 M(\phi_0+k)+[\phi_1 \theta_1 M+(\theta_1-\theta_2)k\phi]B}{M(\phi_0+k)+(M\phi_1+k\phi)B},$$

$$f_2(B)=\left(\theta+\frac{\pi_1 \phi_1 \phi B}{\phi_0+k+\phi_1 B}\right)。$$

对式(9)两端关于 I 求导, 可得

$$\frac{dB}{dI}=\frac{f(B)}{1-f'(B)I},$$

因为 $f_1'(B)=\frac{-\theta_2 k \phi M(\phi_0+k)}{[M(\phi_0+k)+(M\phi_1+k\phi)B]^2} < 0$,

$$f_2'(B)=\frac{(\phi_0+k)\pi_1 \phi_1 \phi}{(\phi_0+k+\phi_1 B)^2} > 0, \text{ 可得到 } f'(B)=\frac{f_2(B)f_1'(B)-f_1(B)f_2'(B)}{[f_2(B)]^2} < 0, \text{ 所以 } \frac{dB}{dI} > 0。$$

将式(5)、(6)和(9)代入当系统(2)右边等于零时的第一个方程中, 得到 $F(I)=0$, 其中, $F(I)=\left(\beta+\frac{\eta f(B)}{L+f(B)I}\right)\frac{\Lambda}{\alpha_1+d+v+\delta}-(v+\alpha_1+d+\delta)$ 。由式(4), (5), (6)可得

$$N-I-Q-R=\frac{\Lambda}{d}-\frac{\alpha_1+d+v+\delta}{d}I,$$

在正不变集 Ω 中, $I \leq I_0 = \frac{\Lambda}{\alpha_1+d+v+\delta}$ 。

$$F(0)=(v+\alpha_1+d+\delta)(R_0-1),$$

$$F(I_0)=-(v+\alpha_1+d+\delta) < 0,$$

$$F'(I)=\frac{\eta f'(B) \frac{dB}{dI} L - \eta f^2(B)}{(L+f(B)I)^2} \frac{\Lambda}{\alpha_1+v+d+\delta} +$$

$$\left(\beta+\frac{\eta f(B)}{L+f(B)I}\right) \frac{-(\alpha_1+v+d+\delta)}{d} < 0,$$

则当 $R_0 > 1$ 时, 方程 $F(I)=0$ 在区间 $(0, I_0)$ 内存在唯一的正根, 即 $I=I^*$ 。将其代入式(4)~式(7), 以及式(9)中, 可以得到 $Q^*, R^*, N^*, C_h^*, B^*$ 的值。此时, 系统(2)存在唯一的地方病平衡点 $E^*=(I^*, Q^*, N^*, R^*, B^*, C_h^*)$ 。关于地方病平衡点 E^* 的稳定性, 有以下定理3和定理4。

定理 3 系统(2)的地方病平衡点 E^* 在正不变

集 Ω 内局部渐近稳定。

证明 系统(2)在 E^* 的 Jacobian 矩阵为

$$J_{(E^*)} =$$

$$\begin{bmatrix} -b_{11} & -b_1 & b_1 & -b_1 & b_{15} & 0 \\ \delta & -(\varepsilon+d+\alpha_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -d & 0 & 0 & 0 \\ v & \varepsilon & 0 & -d & 0 & 0 \\ b_{51} & 0 & 0 & 0 & -b_{55} & -b_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{65} & -b_{66} \end{bmatrix},$$

其中,

$$b_{11}=\beta I^* + \frac{\eta B^*}{(L+B^*)I^*} (N^*-Q^*-R^*) > 0,$$

$$b_1=\beta I^* + \frac{\eta B^*}{L+B^*} > 0,$$

$$b_{15}=\frac{\eta L(N^*-I^*-Q^*-R^*)}{(L+B^*)^2} > 0,$$

$$b_{55}=\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta > 0, \quad b_{51}=b_{55} B^*/I^* > 0,$$

$$b_{65}=\phi - \phi_1 C_h^* > 0,$$

$$b_{56}=\frac{\theta_2 k M I^*}{(M+k C_h^*)^2} + \pi_1 \phi_1 B^* > 0,$$

$$b_{66}=\phi_0+k+\phi_1 B^* > 0。$$

$J_{(E^*)}$ 的特征方程为

$$\left(\lambda+b_{11}+\frac{(\alpha_1+v+\delta)b_1}{\lambda+d}\right)\left(\lambda+b_{55}+\frac{b_{65}b_{56}}{\lambda+b_{66}}\right)=b_{51}b_{15}。$$

下证该特征方程的根均具有负实部。假设 $\lambda=\chi+i\rho$ 是特征方程的根, 其中 $\chi \geq 0$, 则

$$\left|\chi+i\rho+b_{11}+\frac{b_1(\alpha_1+v+\delta)(\chi+d-i\rho)}{(\chi+d)^2+\rho^2}\right| \times \left|\chi+i\rho+b_{55}+\frac{b_{65}b_{56}(\chi+b_{66}-i\rho)}{(\chi+b_{66})^2+\rho^2}\right| = b_{51}b_{15}, \tag{10}$$

其中,

$$\left|\chi+i\rho+b_{11}+\frac{b_1(\alpha_1+v+\delta)(\chi+d-i\rho)}{(\chi+d)^2+\rho^2}\right| =$$

$$\left\{(\chi+b_{11}+\frac{b_1(\alpha_1+v+\delta)(\chi+d)}{(\chi+d)^2+\rho^2})^2 + \right.$$

$$\left. \rho^2 \left(1-\frac{b_1(\alpha_1+v+\delta)}{(\chi+d)^2+\rho^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \geq \chi+b_{11}+$$

$$\frac{b_1(\alpha_1+v+\delta)(\chi+d)}{(\chi+d)^2+\rho^2} \geq \chi+b_{11} \geq b_{11},$$

$$\left|\chi+i\rho+b_{55}+\frac{b_{65}b_{56}(\chi+b_{66}-i\rho)}{(\chi+b_{66})^2+\rho^2}\right| =$$

$$\left\{ \left(\chi + b_{55} + \frac{b_{65}b_{56}(\chi + b_{66})}{(\chi + b_{66})^2 + \rho^2} \right)^2 + \rho^2 \left(1 - \frac{b_{65}b_{56}}{(\chi + b_{66})^2 + \rho^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \geq \chi + b_{55} + \frac{b_{65}b_{56}(\chi + b_{66})}{(\chi + b_{66})^2 + \rho^2} \geq \chi + b_{55} \geq b_{55},$$

又因为

$$\frac{b_{11}b_{55}}{b_{51}b_{15}} = \frac{\left(\beta I^* + \frac{\eta(N^* - Q^* - R^*)B^*}{L + B^*} \right) I^*}{\frac{\eta L(N^* - I^* - Q^* - R^*)}{(L + B^*)^2} B^*} = \frac{\beta \frac{(I^*)^2}{B^*} + \frac{\eta(N^* - Q^* - R^*)}{L + B^*}}{\frac{\eta L(N^* - I^* - Q^* - R^*)}{(L + B^*)^2}} > \frac{\eta(N^* - Q^* - R^*)}{L + B^*} = \frac{L + B^*}{L} > 1,$$

即 $b_{11}b_{55} > b_{51}b_{15}$, 则式(10)不成立, 故地方病平衡点 E^* 在正不变集 Ω 内局部渐近稳定。

定理 4 当满足不等式(11)~(13)时, 地方病平衡点 E^* 在正不变集 Ω 内全局渐近稳定, 其中

$$(\alpha_2^2 v + \varepsilon^2 \alpha_1) \delta < 4d\alpha_1 v(\varepsilon + d + \alpha_2), \quad (11)$$

$$\frac{\eta \Lambda}{(L + B^*) I^* d} \left(\theta_1 - \theta_2 \frac{kC_h^*}{M + kC_h^*} \right) < \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{\eta B^*}{(L + B^*) I^*} \right) (\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta), \quad (12)$$

$$\left(\frac{\theta_2 k \Lambda}{d(M + kC_h^*)} + \frac{\pi_1 \phi_1 \theta_1 \Lambda}{d\theta} \right)^2 (\phi - \phi_1 C_h^*)^2 < \frac{1}{4} (\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta)(\phi_0 + k). \quad (13)$$

证明 构造如下 Lyapunov 函数

$$G = \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) + \frac{\delta m_1}{2} (Q - Q^*)^2 + \frac{\alpha_1 m_1}{2} (N - N^*)^2 + \frac{v m_1}{2} (R - R^*)^2 + \frac{m_2}{2} (B - B^*)^2 + \frac{m_3}{2} (C_h - C_h^*)^2,$$

其中, $m_1 = \frac{\beta + \eta B^*}{(L + B^*) I^*} > 0, m_2 > 0, m_3 > 0$ 。

函数 G 沿着系统(2)解的全导数为

$$\frac{dG}{dt} \Big|_{(2)} = - \left(m_1 + \frac{\eta B(N - I - Q - R)}{(L + B) I^*} \right) (I - I^*)^2 -$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\varepsilon + d + \alpha_2) m_1}{\delta} \times (Q - Q^*)^2 - \frac{d m_1}{\alpha_1} (N - N^*)^2 - \frac{d m_1}{v} (R - R^*)^2 - \\ & m_2 (\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta) \times (B - B^*)^2 - m_3 (\phi_0 + k + \phi_1 B) (C_h - C_h^*)^2 + \\ & \frac{\eta L(N - I - Q - R)}{(L + B)(L + B^*) I^*} \times (I - I^*) (B - B^*) + \\ & m_2 \left(\theta_1 - \theta_2 \frac{kC_h^*}{M + kC_h^*} \right) (I - I^*) \times \\ & (B - B^*) - \frac{\alpha_2 m_1}{\alpha_1} (Q - Q^*) (N - N^*) + \\ & \frac{\varepsilon m_1}{v} (Q - Q^*) \times (R - R^*) + \\ & m_3 (\phi - \phi_1 C_h^*) (B - B^*) (C_h - C_h^*) - \\ & m_2 \left(\frac{\theta_2 k M I}{(M + kC_h)(M + kC_h^*)} + \pi_1 \phi_1 B \right) \cdot \\ & (B - B^*) (C_h - C_h^*). \end{aligned}$$

以下在正不变集 Ω 内寻找使得 $\frac{dG}{dt} \Big|_{(2)} < 0$ 成

立的条件。将 $\frac{dG}{dt}$ 看成关于变量 $I - I^*, Q - Q^*, N - N^*, R - R^*, B - B^*$ 和 $C_h - C_h^*$ 的二次型, 其对应的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & c_{66} \end{bmatrix},$$

其中,

$$\begin{aligned} c_{11} &= - \left(m_1 + \frac{\eta B(N - I - Q - R)}{(L + B) I^*} \right), \\ c_{22} &= - \frac{(\varepsilon + d + \alpha_2) m_1}{\delta}, \quad c_{33} = - \frac{d m_1}{\alpha_1}, \\ c_{33} &= - \frac{d m_1}{\alpha_1}, \quad c_{44} = - \frac{d m_1}{v}, \\ c_{55} &= - m_2 (\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta), \\ c_{66} &= - m_3 (\phi_0 + k + \phi_1 B), \\ c_1 &= - \frac{\alpha_2 m_1}{2 \alpha_1}, \quad c_2 = \frac{\varepsilon m_1}{2 v}, \end{aligned}$$

$$c_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{\eta L(N - I - Q - R)}{(L + B)(L + B^*) I^*} + m_2 \left(\theta_1 - \theta_2 \frac{kC_h^*}{M + kC_h^*} \right) \right],$$

$$c_4 = \frac{1}{2} \left[m_3(\phi - \phi_1 C_h^*) - m_2 \left(\frac{\theta_2 k M I}{(M + k C_h)(M + k C_h^*)} + (\pi_1 \phi_1 B) \right) \right]$$

易知在 Ω 内 A 的一阶顺序主子式 $H_1 = c_{11} < 0$, 二阶顺序主子式 $H_2 = c_{11} c_{22} > 0$ 。三阶顺序主子式

$$H_3 = c_{11}(c_{22} c_{33} - c_1^2) = \frac{c_{11} m_1^2}{\alpha_1} \left(\frac{d(\epsilon + d + \alpha_2)}{\delta} - \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1} \right),$$

$$H_4 = c_{11} [c_{44}(c_{22} c_{33} - c_1^2) - c_2^2 c_{33}] = -\frac{c_{11} d m_1^3}{v \alpha_1} \left(\frac{d(\epsilon + d + \alpha_2)}{\delta} - \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1} - \frac{\epsilon^2}{4v} \right)$$

欲使 $H_3 < 0$ 与 $H_4 > 0$ 同时成立, 需要不等式(11)成立。

$$H_5 = \frac{H_4}{c_{11}} (c_{11} c_{55} - c_3^2),$$

$$H_6 = c_{66} H_5 - c_4^2 H_4 = \frac{c_{66} H_4}{c_{11}} \left[(c_{11} c_{55} - c_3^2) - \frac{c_{11} c_4^2}{c_{66}} \right]$$

当 $H_4 > 0$ 时, 欲使 $H_5 < 0$ 与 $H_6 > 0$ 同时成立, 并且注意到 $c_{11} < 0, c_{66} < 0$, 则需要不等式

$$c_{11} c_{55} - c_3^2 > \frac{c_{11} c_4^2}{c_{66}} \tag{14}$$

成立即可。下面寻找不等式(14)成立的参数条件。由于

$$c_3 < \frac{1}{2} \left[\frac{\eta N}{(L + B^*) I^*} + m_2 \left(\theta_1 - \theta_2 \frac{k C_h^*}{M + k C_h^*} \right) \right] < \frac{1}{2} \left[\frac{\eta \Lambda}{(L + B^*) d I^*} + m_2 \left(\theta_1 - \theta_2 \frac{k C_h^*}{M + k C_h^*} \right) \right],$$

则

$$c_3^2 < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\eta \Lambda}{(L + B^*) d I^*} \right)^2 + m_2^2 \left(\theta_1 - \theta_2 \frac{k C_h^*}{M + k C_h^*} \right)^2 \right]$$

另一方面, 类似于 c_3^2 的放缩, 可得

$$c_4^2 < \frac{1}{2} \left[m_3^2 (\phi - \phi_1 C_h^*)^2 + m_2^2 \left(\frac{\theta_2 k N}{M + k C_h^*} + \pi_1 \phi_1 f(0) N \right)^2 \right] < \frac{D}{2},$$

其中,

$$D = m_3^2 (\phi - \phi_1 C_h^*)^2 + \frac{m_2^2 \Lambda^2}{d^2} \left(\frac{\theta_2 k}{M + k C_h^*} + \frac{\pi_1 \phi_1 \theta_1}{\theta} \right)^2,$$

则

$$c_{11} c_{55} - \frac{c_{11} c_4^2}{c_{66}} >$$

$$m_1 \left[m_2 (\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta) - \frac{c_4^2}{m_3 (\phi_0 + k)} \right] > m_1 \left\{ m_2 (\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta) - \frac{D}{2 m_3 (\phi_0 + k)} \right\}$$

易知, 当不等式

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\eta \Lambda}{(L + B^*) d I^*} \right)^2 + m_2^2 \left(\theta_1 - \theta_2 \frac{k C_h^*}{M + k C_h^*} \right)^2 \right] < m_1 \left\{ m_2 (\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta) - \frac{D}{2 m_3 (\phi_0 + k)} \right\} \tag{15}$$

成立时, 不等式(14)一定成立, 其中 m_2 和 m_3 为待定的系数。通过计算可知, 当以下4个不等式

$$\left(\frac{\eta \Lambda}{d(L + B^*) I^*} \right)^2 < \frac{m_2 m_1}{2} (\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta), \tag{16}$$

$$m_2 \left(\theta_1 - \theta_2 \frac{k C_h^*}{M + k C_h^*} \right)^2 < \frac{1}{2} (\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta) m_1, \tag{17}$$

$$m_2 \left(\frac{\theta_2 k \Lambda}{d(M + k C_h^*)} + \frac{\pi_1 \phi_1 \theta_1 \Lambda}{d \theta} \right)^2 <$$

$$\frac{m_3}{2} (\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta) \times (\phi_0 + k), \tag{18}$$

$$m_3 (\phi - \phi_1 C_h^*)^2 < \frac{m_2}{2} (\pi_1 \phi_1 C_h^* + \theta) (\phi_0 + k) \tag{19}$$

成立时, 不等式(15)成立。将不等式(16)和(17)中两端分别相乘, 得到不等式(12); 同理由不等式(18)和(19)得到不等式(13)。因此, 当不等式(11)、(12)和(13)成立时, 可保证导数 $\frac{dG}{dt} \Big|_{(2)}$ 在正不变集 Ω 内负定, 则地方病平衡点 E^* 在正不变集 Ω 内全局渐近稳定。

4 数值模拟

在系统(2)中选取一组参数如表1所示, 假设的参数根据文献[10]中数据左右浮动取得, 这种情况下, 基本再生数 $R_0 = 0.0034 < 1$, 对模型进行数值模拟。如图1(a)所示, 系统(2)的解曲线最终趋向无病平衡点 E_0 , 由理论分析可知, 当基本再生数 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

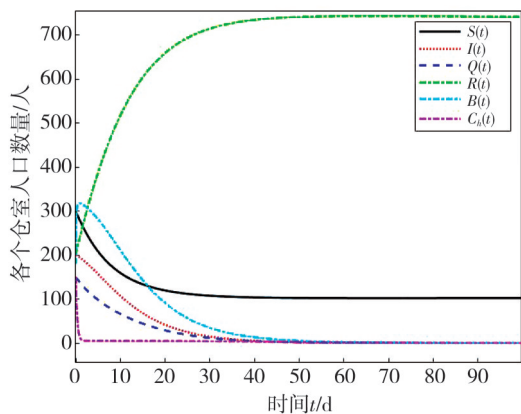
取 $\Lambda = 75, \beta = 0.0006, \eta = 0.005, \alpha_1 = 0.0008, v = 0.12, d = 0.11, \pi_1 = 2, \theta = 0.06, L = 120$, 其他参数的值取自表1, 此时基本再生数 $R_0 = 1.3055 > 1$, 由图1(b)可知系统(2)的解曲线最终趋向地方病平衡点 E^* , 因此, 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平

平衡点 E^* 是全局渐近稳定的。

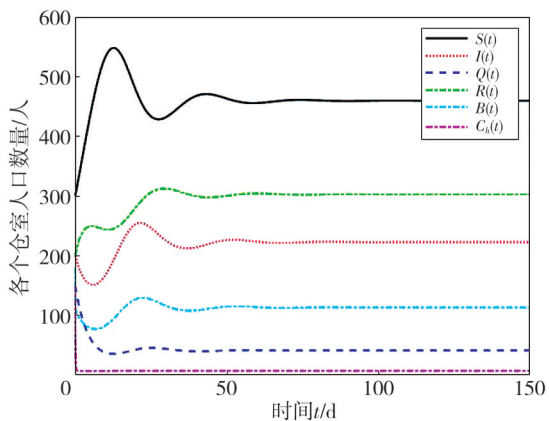
表1 模型中参数的定义及取值

Tab. 1 Definition and value of parameters in the model

参数	取值	参考文献
Δ	5	[10]
β	0.000 4	本文假设
η	0.006	本文假设
L	1 000	[10]
δ	0.05	[15]
d	0.000 1	本文假设
v	0.2	[10]
α_1	0.000 01	[10]
α_2	0.000 1	[16]
ϵ	0.2	[16]
θ_1	0.05	[10]
θ_2	0.04	本文假设
k	0.1	[10]
M	10	[10]
π_1	6	本文假设
ϕ	0.05	[10]
ϕ_0	0.01	[10]
ϕ_1	0.01	[10]
θ	0.05	本文假设



(a) $R_0 < 1$

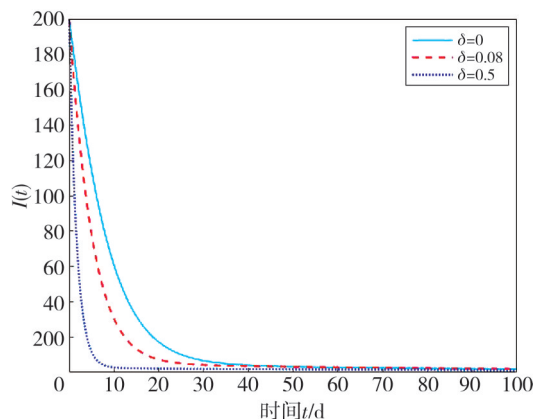


(b) $R_0 > 1$

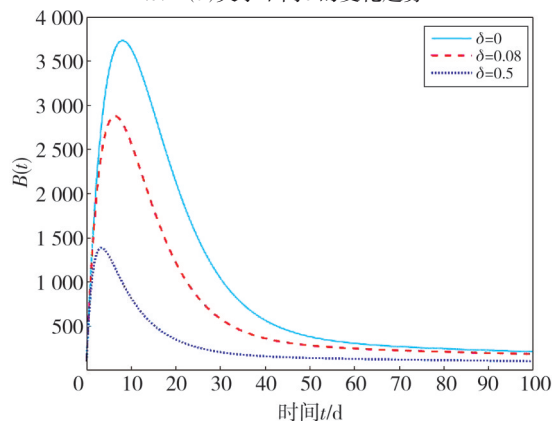
图1 时间序列图

Fig. 1 Time series diagram

选择不同的 δ 取值, 由图 2 可知, 提高隔离率 δ 可以更快地控制霍乱的传播, 即隔离率越高, 感染者人数越少, 霍乱弧菌浓度下降得越快。



(a) $I(t)$ 关于不同 δ 的变化趋势

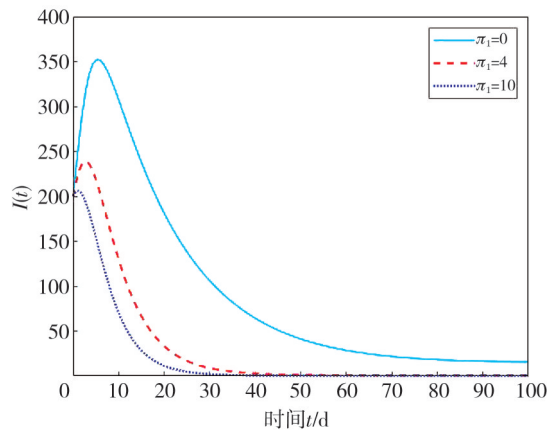


(b) $B(t)$ 关于不同 δ 的变化趋势

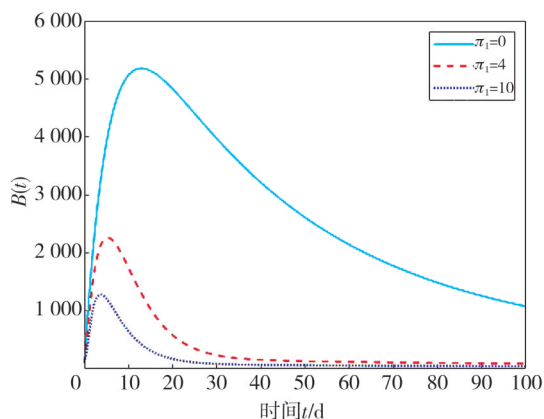
图2 感染者和霍乱弧菌浓度在不同 δ 下的解曲线

Fig. 2 Solution curves of infected individuals and Vibrio cholerae concentrations at different concentrations of δ

改变 π_1 的取值, 可以从图 3 中看出, 化学品降低环境中霍乱弧菌密度效果 $\pi_1=0$ 的时候, 感染者人数和霍乱弧菌浓度达到了峰值, 但是当 $\pi_1=4$ 以及 $\pi_1=10$ 时, 感染者人数和霍乱弧菌密度明显减少, 甚至感染者人数最后减少为零。该图表明, 化学品具有降低环境中霍乱弧菌密度的功效, 从而在控制霍乱弧菌密度和消除疾病方面发挥重要作用。



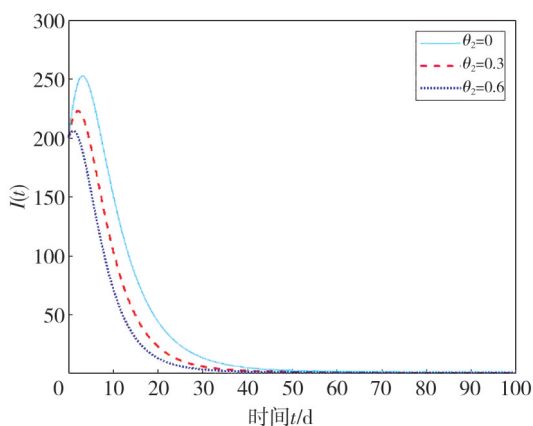
(a) $I(t)$ 关于不同 π_1 的变化趋势



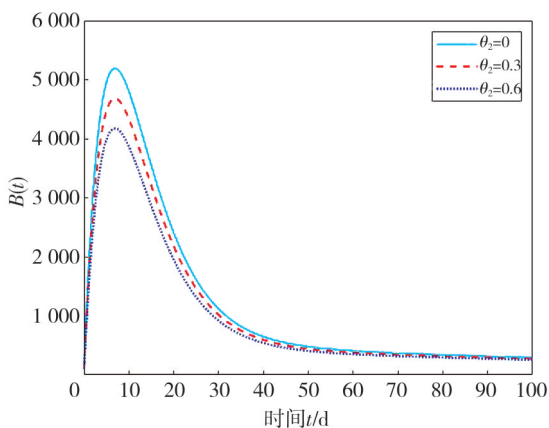
(b) $B(t)$ 关于不同 π_1 的变化趋势

图 3 感染者和霍乱弧菌浓度在不同 π_1 下的解曲线

Fig. 3 Solution curves of infected individuals and Vibrio cholerae concentrations at different concentrations of π_1



(a) $I(t)$ 关于不同 θ_2 的变化趋势



(b) $B(t)$ 关于不同 θ_2 的变化趋势

图 4 感染者和霍乱弧菌浓度在不同 θ_2 下的解曲线

Fig. 4 Solution curves of infected individuals and Vibrio cholerae concentrations at different concentrations of θ_2

同样仅改变 θ_2 的数值,可以从图 4 中看出,化学物质对感染者排放的霍乱弧菌密度的影响随着 θ_2 值的增大而呈现出更为显著的降低趋势。随着 θ_2 值的增大,受感染的人数相对减少的幅度也

随之增大。这些结果表明了化学物质干预在控制感染者和霍乱弧菌种群方面具有显著效果。

敏感性分析常用来确定模型对参数值的稳定性。使用 PRCC 法对部分相关系数进行敏感性分析,以确定模型对参数值的稳定性。图 5 显示了各个参数与基本再生数 R_0 之间的相互关系。由图 5 可以看出, $\Lambda, \beta, \eta, \theta_1$ 与 R_0 呈正相关,而 δ, v, d, θ, L 与 R_0 呈负相关。敏感性分析说明了在控制霍乱传播方面,采取隔离措施和消毒剂消毒对疾病的预防尤为重要。

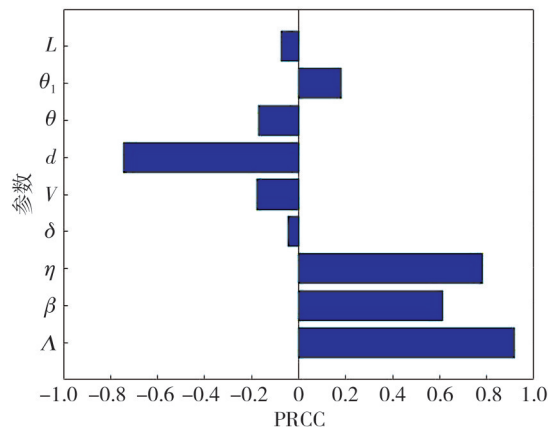


图 5 R_0 的敏感性指数与不同参数的关系

Fig. 5 Sensitivity index of R_0 and its relationship with different parameters

5 结 论

本文建立了具有隔离和消毒剂影响的双重控制策略的霍乱传染病模型,证明了模型的正则性和有界性,通过计算分析求出了模型的基本再生数以及无病平衡点,并证明了该霍乱模型存在唯一的地方病平衡点。

对模型进行分析后得到下列结论:当 $R_0 < 1$ 时,系统(2)有局部渐近稳定和全局渐近稳定的无病平衡点 E_0 ;当 $R_0 > 1$ 时,系统存在唯一的地方病平衡点 E^* , E^* 局部渐近稳定,并且还得到了地方病平衡点全局渐近稳定的充分条件。为了验证理论结果的正确性进行了数值模拟,当提高隔离率时,感染者人数和霍乱弧菌浓度会大幅下降,说明隔离措施对疾病的根除有着重要作用;此外,使用消毒剂控制感染者排放源的霍乱弧菌数量可显著降低流行规模。数值模拟结果显示了采取隔离措施和消毒剂在人群疾病控制中的重要性。因此,为了控制霍乱传染病的传播,采取单一的控制措施是远远不够的,应该采取多种控制策略相结合的方法,才能将霍乱传染病的危害降到最低。

参考文献:

- [1] COLWELL R R, HUQ A. Environmental reservoir of *Vibrio cholerae* the causative agent of cholera [J]. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1994, 740: 44-54.
- [2] WEIL A A, KHAN A I, CHOWDHURY F, et al. Clinical outcomes in household contacts of patients with cholera in Bangladesh [J]. *Clinical Infectious Diseases*, 2009, 49(10): 1473-1479.
- [3] CAPASSO V, PAVERI-FONTANA S L. A mathematical model for the 1973 cholera epidemic in the European Mediterranean region [J]. *Revue d'Épidémiologie et de Santé Publique*, 1979, 27(2): 121-132.
- [4] CODEÇO C T. Endemic and epidemic dynamics of cholera: the role of the aquatic reservoir [J]. *BMC Infectious Diseases*, 2001, 1(1): 1.
- [5] TIEN J H, EARN D J D. Multiple transmission pathways and disease dynamics in a waterborne pathogen model [J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2010, 72(6): 1506-1533.
- [6] MUKANDAVIRE Z, LIAO S, WANG J, et al. Estimating the reproductive numbers for the 2008 – 2009 cholera outbreaks in zimbabwe [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2011, 108(21): 8767-8772.
- [7] LIAO S, WANG J. Global stability analysis of epidemiological models based on Volterra-Lyapunov stable matrices [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2012, 45(7): 966-977.
- [8] MISRA A K, MISHRA S N, PATHAK A L, et al. Modeling the effect of time delay in controlling the carrier dependent infectious disease-cholera [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(23): 11547-11557.
- [9] MISRA A K, SINGH V. A delay mathematical model for the spread and control of water borne diseases [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2012, 301: 49-56.
- [10] KUMAR G R, KUMAR R R, KUMAR T P, et al. A mathematical model for the impact of disinfectants on the control of bacterial diseases [J]. *Journal of Biological Dynamics*, 2023, 17(1): 2206859.
- [11] ABATE A, TIWARI A, SASTRY S. Box invariance in biologically-inspired dynamical systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(7): 1601-1610.
- [12] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性及稳定性方法 [M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2015.
- [13] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission [J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, 180(1/2): 29-48.
- [14] SHUAI Z, VAN DEN DRIESSCHE P. Global stability of infectious disease models using Lyapunov functions [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2013, 73(4): 1513-1532.
- [15] LEMOS-PAIÃO A, SILVA C J, TORRES D F M. An epidemic model for cholera with optimal control treatment [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, 318: 168-180.
- [16] MWASA A, TCHUENCHE J M. Mathematical analysis of a cholera model with public health interventions [J]. *Biosystems*, 2011, 105(3): 190-200.