文章编号: 1673-3193(2025)02-0245-09 J. North Univ. China, Nat. Sci. Ed., 2025, 46(2): 245-253.

具有标准发生率及饱和治疗函数的随机SIS传染病模型的灭绝性和持久性

谭 杨[1], 杨 林[1], 郭子君[2]

(1. 铜仁职业技术学院 信息工程学院, 贵州 铜仁 554300; 2. 华南农业大学 应用数学研究所, 广东 广州 510642)

摘 要: 研究了一类具有标准发生率和饱和治疗函数的随机易感-感染-易感(SIS)传染病模型。首先, 利用构造李雅普诺夫函数方法证明了模型正解的存在、唯一性。然后, 在灭绝性方面得到了感染种群趋于普通灭绝和依指数灭绝的充分条件, 其结果表明, 随机基本再生数小于1时, 感染种群必将趋于灭绝, 而依指数灭绝则需要更强的条件。在持久性方面, 得到了感染种群趋于依平均持久和随机持久的充分条件, 其结果表明, 随机基本再生数大于1时, 感染种群随机持久, 而依平均持久需要更强的条件才能满足。最后, 通过数值模拟进行了结果验证。

关键词: SIS模型; 标准发生率; 饱和治疗函数; 灭绝性; 持久性

中图分类号: O211.63 **文献标识码**: A **doi**: 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2023.09.0018

引用格式: 谭杨, 杨林, 郭子君. 具有标准发生率及饱和治疗函数的随机SIS传染病模型的灭绝性和持久性[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2025, 46(2): 245-253.

TAN Yang, YANG Lin, GUO Zijun. Extinction and persistence of a stochastic sis epidemic model with standard incidence and saturated treatment functions[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2025, 46(2): 245-253.

Extinction and Persistence of a Stochastic SIS Epidemic Model with Standard Incidence and Saturated Treatment Functions

TAN Yang[1], YANG Lin[1], GUO Zijun[2]

(1. School of Information Engineering, Tongren Polytechnic College, Tongren 554300, China;
2. Institute of Applied Mathematics, South-China Agricultural University, Guangzhou 510642,China)

Abstract: A stochastic susceptibility infection-susceptibility (SIS) epidemic model with standard incidence and saturated treatment function was studied. Firstly, the existence and uniqueness of the positive solution of the model were proved by constructing Lyapunov function. Then, in terms of extinction, the sufficient conditions for the infected population to tend to general extinction and exponential extinction were obtained. The results show that the infected populations will tend to extinction when the stochastic basic reproduction number is less than 1, while the exponential extinction requires stronger conditions. In terms of persistence, sufficient conditions were obtained for the persistence in the mean and stochastic persistence of the infected population. The results show that the infected populations are stochastically persistent when the stochastic basic reproduction number is greater than 1, while the persistence in the mean required stronger conditions. Finally, numerical simulation was given to prove the research results.

Key words: SIS epidemic model; standard incidence; saturated treatment function; extinction; persistence

---

收稿日期: 2023-09-18

作者简介: 谭 杨(1980-), 男, 教授, 硕士, 主要从事生物数学模型及可视化研究。E-mail: 553129685@qq.com。

0 引 言

近年来，传染病数学模型对人们研究和控制疾病的传播起到了很大作用[1]。经典的传染病模型被称为易感者-感染者-移出者(SIR)模型[2]，是在1918年流感大流行十年后被提出并开始研究的，该模型已被广泛用于为一系列传染病建模，并已扩展到允许再次感染、潜伏感染和物种之间的相互作用。然而对于某些疾病，如性传播疾病和细菌性疾病等，并没有永久的免疫力，受感染或治愈后的人可能会再次易感。因此，易感-感染-易感(SIS)模型成为描述此类传染病问题的一种非常简单但又常用的模型，用以描述无永久性免疫的疾病动态[3-5]。经典的确定性SIS模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=\mu N-\beta S(t)I(t)+\gamma I(t)-\mu S(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-(\mu+\gamma)I(t),\end{cases}\tag{1}$$

式中：$N=S_0+I_0$为易感种群与感染种群初始总的数量或密度；$S(t)$和$I(t)$分别为易感种群及感染种群在t时刻的数量或密度；μ为增长率；γ为恢复率；β为易感种群与感染种群的接触系数；$\beta S(t)I(t)$称为发生函数。Wei等[6]假设感染者的接触率与总人口成比例，引入的标准发生率函数为$\dfrac{\beta S(t)I(t)}{S(t)+I(t)}$。

对于传染病，治疗是减少疾病传播的重要因素。当严重的传染病肆意蔓延时，会带来感染人数和死亡人数的爆炸性增长，这足以使公共服务和经济生产力暂时瘫痪。如果感染者得不到及时治疗，那么累积的感染者数量后期可能超过当地医疗系统的承受能力。在这种情况下，从感染种群恢复到易感种群的数量将达到最大限度(饱和)，也就是说，如果感染种群数量超过一个固定的数字，那么康复者的数量与感染种群数量的进一步变化无关。因此，在建模过程中需要考虑到饱和恢复率对传染病发展的影响。Chen[7]和Zhang[8]等提出的饱和治疗函数为$\dfrac{\beta I(t)}{1+hI(t)}$，其中，$\beta I(t)$表示传染强度，$\dfrac{1}{1+hI(t)}$表示疾病的传播受到一定措施的干预，$h$称为半饱和系数。Cui等[9]的模型中的治疗函数为$\dfrac{cI(t)}{b+I(t)}$，其中，c表示单位时间的最大恢复率，b表示半饱和系数。最终得到的SIS模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=A-dS(t)-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{S(t)+I(t)}+rI(t)+\dfrac{cI(t)}{b+I(t)},\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta S(t)I(t)}{S(t)+I(t)}-(d+r)I(t)-\dfrac{cI(t)}{b+I(t)},\end{cases}\tag{2}$$

式中：A为种群的常数增加率；d为死亡率；r为自然恢复率。

现实世界不可避免地会受到环境因素的影响，因此，在确定性模型中引入环境干扰项将更加贴近实际，可以帮助我们进一步理解传染病病模型的动态行为。Gray等[10]提出接触率β受到随机白噪声干扰时，β变为$\tilde{\beta}$。

$$\tilde{\beta}\mathrm{d}t=\beta\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t),$$

式中：$\mathrm{d}B(t)=B(t+\mathrm{d}t)-B(t)$表示标准布朗运动的增量，其模型为

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=[\mu-\beta S(t)I(t)-\mu S(t)]\mathrm{d}t-\sigma S(t)I(t)\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}I(t)=[\beta S(t)I(t)-(\mu+\gamma)I(t)]\mathrm{d}t+\sigma S(t)I(t)\mathrm{d}B(t)。\end{cases}\tag{3}$$

Gray等[10]在证明模型(3)解的存在唯一性的基础上得到了感染种群趋于灭绝及持续存在的充分条件。Li等[11]研究了具有非线性(饱和)发生率的随机SIS传染病模型

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=\left[A-\mu S(t)-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}+\lambda I(t)\right]\mathrm{d}t-\dfrac{\sigma S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}I(t)=\left[\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}-(\mu+\lambda)I(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\sigma S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}\mathrm{d}B(t)。\end{cases}\tag{4}$$

本文在确定性模型(2)的基础上提出接触率β受到随机白噪声干扰的SIS模型

$$\begin{cases}\mathrm{d}S=\left[A-\mu S-\dfrac{\beta SI}{S+I}+rI+\dfrac{cI}{b+I}\right]\mathrm{d}t-\dfrac{\sigma SI}{S+I}\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}I=\left[\dfrac{\beta SI}{S+I}-(\mu+r)I-\dfrac{cI}{b+I}\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\sigma SI}{S+I}\mathrm{d}B(t),\end{cases}\tag{5}$$

式中：μ为死亡率；σ为干扰强度。

由式(5)有

$$d(S+I)=[A-\mu(S+I)]dt,$$

即

$$\lim_{t\to\infty}(S(t)+I(t))=\frac{A}{\mu}:=N,$$

则模型(5)的极限模型可表示为

$$dI=\left[\frac{\beta(N-I)I}{N}-(\mu+r)I-\frac{cI}{b+I}\right]dt+\frac{\sigma(N-I)I}{N}dB, \tag{6}$$

初始值为$I_0\in(0,N)$。

1 随机模型解的存在和唯一性

本节将证明对任意给定的初始值$I(0)=I_0\in(0,N)$，模型(6)的解全局存在于$(0,N)$中。

定理1 对任意给定的初值$I(0)=I_0\in(0,N)$，模型(6)存在唯一解，且该解依概率1存在于$(0,N)$中，即

$$P\{I(t)\in(0,N),\forall t\geqslant 0\}=1。$$

证明 容易验证模型(6)的系数满足局部Lipschitz连续性条件，则对任意给定的初值$I(0)\in(0,N)$，模型(6)在$t\in[0,\tau_e)$存在唯一的局部解，τ_e为爆炸时刻[12-13]。设$k_0\geqslant 0$足够大使得$\frac{1}{k_0}<I_0<N-I_0$。对任意给定的正数$k\geqslant k_0$，定义停时

$$\tau_k=\inf\left\{t\in[0,\tau_e):I(t)\notin\left(\frac{1}{k},N-\frac{1}{k}\right)\right\},$$

且令$\inf\varnothing=\infty$（$\varnothing$表示空集），显然，τ_k是递增的。令$\tau_\infty=\lim_{k\to\infty}\tau_k$，则必有$\tau_\infty\leqslant\tau_e$ a. s. 若能证明$\tau_\infty=\infty$ a. s.，则有$\tau_e=\infty$ a. s. 且$I(t)\in(0,N)$ a. s.。设$\tau_e=\infty$ a. s. 不成立，则存在$T>0$和$\varepsilon\in(0,1)$使得

$$P(\tau_\infty\leqslant T)>\varepsilon。$$

于是，存在正整数$k_1\geqslant k_0$使得

$$P(\tau_k\leqslant T)\geqslant\varepsilon,\forall k\geqslant k_1。$$

定义函数$V:(0,N)\to R_+$

$$V(I)=-\log I-\log(N-I)+\log\frac{N^2}{4},$$

则由Itô公式，对任意$t\in[0,T]$及$k\geqslant k_1$可得

$$EV(I(t\wedge\tau_k))=V(I_0)+E\int_0^{t\wedge\tau_k}LV(I(s))ds+E\int_0^{t\wedge\tau_k}\frac{\sigma(2I-N)}{N}dB(s), \tag{7}$$

其中，$E\int_0^{t\wedge\tau_k}\frac{\sigma(2I-N)}{N}dB(s)=0$且

$$LV(I)=-\frac{\beta(N-I)}{N}+(\mu+r)+\frac{c}{b+I}+\frac{\sigma^2(N-I)^2}{2N^2}+\frac{\beta I}{N}-\frac{(\mu+r)I}{N-I}-\frac{cI}{(b+I)(N-I)}+\frac{\sigma^2I^2}{2N^2}\leqslant\beta+\mu+r+\frac{c}{b}+\sigma^2:=C>0, \tag{8}$$

其中，$I\in(0,N)$，C为正常数。则有

$$EV(I(t\wedge\tau_k))\leqslant V(I_0)+E\int_0^{t\wedge\tau_k}Cds\leqslant V(I_0)+Ct。$$

令$\Omega_k=\{\tau_k\leqslant T\}$，$k\geqslant k_1$，则$P(\Omega_k)\geqslant\varepsilon$。对每一个$\omega\in\Omega_k$，必有$I(\tau_k,\omega)$等于$1/k$或$N-1/k$，于是，$V(I(\tau_k,\omega))=\log\frac{kN^2}{4(N-1/k)}$，则

$$\infty>V(I_0)+CT\geqslant E[I_{\Omega_k}(\omega)V(I(\tau_k,\omega))]\geqslant P(\Omega_k)\log\frac{kN^2}{4(N-1/k)}=\varepsilon\log\frac{kN^2}{4(N-1/k)}。 \tag{9}$$

令$k\to\infty$，则$\infty>V(I_0)+CT=\infty$。因此，必有$\tau_\infty=\infty$ a. s.。证毕。

2 灭绝性

感染种群是否趋于灭绝是传染病模型的重要性质之一。本节得到了感染种群趋于普通灭绝和依指数灭绝的充分条件。在证明之前需先给出假设条件。

假设 令$x(t)$为随机微分方程(10)的非爆炸解。

$$dx(t)=f(x(t))dt+g(x(t))dB(t),\ x(0)\in R_+, \tag{10}$$

且该解满足

1） $\forall x\in Y$，$g^2(x)>0$；

2）$\forall x\in Y$，$\exists\varepsilon>0$，使得$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1+|f(s)|}{g^2(s)}ds<+\infty$，其中，$Y=(a,b)$，$-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$。

再设$m\in Y$为一确定的常数，定义函数如下：

$$p(x)=\int_m^x\exp\left\{-2\int_m^y\frac{f(u)}{g^2(u)}du\right\}dy,$$

$$m\in Y=(a,b),$$

$$\alpha(x)=\int_0^x\exp\left\{2\int_0^yf(u)du\right\}dy,$$

$$\beta(x)=\int_0^x\exp\left\{-2\int_0^yf(u)du\right\}dy,\ x\in Y=(a,b)。$$

下面再给出两个引理[14-15]：

引理 1 如果前面的假设成立，令$x(t)$为随机微分方程(10)在$Y=(a,b)$上的非爆炸解。若$p(a^{+})>-\infty$，$p(b^{-})=+\infty$，则

$$P\left\{\lim_{t\to+\infty}x(t)=a\right\}=P\left\{\sup_{t\geqslant 0}x(t)<b\right\}=1。$$

引理 2 如果模型(10)在有限时间内存在一个非爆炸性解$x(t)$，且该解依概率1唯一。若

$$\alpha(+\infty)<+\infty,\ \alpha(-\infty)=-\infty,\ \beta(+\infty)=+\infty,\ \beta(-\infty)=-\infty,$$

则$\forall\Gamma\in\mathbf{R}^{+}$，$P\left\{\lim_{t\to+\infty}x(t)<\Gamma\right\}=1$，即$x(t)$依概率1趋于$-\infty$。

现证明感染种群$I(t)$的灭绝性。

定理 2 令$I(t)$为模型(6)的解，初始条件为$I(0)=I_0\in(0,N)$。若$R_0^s<1$，则

$$P\left\{\lim_{t\to+\infty}I(t)=0\right\}=1,$$

即$I(t)$依概率1趋于灭绝。其中，根据文献[7]确定性模型的基本再生数$R_0^d=\dfrac{b\beta}{b(\mu+r)+c}$，定义随机基本再生数为

$$R_0^s:=R_0^d-\frac{b\sigma^2}{2b(\mu+r)+2c}=\frac{b(2\beta-\sigma^2)}{2b(\mu+r)+2c}。$$

证明 令

$$f(I)=\frac{\beta(N-I)I}{N}-(\mu+r)I-\frac{cI}{b+I},$$

$$g(I)=\frac{\sigma(N-I)I}{N},$$

可得

$$2\int_m^y\frac{f(u)}{g^2(u)}\mathrm{d}u=2\frac{\beta N}{\sigma^2}\int_m^y\frac{1}{(N-u)u}\mathrm{d}u-2\frac{(\mu+r)N^2}{\sigma^2}\int_m^y\frac{1}{(N-u)^2u}\mathrm{d}u-2\frac{cN^2}{\sigma^2}\int_m^y\frac{1}{(N-u)^2u(b+u)}\mathrm{d}u=$$

$$2\frac{\beta}{\sigma^2}\int_m^y\left(\frac{1}{N-u}+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u-2\frac{(\mu+r)}{\sigma^2}\int_m^y\left(\frac{1}{N-u}+\frac{1}{u}+\frac{N}{(N-u)^2}\right)\mathrm{d}u-$$

$$2\frac{cN^2}{\sigma^2}\int_m^y\left[\frac{2N+b}{N^2(N+b)^2}\frac{1}{(N-u)}+\frac{1}{bN^2}\frac{1}{u}+\frac{1}{N(N+b)}\frac{1}{(N-u)^2}\right]\mathrm{d}u=$$

$$a_1\int_m^y\frac{1}{N-u}\mathrm{d}u-a_2\int_m^y\frac{1}{(N-u)^2}\mathrm{d}u+a_3\int_m^y\frac{1}{b+u}\mathrm{d}u+a_4\int_m^y\frac{1}{u}\mathrm{d}u=$$

$$a_1[\ln(N-y)-\ln(N-m)]-a_2\left[\frac{1}{N-y}-\frac{1}{N-m}\right]+a_3[\ln(b+y)-\ln(b+m)]+a_4[\ln y-\ln m]=$$

$$a_1\ln(N-y)-a_2\frac{1}{N-y}+a_3\ln(b+y)+a_4\ln y+M_m,$$

其中

$$a_1=\left[\frac{2\beta}{\sigma^2}-\frac{2(\mu+r)}{\sigma^2}-\frac{2c}{\sigma^2}\frac{(2N+b)}{(N+b)^2}\right],$$

$$a_2=\left[\frac{2(\mu+r)N}{\sigma^2}+\frac{2cN}{\sigma^2}\frac{1}{(N+b)}\right]>0,$$

$$a_3=\left[\frac{2cN^2}{\sigma^2}\frac{1}{b(N+b)^2}\right]>0,$$

$$a_4=\left[\frac{2\beta}{\sigma^2}-\frac{2(\mu+r)}{\sigma^2}-\frac{2c}{\sigma^2b}\right],$$

$$M_m=-a_1\ln(N-m)+a_2\frac{1}{N-m}-a_3\ln(b+m)-a_4\ln m,$$

则有

$$p(I)=\int_m^I\exp\left\{-2\int_m^y\frac{f(u)}{g^2(u)}\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}y=$$

$$\int_m^I\exp\left\{-a_1\ln(N-y)+a_2\frac{1}{N-y}-a_3\ln(b+y)-a_4\ln y-M_m\right\}\mathrm{d}y=$$

$$\mathrm{e}^{-M_m}\int_m^I y^{-a_4}(b+y)^{-a_3}(N-y)^{-a_1}\exp\left\{\frac{a_2}{N-y}\right\}\mathrm{d}y。\tag{11}$$

令$I\to N^{-}$，

$$p(N^{-})\geqslant\mathrm{e}^{-M_m}m^{\frac{2b(\mu+\upsilon)+2c}{b\sigma^2}}N^{-\frac{2\beta}{\sigma^2}}(b+N)^{-a_3}\cdot\int_m^{N^{-}}\left(\frac{1}{N-y}\right)^{-a_1}\exp\left\{\frac{a_2}{N-y}\right\}\mathrm{d}y。$$

令 $\frac{1}{N-y}=z$，则

$$p(N^-)\geqslant e^{-M_m}m^{\frac{2b(\mu+\upsilon)+2c}{b\sigma^2}}N^{-\frac{2\beta}{\sigma^2}}(b+N)^{-a_3}\int_{\frac{1}{N-m}}^{+\infty}z^{-a_1-2}\exp\{a_2z\}\mathrm{d}z。$$

因 $a_2=\left[\frac{2(\mu+r)N}{\sigma^2}+\frac{2cN}{\sigma^2}\frac{1}{(N+b)}\right]>0$，则

$$p(N^-)\geqslant e^{-M_m}m^{\frac{2b(\mu+r)+2c}{b\sigma^2}}N^{-\frac{2\beta}{\sigma^2}}(b+N)^{-a_3}\int_{\frac{1}{N-m}}^{+\infty}z^{-a_1-2}\exp\{a_2z\}\mathrm{d}z\to+\infty。$$

又当 $R_0^s<1$ 时，即 $a_4=\left[\frac{2\beta}{\sigma^2}-\frac{2(\mu+r)}{\sigma^2}-\frac{2c}{\sigma^2b}\right]<1$时，令$I\to0^+$，可得

$$\begin{aligned}-p(0^+)&=e^{-M_m}\int_0^m y^{-a_4}(b+y)^{-a_3}(N-y)^{-a_1}\exp\left\{\frac{a_2}{N-y}\right\}\mathrm{d}y\leqslant\\&e^{-M_m}N^{\frac{2(\mu+r)}{\sigma^2}+\frac{2c}{\sigma^2}\frac{(2N+b)}{(N+b)^2}}(N-m)^{-\frac{2\beta}{\sigma^2}}b^{-a_3}\exp\left\{\frac{a_2}{N-m}\right\}\int_0^m y^{-a_4}\mathrm{d}y=\\&e^{-M_m}N^{\frac{2(\mu+r)}{\sigma^2}+\frac{2c}{\sigma^2}\frac{(2N+b)}{(N+b)^2}}(N-m)^{-\frac{2\beta}{\sigma^2}}b^{-a_3}\exp\left\{\frac{a_2}{N-m}\right\}\frac{1}{1-a_4}m^{1-a_4}<+\infty,\end{aligned}\tag{12}$$

即得

$$p(0^+)>-\infty。\tag{13}$$

结合式(11)和式(12)可得结果，证毕。

下面给出感染种群几乎处处依指数趋于灭绝的充分条件。

定理 3 设$I(t)$为模型(6)的解，初始条件为$I(0)=I_0\in(0,N)$且$R_0^s<1$，若

$\frac{\beta}{\sigma^2}<1$ 且 $\frac{\beta^2}{2\sigma^2}-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}<0$ 或 $\frac{\beta}{\sigma^2}\geqslant1$，则$I(t)$几乎处处依指数趋于灭绝。

证明 由Itô引理有

$$\frac{\ln I(t)}{t}=\frac{\ln I(0)}{t}+\frac{1}{t}\int_0^t LV(I(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{t}\int_0^t\frac{\sigma}{N}(N-I(s))\mathrm{d}B(s),\tag{14}$$

其中

$$LV(I)=\left[\frac{\beta}{N}(N-I)-(\mu+r)-\frac{c}{b+I}-\frac{\sigma^2}{2N^2}(N-I)^2\right],I\in(0,N)。$$

由文献[12]中关于鞅的强大数定律可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\frac{\sigma}{N}(N-I(s))\mathrm{d}B(s)=0\ \text{a.s.}。$$

因$R_0^s=\frac{b(2\beta-\sigma^2)}{2b(\mu+r)+2c}<1$，则

$$LV(0)=\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b}-\frac{\sigma^2}{2}<0。$$

又有

$$LV(N)=-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}<0。$$

令

$$k(I)=\frac{\beta}{N}(N-I)-(\mu+r)-\frac{\sigma^2}{2N^2}(N-I)^2,$$

则当 $I=\hat{I}=N\left(1-\frac{\beta}{\sigma^2}\right)$ 时，$k(I)$取得最大值 $\hat{k}(I)=\frac{\beta^2}{2\sigma^2}-(\mu+\upsilon)$。

1） 若$\frac{\beta}{\sigma^2}<1$，则需$\frac{\beta^2}{2\sigma^2}-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}<0$使得$LV(I)$的最大值小于0；

2）若$\frac{\beta}{\sigma^2}\geqslant1$，必有$LV(I)$的最大值小于0。

以上条件说明，当$\frac{\beta}{\sigma^2}<1$且$\frac{\beta^2}{2\sigma^2}-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}<0$或$\frac{\beta}{\sigma^2}\geqslant1$时，必存在常数$K>0$，使得

$$LV(I)\leqslant-K<0,$$

则

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln I(t)}{t}\leqslant\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln I(0)}{t}-K=-K\ \text{a.s.},$$

即几乎处处依指数趋于灭绝，证毕。

3　持久性

本节研究模型(6)中感染种群长期存在的条件。这里给出关于持续存在性的两种定义并得到了干扰种群持续长期存在的条件。首先介绍持久性的概念和定义，其中，

令$\langle I(t)\rangle=\frac{1}{t}\int_0^t I(s)\mathrm{d}s$。

定义 1[16] $I(t)$称为依平均持久，若

$$0<\underline{I}\leqslant\liminf_{t\to\infty}\langle I(t)\rangle\leqslant\limsup_{t\to\infty}\langle I(t)\rangle\leqslant\bar{I}\ \text{a.s.},$$

其中，$\underline{I}$和$\bar{I}$为正常数。

下面证明模型(6)的解依平均持久的定理条件。

定理 4 设 $R_0^s=\dfrac{b(2\beta-\sigma^2)}{2b(\mu+r)+2c}>1$，则当 $\beta-\sigma^2>0$ 时，对于任意给定的初值 $I_0\in(0,N)$，染病种群 $I(t)$ 依平均持久。

证明 由(14)式可知

$$LV(I)=\left[\frac{\beta}{N}(N-I)-(\mu+r)-\frac{c}{b+I}-\frac{\sigma^2}{2N^2}(N-I)^2\right],$$

则

$$\frac{\ln I(t)}{t}\leqslant\frac{\ln I_0}{t}+\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}-\frac{\beta-\sigma^2}{N}\langle I(t)\rangle-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{M(t)}{t}。\tag{15}$$

其中，$M(t)=\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t\frac{\sigma}{N}(N-I(s))\mathrm{d}B(s)$ 为鞅且 $M(0)=0$，则根据强大数定律[12]有 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{M(t)}{t}=0$ a.s.，因此，

$$\limsup_{t\to\infty}\langle I(t)\rangle\leqslant\frac{N}{\beta-\sigma^2}\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}-\frac{\sigma^2}{2}\right]\ \text{a.s.}。$$

若 $R_0^s=\dfrac{b(2\beta-\sigma^2)}{2b(\mu+r)+2c}>1$，即 $\beta-(\mu+r)-\dfrac{c}{b}-\dfrac{\sigma^2}{2}>0$，则必有 $\beta-(\mu+r)-\dfrac{c}{b+N}-\dfrac{\sigma^2}{2}>0$。又当 $\beta-\sigma^2>0$ 时，$\limsup\limits_{t\to\infty}\langle I(t)\rangle\leqslant\dfrac{N}{\beta-\sigma^2}\left[\beta-(\mu+r)-\dfrac{c}{b+N}-\dfrac{\sigma^2}{2}\right]>0$ a.s.。

另有

$$LV(I)=\left[\frac{\beta}{N}(N-I)-(\mu+r)-\frac{c}{b+I}-\frac{\sigma^2}{2N^2}(N-I)^2\right],$$

$$\frac{\ln I(t)}{t}\geqslant\frac{\ln I_0}{t}+\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b}-\frac{\beta}{N}\langle I(t)\rangle-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{M(t)}{t},$$

则

$$\liminf_{t\to\infty}\langle I(t)\rangle\geqslant\frac{N}{\beta}\left[\beta-(\mu+\upsilon)-\frac{c}{b}-\frac{\sigma^2}{2}\right]\text{a.s.}。$$

若 $R_0^s=\dfrac{b(2\beta-\sigma^2)}{2b(\mu+r)+2c}>1$，即 $\beta-(\mu+r)-\dfrac{c}{b}-\dfrac{\sigma^2}{2}>0$，则

$$\liminf_{t\to\infty}\langle I(t)\rangle\geqslant\frac{N}{\beta}\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b}-\frac{\sigma^2}{2}\right]>0\ \text{a.s.}。$$

令

$$\bar{I}=\frac{N}{\beta-\sigma^2}\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}-\frac{\sigma^2}{2}\right],$$

$$\underline{I}=\frac{N}{\beta}\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b}-\frac{\sigma^2}{2}\right]。$$

证毕。

下面给出另外一个关于持久性的定义[5]：

定义 2[5] 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$ 及初值 $I_0\in(0,N)$，若存在一对正常数 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$ 与 $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$ 使得模型(6)的解满足

$$\liminf_{t\to\infty}P\{I(t)\leqslant\delta_1\}\geqslant1-\varepsilon,$$
$$\liminf_{t\to\infty}P\{I(t)\geqslant\delta_2\}\geqslant1-\varepsilon,\tag{16}$$

则称模型(6)的解随机持久。

定理 5 若 $R_0^s>1$，则对任意给定的初值 $I_0\in(0,N)$，模型(6)的解随机持久。

证明 设 $1<\theta\leqslant2$，由 Itô 引理可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}I^\theta=&\theta I^\theta\left[\frac{\beta(N-I)}{N}-(\mu+r)-\frac{c}{b+I}+\frac{(\theta-1)\sigma^2(N-I)^2}{2N^2}\right]\mathrm{d}t+\theta I^\theta\frac{\sigma(N-I)}{N}\mathrm{d}B(t)=\\&\theta I^\theta\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b+I}+\frac{(\theta-1)\sigma^2}{2}\right]\mathrm{d}t-\theta I^{\theta+1}\left[\frac{\beta}{N}+\frac{(\theta-1)\sigma^2}{2N}\right]\mathrm{d}t+\frac{\theta(\theta-1)\sigma^2}{2N^2}I^{\theta+2}\mathrm{d}t+\\&\theta I^\theta\frac{\sigma(N-I)}{N}\mathrm{d}B(t)\leqslant\\&\theta\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}+(\theta-1)\sigma^2\right]I^\theta\mathrm{d}t-\theta\left[\frac{\beta}{N}+\frac{(\theta-1)\sigma^2}{2N}\right]I^{\theta+1}\mathrm{d}t+\theta I^\theta\frac{\sigma(N-I)}{N}\mathrm{d}B(t)\end{aligned}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}E(I^\theta)}{\mathrm{d}t}\leqslant\theta\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}+(\theta-1)\sigma^2\right]E(I^\theta)-\theta\left[\frac{\beta}{N}+\frac{(\theta-1)\sigma^2}{2N}\right][E(I^\theta)]^{\frac{\theta+1}{\theta}}=$$

$$\theta E(I^{\theta})\left\{\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}+(\theta-1)\sigma^2\right]-\left[\frac{\beta}{N}+\frac{(\theta-1)\sigma^2}{2N}\right][E(I^{\theta})]^{\frac{1}{\theta}}\right\}。$$

令 $z(t)=E(I^{\theta})$，则有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\leqslant\theta z(t)\left\{\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}+(\theta-1)\sigma^2\right]-\left[\frac{\beta}{N}+\frac{(\theta-1)\sigma^2}{2N}\right]z^{\frac{1}{\theta}}(t)\right\}。$$

又 $R_0^s=\dfrac{2b\beta-2b(\mu+r)-2c}{b\sigma^2}>1$，即 $\beta-(\mu+\upsilon)-\dfrac{c}{b}-\dfrac{\sigma^2}{2}>0$，则必有

$$\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}+(\theta-1)\sigma^2>0。$$

若

$$0<\left[\frac{\beta}{N}+\frac{(\theta-1)\sigma^2}{2N}\right]z^{\frac{1}{\theta}}(0)=\left[\frac{\beta}{N}+\frac{(\theta-1)\sigma^2}{2N}\right]I(0)<\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b+N}+(\theta-1)\sigma^2\right],$$

则由常微分方程的比较定理可得

$$[E(I^{\theta})]^{\frac{1}{\theta}}=z^{\frac{1}{\theta}}(t)\leqslant M(\theta),$$

其中，

$$M(\theta)=\frac{\left[\beta-(\mu+r)-\dfrac{c}{b+N}+(\theta-1)\sigma^2\right]}{\left[\dfrac{\beta}{N}+\dfrac{(\theta-1)\sigma^2}{2N}\right]}>0,$$

即有 $E(I^{\theta})\leqslant M^{\theta}(\theta)>0$。

对任意小的 $\varepsilon>0$，令 $\delta_1=\dfrac{M(\theta)}{\varepsilon^{1/\theta}}$，则由切比雪夫不等式可得

$$P\{I(t)>H\}\leqslant E(I^{\theta}(t))/{\delta_1}^{\theta}=\varepsilon,$$

即 $\liminf\limits_{t\to\infty}P\{I(t)\leqslant\delta_1\}\geqslant1-\varepsilon$。

再由 Itô 引理有

$$\mathrm{d}I^{-1}=-I^{-1}\left[\frac{\beta(N-I)}{N}-(\mu+r)-\frac{c}{b+I}-\frac{\sigma^2(N-I)^2}{2N^2}\right]\mathrm{d}t-\frac{\sigma(N-I)}{N}\mathrm{d}B(t)\leqslant$$
$$-I^{-1}\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b}-\frac{\sigma^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\frac{2\beta-\sigma^2}{2N}\mathrm{d}t-\frac{\sigma(N-I)}{N}\mathrm{d}B(t)。$$

又因 $R_0^s=\dfrac{2b\beta-2b(\mu+r)-2c}{b\sigma^2}>1$，即 $\beta-(\mu+\upsilon)-\dfrac{c}{b}-\dfrac{\sigma^2}{2}>0$，则必有 $2\beta-\sigma^2>0$，即

$$K:=\left[\beta-(\mu+r)-\frac{c}{b}-\frac{\sigma^2}{2}\right]>0。$$

并且

$$\frac{\mathrm{d}E(I^{-1})}{\mathrm{d}t}\leqslant-KE(I^{-1})+M,$$

其中，$M=\dfrac{2\beta-\sigma^2}{2N}$。

由比较定理可得

$$E(I^{-1}(t))\leqslant\left\{E(I^{-1}(0))-\frac{M}{K}\right\}\exp(-Kt)+\frac{M}{K},$$

则

$$\limsup_{t\to\infty}E(I^{-1}(t))\leqslant\frac{M}{K}。$$

对任意小的 $\varepsilon>0$，令 $\delta_2=\dfrac{K\varepsilon}{M}$，则有

$$P\{I(t)<\delta\}=P\left\{I^{-1}(t)>\frac{1}{\delta_2}\right\}\leqslant\frac{E(I^{-1}(t))}{1/\delta_2}=\delta_2E(I^{-1}(t))=\varepsilon。$$

因此

$$\limsup_{t\to\infty}P\{I(t)<\delta_2\}\leqslant\varepsilon,$$

即 $\limsup\limits_{t\to\infty}P\{I(t)\geqslant\delta_2\}\geqslant1-\varepsilon$。

证毕。

4　数值模拟

本节对前面得到的结果进行数值模拟。

1）　令 $A=10$，$\beta=0.5$，$b=4$，$r=0.1$，$c=1.5$，$\mu=0.2$，$\sigma=0.1$，则

$R_0^d=\dfrac{b\beta}{b(\mu+r)+c}=0.740\,7<1$，$R_0^s=R_0^d-\dfrac{b\sigma^2}{2b(\mu+r)+2c}=0.733\,3<1$，仿真结果如图 1 所示，可以看出，确定性模型和随机模型的基本再生数都小于1，则传染病种群均趋于灭绝。

注　由 $R_0^s:=R_0^d-\dfrac{b\sigma^2}{2b(\mu+r)+2c}=\dfrac{(2\beta-\sigma^2)}{(\mu+r)+\dfrac{2c}{b}}$ 可以看出，只要这类传染病的干扰

强度足够大，则不论单位时间的最大恢复率c和半饱和系数b有多大，随机模型的传染病种群必将趋于灭绝；另一方面，只要单位时间的最大恢复率c和半饱和系数b的比值$\frac{c}{b}$足够大，确定性和随机模型中传染病种群必将趋于灭绝。

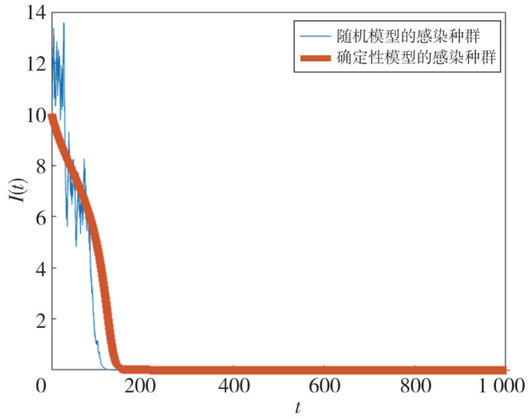

图1 确定性模型和随机模型的基本再生数均小于1的情形

Fig. 1 The situation at the basic reproduction number of deterministic and stochastic models being less than 1

2) 令$A=10$, $\beta=0.49$, $b=8$, $r=0.1$, $c=1.5$, $\mu=0.2$, $\sigma=0.15$，则$R_0^d=\dfrac{b\beta}{b(\mu+r)+c}=1.005\,1>1$, $R_0^s=R_0^d-\dfrac{b\sigma^2}{2b(\mu+r)+2c}=0.982\,1<1$。

仿真结果如图2所示，可以看出，确定性模型的传染病种群持续存在而随机模型的传染病种群趋于灭绝。

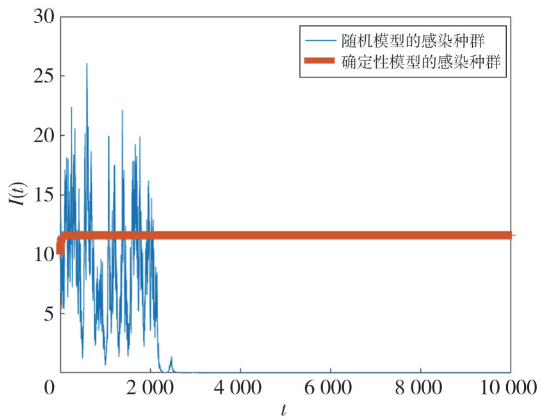

图2 确定性模型的感染种群持续存在而随机模型的感染种群趋于灭绝的情形

Fig. 2 The situation at the infectious population of deterministic models continuing to exist and the infectious population of stochastic models tending to extinct

3) 令$A=10$, $\beta=0.6$, $b=8$, $r=0.1$, $c=1.5$, $\mu=0.2$, $\sigma=0.15$，则

$$R_0^d=\frac{b\beta}{b(\mu+r)+c}=1.230\,8>1,$$

$$R_0^s=R_0^d-\frac{b\sigma^2}{2b(\mu+r)+2c}=1.207\,7>1,$$

$$\beta-\sigma^2=0.577\,5>0。$$

仿真结果如图3所示，可以看出，传染病种群在确定性模型中持久，在随机模型中依平均持久。

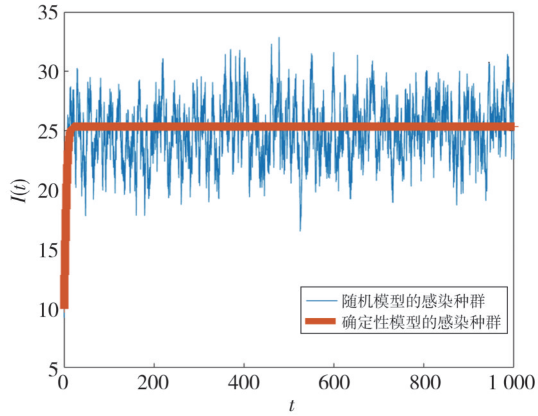

图3 确定性模型中感染种群持续存在且随机模型中感染种群依平均持久的第一种情形

Fig. 3 The first situation at the infected population persisting in deterministic model and persistence in the mean in stochastic model

4) 令$A=10$, $\beta=0.6$, $b=10$, $r=0.05$, $c=0.1$, $\mu=0.2$, $\sigma=0.8$，则

$$R_0^d=\frac{b\beta}{b(\mu+r)+c}=2.3077>1,$$

$$R_0^s=R_0^d-\frac{b\sigma^2}{2b(\mu+r)+2c}=1.076\,9>1,$$

$$\beta-\sigma^2=-0.04<0。$$

仿真结果如图4所示，可以看出，传染病种群在确定性模型中持久，在随机模型中随机持久。

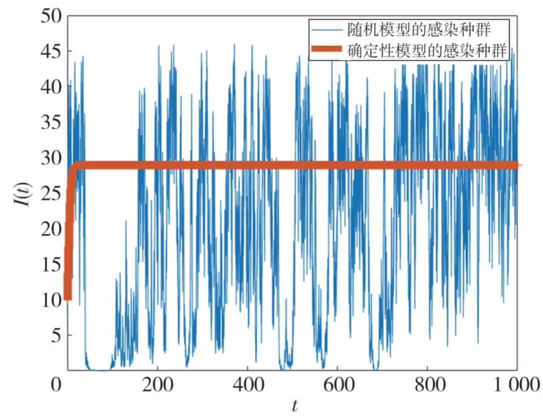

图4 确定性模型中感染种群持续存在且随机模型中感染种群依平均持久的第二种情形

Fig. 4 The second situation at the infected population persisting in deterministic model and persistence in the mean in stochastic model

5 结　论

本文研究了一类具有标准发病率和饱和治疗函数的随机易感-感染-易感(SIS)传染病模型。在证明模型解的存在、唯一性的前提下分别得到了该随机模型的感染种群关于两种灭绝性及两种随机持久性的充分条件，最后对得到的结论进行了数值模拟。结论如下：

1）灭绝性的结论表明，在本文的随机SIS模型中，只要随机干扰强度足够大，感染种群必将趋于灭绝，即传染病终将消失；

2）随机感染干扰项的存在，能够使得确定性模型中感染种群持续存在的结果改变为趋于灭绝。

参考文献：

[1] BONHOEFFER S，MAY R M，SHAW G M，et al. Virus dynamics and drug therapy[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America，1997，94(13)：6971-6976.

[2] KERMACK W O，MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A，1927，115：700-721.

[3] HETHCOTE H W，YORKE J A. Gonorrhea transmission dynamics and control[M]. Berlin：Springer Berlin Heidelberg，1984.

[4] SAFAN M，RIHAN F A. Mathematical analysis of an SIS model with imperfect vaccination and backward bifurcation[J]. Mathematics and Computers in Simulation，2014，96：195-206.

[5] JIANG D，SHI N，LI X. Global stability and stochastic permanence of a non-autonomous logistic equation with random perturbation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2008，340(1)：588-597.

[6] WEI J，CUI J A. Dynamics of SIS epidemic model with the standard incidence rate and saturated treatment function[J]. International Journal of Biomathematics，2012，5(3)：1260003.

[7] CHEN C，KANG Y. Dynamics of a stochastic SIS epidemic model with saturated incidence[J]. Abstract and Applied Analysis，2014：723825.

[8] ZHANG X，LIU X. Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2008，348(1)：433-443.

[9] CUI J，MU X，WAN H. Saturation recovery leads to multiple endemic equilibria and backward bifurcation[J]. Journal of Theoretical Biology，2008，254(2)：275-283.

[10] GRAY A，GREENHALGH D，HU L，et al. A stochastic differential equation SIS epidemic model[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics，2011，71(3)：876-902.

[11] LI F，MENG X Z，CUI Y J. Nonlinear stochastic analysis for a stochastic SIS epidemic model[J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications，2017，10(9)：5116-5124.

[12] MAO X. Stochastic differential equations and their applications[M]. Cambridge：Horwood Publishing Limited，Chichester，2008.

[13] MAO X，MARION G，RENSHAW E，et al. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics[J]. Stochastic Processes and Their Applications，2002，97(1)：95-110.

[14] KARATZAS I，SHREVE S E. Brownian motion and stochastic calculus[M]. New York：Springer Verlag，1988.

[15] 陈兰荪，陈键. 非线性生物动力系统[M]. 北京：科学出版社，1993.

[16] KHASMINSKII R Z. Stochastic stability of differential equations[M]. 2nd ed. Berlin：Springer，1980.