

# 具有密度依赖演化博弈模型的随机稳定性分析

孙霞<sup>1</sup>, 呼文军<sup>1,2</sup>, 刘婕<sup>1</sup>

(1. 中北大学 数学学院, 山西 太原 030051; 2. 吕梁学院 数学系, 山西 吕梁 033000)

**摘要:** 演化博弈提供了一种新的视角来审视和理解复杂系统中的互动行为, 为多个领域的研究提供了有力的工具和方法。现有文献大部分集中于对确定型生态博弈模型动力学行为的研究, 还未探索种群和环境的随机性对生态演化博弈动态的影响。基于此, 本文引入环境随机噪声, 构建了一个考虑个体出生率和死亡率的具有密度依赖的随机演化博弈动力学模型, 并对所建模型进行动力学分析, 以证实随机噪声对生态演化动态的影响。首先, 通过分析具有密度依赖的确定型生态演化博弈动力学模型的均衡点及其稳定性, 以及利用随机Lyapunov理论证明相应随机演化博弈模型的稳定性, 以说明噪声对具有密度依赖的生态演化博弈模型的影响。其次, 经研究得到了环境噪声的阈值, 当环境噪声值大于阈值时, 种群灭绝和表型消失是几乎必然指数稳定的, 反之, 当环境噪声值小于某一阈值时, 出生率较高表型的频率将在时间均值意义下持续存在。最后, 以猎鹿博弈模型为例进行理论验证及数值模拟, 证实了理论的有效性和可行性。研究结果也为理解环境波动如何促进表型多样性的进化提供了一个新的思路。

**关键词:** 演化博弈; 密度依赖; 几乎必然指数稳定; 随机Lyapunov理论; 稳定性

**中图分类号:** O175.1

**文献标识码:** A

**doi:** 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2024.02.0009

**引用格式:** 孙霞, 呼文军, 刘婕. 具有密度依赖演化博弈模型的随机稳定性分析[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2025, 46(1): 64-75.

SUN Xia, HU Wenjun, LIU Jie. Analysis of stochastic stability on evolutionary games model with density dependence[J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2025, 46(1): 64-75.

## Analysis of Stochastic Stability on Evolutionary Games Model with Density Dependence

SUN Xia<sup>1</sup>, HU Wenjun<sup>1,2</sup>, LIU Jie<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China;

2. Department of Mathematics, Lyuliang University, Lüliang 033000, China)

**Abstract:** Evolutionary games provide a new perspective to examine and understand interactive behaviors in complex systems, and provide powerful tools and methods for research in several fields. Much of the existing literature focuses on the study of the dynamical behavior of deterministic ecological game models, and doesn't explore the influence of population and environmental stochasticity on the dynamics of ecological evolutionary games. Thus, this paper considered environmental random noise, and constructed a stochastic evolutionary game dynamics model with density dependence considering individual birth and death rates. Dynamics of the constructed model was analyzed to confirm the effect of random noise on the

**收稿日期:** 2024-02-22

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(12371494); 山西省自然科学基金资助项目(2021L561)

**作者简介:** 孙霞(1999-), 女, 硕士, 主要从事演化博弈论、随机微分方程研究。

**通信作者:** 呼文军(1985-), 男, 副教授, 博士, 主要从事演化博弈论、随机微分方程研究。E-mail: huwj@llu.edu.cn.

trends of ecological evolution. Firstly, the effect of noise on ecological evolutionary game models with density dependence is shown by analyzing the equilibrium points and their stability of the dynamical models of ecological evolutionary games with density dependence indeed, and by proving the stability of the corresponding stochastic evolutionary game models using stochastic Lyapunov theory. Secondly, the threshold value of environmental noise was obtained from the study. When the environmental noise value is greater than the threshold, population extinction and phenotype disappearance are almost surely exponentially stable. Conversely, when the environmental noise value is less than a certain threshold, the frequency of phenotypes with higher birth rates is persistent in mean. Finally, the theoretical verification and numerical simulation were carried out with the deer hunting game model as an example to confirm the validity and feasibility of the theory. This result also provides a new idea for understanding how environmental fluctuations contribute to the evolution of phenotypic diversity.

**Key words:** evolutionary game; density dependence; almost sure exponential stability; stochastic Lyapunov theory; stability

## 0 引言

演化博弈理论源于 Willian Hamilton 和 Robert Trivers 等对物种间冲突与合作行为的博弈研究,在 1973 年 Smith 和 Price 提出演化稳定策略概念后正式形成<sup>[1]</sup>。演化博弈理论作为博弈论的一个分支对博弈论和生物进化理论都产生了重要影响,被广泛应用于各个领域<sup>[2-4]</sup>。演化博弈理论假设参与者是有限理性的,否定了经典博弈论中博弈方完全理性和完全信息的限制,将博弈的思想方法与动态演化过程相结合,研究从个体行为到群体行为的形成机制以及相关因素的影响,分析群体演化的动态过程,解释说明群体将达到何种稳定状态以及如何达到<sup>[5]</sup>。这一理论虽在很大程度上解决了经典博弈论中存在的问题,但未考虑环境中各种随机外部干扰对生物进化产生的影响。

事实上,现实环境总存在随机性和不确定性,随机噪声往往会对策略的演化产生影响。2015 年, Liang 等<sup>[6]</sup>研究了加性噪声对雪堆博弈的影响,并利用势函数法研究了系统的随机稳定性。2021 年, Liang 等<sup>[7]</sup>进一步描述了乘性噪声对一个混合良好种群中的两策略博弈的影响,并采用随机 Lyapunov 理论证明了进化对策的随机稳定性。2022 年, Yuan 等<sup>[8]</sup>在上述研究的基础上,利用 Itô's 公式等方法分析了带有乘性噪声的  $N$  人鹰鸽博弈模型的随机稳定性。2023 年, Feng 等<sup>[9]</sup>利用随机微分方程和随机过程扩散近似理论研究了随机囚徒困境博弈中的动力学特性。以上研究虽然是针对不同博弈模型,但结果均表明随机因素对策略的选择产生了重要影响,也为研究

随机博弈模型提供了方法。

与此同时,大量研究表明环境噪声会对生物种群以及生态系统的动态造成影响<sup>[10-13]</sup>,著名生态学家 May 也曾指出出生率、环境容纳量等一些参数都会在一定程度上呈现出随机波动<sup>[14-15]</sup>。2018 年,尹文倩等<sup>[16]</sup>研究了随机因素对带有时滞的捕食者食饵模型的影响,并对其随机生态模型进行了定性分析。2022 年, Jnawali 等<sup>[17]</sup>通过探索随机性对耦合社会生态系统的影响,发现随机性可以支持生态系统的持久性。2023 年,钟颖等<sup>[18]</sup>将白噪声引入到了具有混合功能反应和 Markov 切换的食饵-捕食者模型中,研究了种群在时间平均意义下持久和灭绝的条件。显然,随机因素的加入为很多模型研究赋予了更现实的意义。然而,关于将随机因素引入到生态进化博弈模型中的文献还很少,这是一个非常值得继续探索的方向。

在生态进化博弈模型中,考虑密度依赖是非常具有现实意义的。1987 年, Cressman 等<sup>[19]</sup>将密度依赖引入到进化博弈动力学中,从而将个体的适应度与预期收益联系起来。1988 年, Cressman<sup>[20]</sup>进一步将个体的预期收益假设为关于总种群大小的递减函数,并发展了密度依赖进化稳定策略的概念。2020 年, Tilman 等<sup>[21]</sup>的研究表明:现实系统中个体的适合度不仅取决于个体之间的交互作用,也取决于环境的状态,反之,环境的状态也会受到个体间相互作用的影响;策略与环境之间的双向反馈是普遍存在的。Tilman 等还建立了生态进化博弈论的框架,使得环境反馈与个体策略选择之间的联系得以具象化。2023 年, Wang 等<sup>[22]</sup>通过分析具有密度依赖的生态进化博弈动力学的稳定性进一步发展了生

态进化稳定策略的概念。

本研究遵循上述文献提出的生态进化博弈论的基本思想,在Wang等<sup>[22]</sup>关于具有密度依赖生态进化博弈动力学研究的基础上进一步优化拓展,并提出具有密度依赖的随机生态演化博弈动力学模型。与该研究<sup>[22]</sup>不同的是本文模型不仅涉及到个体的出生率和死亡率,还对出生率和死亡率设立了更贴近现实的假设。主要工作如下:

1) 首先考虑到资源的有限性,收益不可能无限大,根据种内竞争原理或密度制约效应,同时考虑选择某一策略的种群数量与选择该策略所得收益间的线性关系,从而引入制约因子,用生态学中经典的Logistic模型表示出生率。其次,生物种群系统不可避免地会受到环境噪声的影响,为使模型更具有现实意义,在上述基础上考虑随机噪声对其进化的影响,对死亡率进行扰动。最后建立相应具有密度依赖的随机生态演化博弈模型。

2) 针对1)中的确定型博弈模型进行了稳定性分析,分别研究了系统在不同均衡点处的稳定性。

3) 围绕提出的具有密度依赖的随机演化博弈模型,利用随机Lyapunov理论进行了随机演化稳定分析,得到了在时间均值意义下种群灭绝和表型消失是几乎必然指数稳定的噪声阈值,以及表型持续存在的噪声阈值。

4) 以经典的猎鹿博弈模型为例进行验证和数值模拟,证实了上述结论。

## 1 基本假设与模型

考虑一个总规模为 $N$ ,有两种表型 $H_1$ 、 $H_2$ 的种群。选择表型 $H_1$ 的频率为 $x$ ,选择表型 $H_2$ 的频率为 $1-x$ 。假设收益矩阵是密度相关的(收益矩阵取决于种群大小),则有

$$A(N) = \begin{bmatrix} a_{11}(N) & a_{12}(N) \\ a_{21}(N) & a_{22}(N) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中: $a_{ij}(N)$ 关于 $N$ 的导数小于零,即收益矩阵的每一项均为关于种群规模 $N$ 的递减函数。为了计算简便,令 $a_{ij}(N) = \alpha_{ij} - \beta_{ij}N$ , $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$ 均为大于零的常数, $i, j = 1, 2$ 。从而可以得到两种表型的期望收益 $H_1$ 、 $H_2$ 分别为

$$\pi_1 = xa_{11}(N) + (1-x)a_{12}(N) = \alpha_1 - \beta_1N,$$

$$\pi_2 = xa_{21}(N) + (1-x)a_{22}(N) = \alpha_2 - \beta_2N,$$

其中,

$$\alpha_i = x\alpha_{i1} + (1-x)\alpha_{i2}, \beta_i = x\beta_{i1} + (1-x)\beta_{i2},$$

$$i, j = 1, 2.$$

考虑环境对种群增长的制约作用,假设该种群的出生率符合Logistic增长模型,即

$$b_i = r \left( 1 - \frac{\pi_i}{k} \right), i, j = 1, 2,$$

式中: $b_i$ 为选择策略 $i$ 的群体的出生率; $r$ 为种群的固有增长率; $k$ 为在该环境下种群能够得到的最大收益量。同时假设死亡率为常数,用字母 $d$ 表示,且满足 $0 < d < 1$ 。

由上述假设可知,选择表型 $H_i$ 的个体数量 $n_i$ 的变化率为

$$\frac{dn_i}{dt} = n_i r \left( 1 - \frac{\pi_i}{k} \right) - n_i d. \quad (2)$$

因为 $x = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$ ,  $N = n_1 + n_2$ ,故可转化为

具有密度依赖的生态演化博弈动力学方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) \left[ r \left( 1 - \frac{\pi_1}{k} \right) - r \left( 1 - \frac{\pi_2}{k} \right) \right], \\ \frac{dN}{dt} = N \left[ xr \left( 1 - \frac{\pi_1}{k} \right) + (1-x)r \left( 1 - \frac{\pi_2}{k} \right) - d \right]. \end{cases} \quad (3)$$

由于物种发展多数会受到环境噪声影响,例如环境中常常会出现各种不确定因素,从而导致死亡率呈现出随机性,因此,分别在系统(2)和系统(3)的基础上对死亡率加扰动,考虑环境中的白噪声对模型的影响。针对系统(2),在噪声干扰下的选择表型 $H_1$ 的个体数量的变化率为

$$dn_1 = [n_1 r \left( 1 - \frac{\pi_1}{k} \right) - n_1 d] dt + \sigma n_1 dB(t).$$

考虑环境噪声的影响,得到具有密度依赖的随机演化博弈动力学模型

$$dx = \left[ xr \left( 1 - \frac{\pi_1}{k} \right) - xd \right] dt + \sigma x dB(t), \quad (4)$$

$$dN = N \left[ xr \left( 1 - \frac{\pi_1}{k} \right) + (1-x)r \left( 1 - \frac{\pi_2}{k} \right) - d \right] dt + \sigma N dB(t), \quad (5)$$

式中: $B(t)$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的标准布朗(Brownian)运动; $\sigma$ 为时刻 $t$ 的随机干扰强度,即白噪声强度。

## 2 确定型博弈模型演化稳定分析

本节讨论系统(3)在正区域内均衡点的稳定

性。令系统(3)的右端全部为零,得到以下方程组

$$\begin{cases} x(1-x)\left[r\left(1-\frac{\pi_1}{k}\right)-r\left(1-\frac{\pi_2}{k}\right)\right]=0, \\ N\left[xr\left(1-\frac{\pi_1}{k}\right)+(1-x)r\left(1-\frac{\pi_2}{k}\right)-d\right]=0. \end{cases}$$

为了简便,设

$$G(x, N) = xr\left(1-\frac{\pi_1}{k}\right) + (1-x)r\left(1-\frac{\pi_2}{k}\right) - d.$$

接下来分别讨论边界均衡点和内部均衡点的稳定性。考虑到均衡点的生物意义,除灭绝均衡点(0, 0)外,不考虑其他  $N=0$  的情况。

**定理 1** 边界均衡点的稳定性如下:

a) 当  $\alpha_{21}(N) > \alpha_{22}(N) > k\left(1-\frac{d}{r}\right)$  时, 即

$\alpha_{21} > \alpha_{22} > k\left(1-\frac{d}{r}\right)$  时, 边界均衡点(0, 0)是稳定的;

b) 当收益  $\alpha_{12}(N_1) > \alpha_{22}(N_1)$ , 边界均衡点(0,  $N_1$ )是鞍点;  $\alpha_{12}(N_1) < \alpha_{22}(N_1)$  时, 边界均衡点(0,  $N_1$ )是不稳定的;

c) 当收益  $\alpha_{21}(N_1) > \alpha_{11}(N_1)$  时, 边界均衡点(1,  $N_2$ )是鞍点;  $\alpha_{21}(N_1) < \alpha_{11}(N_1)$  时, 边界均衡点(1,  $N_2$ )是不稳定的。

**证明** a) 考虑边界  $x=0, N=0$  的情况, 得到系统(3)在均衡点(0, 0)处的 Jacobian 矩阵为

$$J|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial N} \\ \frac{\partial \dot{N}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{N}}{\partial N} \end{bmatrix} \Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{r}{k}(\alpha_{22} - \alpha_{21}) & 0 \\ \frac{\partial NG(x, N)|_{(0,0)}}{\partial x} & \frac{\partial NG(x, N)|_{(0,0)}}{\partial N} \end{bmatrix}.$$

通过计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial NG(x, N)|_{(0,0)}}{\partial N} &= \\ G(x, N)|_{(0,0)} + N \frac{\partial G(x, N)|_{(0,0)}}{\partial N} &= \\ r\left(1-\frac{\alpha_{22}}{k}\right) - d, \end{aligned}$$

故  $\alpha_{21} > \alpha_{22} > k\left(1-\frac{d}{r}\right)$  时,  $\frac{\partial NG(x, N)|_{(0,0)}}{\partial N} < 0$  且

$\frac{r}{k}(\alpha_{22} - \alpha_{21}) < 0$ , 边界均衡点(0, 0)是稳定的。由于  $N=0$ , 故上述条件也可描述为当满足  $\alpha_{21}(N) > \alpha_{22}(N) > k\left(1-\frac{d}{r}\right)$  时, 边界均衡点(0, 0)是稳定的。

b) 考虑边界  $x=0, N \neq 0$  的情况, 即  $xr\left(1-\frac{\pi_1}{k}\right) + (1-x)r\left(1-\frac{\pi_2}{k}\right) - d = 0$ 。将  $x=0$  以及  $\pi_2$  的表达式代入求解可得均衡点(0,  $N_1$ )。类似可得系统(3)在均衡点(0,  $N_1$ )处的 Jacobian 矩阵为

$$J|_{(0,N_1)} = \begin{bmatrix} \frac{r}{k} [a_{22}(N_1) - a_{12}(N_1)] & 0 \\ \frac{\partial NG(x, N)|_{(0,N_1)}}{\partial x} & \frac{\partial NG(x, N)|_{(0,N_1)}}{\partial N} \end{bmatrix}.$$

同理可得,  $\frac{\partial G(x, N)|_{(0,N_1)}}{\partial N} > 0$ , 故当收益

$\alpha_{12}(N_1) > \alpha_{22}(N_1)$  时, 即种群规模满足  $N_1 < \frac{\alpha_{12} - \alpha_{22}}{\beta_{12} - \beta_{22}}$  时, 边界均衡点(0,  $N_1$ )是鞍点; 当

$\alpha_{12}(N_1) < \alpha_{22}(N_1)$  时, 即种群规模满足  $N_1 > \frac{\alpha_{12} - \alpha_{22}}{\beta_{12} - \beta_{22}}$  时, 边界均衡点(0,  $N_1$ )是不稳定的。

c) 考虑边界  $x=1, N \neq 0$  的情况, 即  $xr\left(1-\frac{\pi_1}{k}\right) - d = 0$ , 将  $x=1$  以及  $\pi_1$  的表达式代入求解可得均衡点(1,  $N_2$ )。类似可得系统(3)在均衡点(1,  $N_2$ )处的 Jacobian 矩阵为

$$J|_{(1,N_2)} = \begin{bmatrix} \frac{r}{k} [a_{21}(N_2) - a_{11}(N_2)] & 0 \\ \frac{\partial NG(x, N)|_{(1,N_2)}}{\partial x} & \frac{\partial NG(x, N)|_{(1,N_2)}}{\partial N} \end{bmatrix}.$$

同理可得,  $\frac{\partial G(x, N)|_{(1,N_2)}}{\partial N} > 0$ , 故当

$\alpha_{21}(N_2) > \alpha_{11}(N_2)$  时, 即当种群规模满足  $N_2 < \frac{\alpha_{11} - \alpha_{21}}{\beta_{11} - \beta_{21}}$  时, 边界均衡点(1,  $N_2$ )是鞍点; 当

$\alpha_{21}(N_2) < \alpha_{11}(N_2)$  时, 即当种群规模满足  $N_2 > \frac{\alpha_{11} - \alpha_{21}}{\beta_{11} - \beta_{21}}$  时, 边界均衡点(1,  $N_2$ )是不稳定的。

**引理 1**<sup>[23]</sup> 对于两策略的一般博弈模型, 总能得到适应度差分方程, 并用该方程求解均衡点。

若满足条件

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ F(x) = 0, \\ \dot{F}(x) < 0, \end{cases}$$

则内部均衡点  $x$  是稳定点; 反之, 满足条件

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ F(x) = 0, \\ \dot{F}(x) \geq 0, \end{cases}$$

则内部均衡点  $x$  是不稳定的。

**定理 2** (内部均衡点的稳定性) 当满足条件  $a_{21}(N) > k\left(1 - \frac{d}{r}\right) > a_{22}(N)$  时, 内部均衡点  $x = x_3$  是局部稳定的。

**证明** 考虑均衡点  $(x_3, N_3)$ , 即求解方程组

$$\begin{cases} r\left(1 - \frac{\pi_1}{k}\right) - r\left(1 - \frac{\pi_2}{k}\right) = 0, \\ xr\left(1 - \frac{\pi_1}{k}\right) + (1-x)r\left(1 - \frac{\pi_2}{k}\right) - d = 0, \end{cases}$$

化简可得  $r\left(1 - \frac{\pi_2}{k}\right) - d = 0$ 。令  $F(x) = r\left(1 - \frac{\pi_2}{k}\right) - d$ , 则有  $F(x_3) = 0$ 。下面证明内部均衡点的存在性及稳定性。

$$\begin{aligned} F(x) &= r\left(1 - \frac{\pi_2}{k}\right) - d = \\ & r\left(1 - \frac{\alpha_2 - \beta_2 N}{k}\right) - d = \\ & r - \frac{r}{k} [x\alpha_{21} + (1-x)\alpha_{22} - x\beta_{21} - \\ & (1-x)\beta_{22}]N - d, \\ \dot{F}(x) &= -\frac{r}{k} [(\alpha_{21} - \alpha_{22}) - (\beta_{21} - \beta_{22})N] = \\ & -\frac{r}{k} [(\alpha_{21} - \beta_{21}N) - (\alpha_{22} - \beta_{22}N)] = \\ & -\frac{r}{k} (a_{21}(N) - a_{22}(N)). \end{aligned}$$

由于  $a_{21}(N_3) > k\left(1 - \frac{d}{r}\right) > a_{22}(N_3)$ , 故  $\dot{F}(x) < 0$ , 即  $F(x)$  在  $[0, 1]$  内是单调递减的。又因为  $F(0) = r\left(1 - \frac{\alpha_{22} - \beta_{22}N}{k}\right) - d > 0$ ,  $F(1) = r\left(1 - \frac{\alpha_{21} - \beta_{21}N}{k}\right) - d < 0$ , 所以根据零点定理可知, 存在  $x_3 \in (0, 1)$ , 使得  $F(x_3) = 0$ 。

综上, 当  $a_{21}(N) > k\left(1 - \frac{d}{r}\right) > a_{22}(N)$  时, 存

在  $x_3 \in (0, 1)$ , 使得  $F(x_3) = 0$  且  $\dot{F}(x_3) < 0$ , 满足引理 1 的条件, 所以内部均衡点  $x = x_3$  是局部稳定的。

### 3 博弈模型随机演化稳定分析

为研究演化博弈模型的随机演化稳定性, 提出了如下假设与引理。

**假设 1**<sup>[7]</sup> 初始值  $x(t_0) = x_0$  的随机微分方程在  $t \geq t_0$  上的一般形式可以表述为

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dB(t).$$

假设

- i)  $f(x, t)$  和  $g(x, t)$  都是 Boral 可测;
- ii)  $f(0, t) = 0, g(0, t) = 0$ ;
- iii) 存在  $K_1, K_2 > 0$ , 对于任意  $t \geq 0$ , 都有
 
$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq K_1|x - y|,$$

$$|g(x, t) - g(y, t)| \leq K_2|x - y|.$$

**引理 2**<sup>[8]</sup> 基于上述假设, 可以找到合适的非负函数  $V(x, t)$  以及常数  $p > 0, c_1 > 0, c_2 \in \mathbf{R}, c_3 \geq 0, t \geq t_0$ , 使得任意  $x \neq 0$  满足

$$\begin{aligned} c_1|x|^p &\leq V(x, t), \\ LV(x, t) &\leq c_2V(x, t), \\ |V_x(x, t)g(x, t)|^2 &\geq c_2V^2(x, t), \end{aligned}$$

则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log|x|}{t} \leq -\frac{c_3 - 2c_2}{2p}. \quad (6)$$

**定义 1**<sup>[24]</sup> 几乎必然指数稳定 (Almost Sure Exponential Stability, ASES), 当初值为不等于零的任意实数, 且满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log|x|}{t} < 0,$$

则可称随机微分方程的平凡解是几乎必然指数稳定的。

**定理 3** 考虑博弈的收益矩阵(1)及其动力学方程(4), 当  $\sigma^2 > 2K_1, K_1 = |b_1 - d|$  时, 选择  $H_1$  表型的频率  $x = 0$  是几乎必然指数稳定的 (ASES)。

**证明** 基于随机模型(4), 对应于随机微分方程的一般形式, 有

$$\begin{aligned} f(x, t) &= xr\left(1 - \frac{\pi_1}{k}\right) - xd, \\ g(x, t) &= \sigma x. \end{aligned}$$

根据假设 1, 有

$$|f(x, t)| \leq K_1 x,$$

$$K_2 = \sigma N_0.$$

令  $m(x, t) = K_1 x - |f(x, t)|$ , 则有

$$m(x, t) = K_1 x - \left| xr \left(1 - \frac{\pi_1}{k}\right) - xd \right| = K_1 x - |b_1 - d|,$$

为去绝对值, 以下分两部分讨论:

a) 当  $b_1 > d$  时, 有  $m(x, t) = K_1 x - b_1 x + dx$ ,

基于  $m(x, t) \geq 0$ , 可得  $K_1 \geq b_1 + d$ .

b) 当  $b_1 < d$  时, 有  $m(x, t) = K_1 x + b_1 x - dx$ , 基于  $m(x, t) \geq 0$ , 可得  $K_1 \geq d - b_1$ .

于是,  $K_1 = |b_1 - d|_0$ . 令  $V(x, t) = x^2$ , 则

$$LV(x, t) = V_t(x, t) + V_x(x, t)f(x, t) +$$

$$\frac{1}{2} \text{trace} [g^T(x, t)V_{xx}(x, t)g(x, t)] =$$

$$2xf(x, t) + x^2\sigma^2 \leq (2K_1 + \sigma^2)x^2,$$

$$|V_x(x, t)g(x, t)|^2 = |2x^2\sigma|^2 = 4\sigma^2x^4.$$

由引理 2 条件中的不等式可得,  $p = 2$ ,

$c_1 = 1, c_2 = 2K_1 + \sigma^2, c_3 = 4\sigma^2$ , 代入(6)得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log|x|}{t} \leq -\frac{4\sigma^2 - 2(2K_1 + \sigma^2)}{4} = K_1 - \frac{\sigma^2}{2} < 0,$$

故当  $\sigma^2 > 2K_1, K_1 = |b_1 - d|$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , 定理得证。

**定理 4** 考虑博弈的收益矩阵(1)及其随机动力学方程(5), 当噪声强度  $\sigma^2 > 2K_1, K_1 = \max\{b_2 + d, 0, b_1 - d\}$  时, 方程(5)的平凡解是唯一的随机稳定均衡点, 即  $N = 0$  是几乎必然指数稳定的。

**证明** 基于随机模型(5), 对应于随机微分方程一般形式, 有

$$f(N, t) = N \left[ xr \left(1 - \frac{\pi_1}{k}\right) + (1-x)r \left(1 - \frac{\pi_2}{k}\right) - d \right],$$

$$g(N, t) = \sigma N,$$

根据假设 1, 有

$$|f(N, t)| \leq K_1 N, \quad K_2 = \sigma.$$

令  $M(N, t) = K_1 N - |f(N, t)|$ , 则

$$M(N, t) = K_1 N -$$

$$N \left| xr \left(1 - \frac{\pi_1}{k}\right) + (1-x)r \left(1 - \frac{\pi_2}{k}\right) - d \right| =$$

$$K_1 N - |xb_1 + (1-x)b_2 - d|N,$$

为去绝对值, 以下分两部分讨论:

a) 当  $0 \leq x \leq \frac{d - b_2}{b_1 - b_2}$  时, 有

$$M(N, t) = K_1 N + N [xb_1 + (1-x)b_2 - d],$$

基于  $M(N, t) \geq 0$  得  $K_1 \geq (b_2 - b_1)x - b_2 + d$ , 令  $h_1(x) = (b_2 - b_1)x - b_2 + d$ , 当  $b_1 > b_2$  时, 函数  $h_1(x)$  是单调递减的,  $x$  取最小值 0, 得  $K_1 \geq d - b_2$ ; 当  $b_1 < b_2$  时, 函数  $h_1(x)$  是单调递增的,  $x$  取最大值  $\frac{d - b_2}{b_1 - b_2}$ , 得  $K_1 \geq 0$ .

b) 当  $\frac{d - b_2}{b_1 - b_2} < x \leq 1$  时, 有

$$M(N, t) = K_1 N - N [xb_1 + (1-x)b_2 - d],$$

基于  $M(N, t) \geq 0$  得  $K_1 \geq (b_1 - b_2)x + b_2 - d$ , 令  $h_2(x) = (b_1 - b_2)x + b_2 - d$ , 当  $b_1 > b_2$  时, 函数  $h_2(x)$  是单调递增的,  $x$  取最大值 1, 得  $K_1 \geq b_1 - d$ ; 当  $b_1 < b_2$  时, 函数  $h_2(x)$  是单调递减的,  $x$  取最小值  $\frac{d - b_2}{b_1 - b_2}$ , 得  $K_1 \geq 0$ .

于是,  $K_1 = \max\{b_1 - d, 0, d - b_2\}$ . 令  $V(N, t) = N^2$ , 则

$$LV(N, t) = V_t(N, t) + V_N(N, t)f(N, t) +$$

$$\frac{1}{2} \text{trace} [g^T(N, t)V_{NN}(N, t)g(N, t)] =$$

$$2Nf(N, t) + N^2\sigma^2 \leq (2K_1 + \sigma^2)N^2,$$

$$|V_N(N, t)g(N, t)|^2 = |2N^2\sigma|^2 = 4\sigma^2N^4.$$

类似可得  $p = 2, c_1 = 1, c_2 = 2k_1 + \sigma^2, c_3 = 4\sigma^2$ , 代入式(6)可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log|N|}{t} \leq -\frac{4\sigma^2 - 2(2K_1 + \sigma^2)}{4} = K_1 - \frac{\sigma^2}{2} < 0,$$

故  $\sigma^2 > 2K_1, K_1 = \max\{b_2 + d, 0, b_1 - d\}$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$ , 定理得证。

**定理 5** 对于任意给定初值  $x_0 \in (0, 1)$ , 考虑博弈的收益矩阵(1)及其随机动力学方程(5), 在噪声强度  $\sigma^2 < 2(b_1 - b_2 - d)$  的情况下, 选择出生率较高表型的频率在时间均值意义下持续。

**证明** 设  $v(N, t) = \ln N$ , 对系统(5)应用 Itô's 公式, 可得

$$d \ln N = Lv(N, t)dt + v_N(N, t)g(N, t)dB(t) =$$

$$\left[ xr \left(1 - \frac{\pi_1}{k}\right) + (1-x)r \left(1 - \frac{\pi_2}{k}\right) - d - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt +$$

$$\sigma dB(t) = \left[ (b_1 - b_2)x + b_2 - d - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma dB(t) \geq \left[ (b_1 - b_2)x - d - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma dB(t)。$$

不等式两边同时从0到 $t$ 积分,然后再除以 $t$ ,得

$$\frac{\ln N(t)}{t} - \frac{\ln N(0)}{t} \geq \frac{1}{t} \int_0^t (b_1 - b_2)x(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t (d + \frac{\sigma^2}{2}) ds + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma dB(s)。$$

简化得

$$\langle x(t) \rangle \geq \frac{1}{b_1 - b_2} \left( -d - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma B(t)}{t} - \frac{\ln N(t)}{t} + \frac{\ln N(0)}{t} \right) \geq \frac{1}{b_1 - b_2} \left( -d - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma B(t)}{t} + \frac{\ln N(0)}{t} \right)。$$

根据大数定律<sup>[24]</sup>,得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln N(0)}{t} = 0$ ,又因  $\sigma^2 < 2(b_1 - b_2 - d)$ 且  $b_1 > b_2$ ,可得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle x(t) \rangle \geq \frac{1}{b_1 - b_2} \left( -d - \frac{\sigma^2}{2} \right) > 0,$$

故选择出生率高的 $H_1$ 表型的频率在时间均值意义下持续。

综上,针对系统(4)以及(5)分别得到了令系统的零解是几乎必然指数稳定的噪声阈值,同时针对系统(5),发现了选择表型 $H_1$ 的频率在时间均值意义下持续的条件。

#### 4 猎鹿博弈模型示例验证

一个古老村庄里有两个靠狩猎为生的猎人,附近山上的猎物只有鹿和兔子两种。两猎人在互相不知道对方选择的情况下狩猎。由于一个猎人只能捕获一只兔子,而成功捕获一只鹿需要两个猎人一起合作,因此将选择猎兔记为背叛策略 $D$ ,选择猎鹿作为合作策略 $C$ 。其中,捕获一只兔子得到的收益为2,表示一只兔子是一个猎人两天的食物;捕获一只鹿能够带来的收益为10,即一只鹿能为两个猎人分别提供十天的食物。虽然鹿更难捕获,需要两个猎人合作,但它能够提供的收益要远高于捕获兔子。对于两个猎人而言,收益矩阵可表示为

$$\begin{array}{cc} & C & D \\ C & \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix} \\ D & \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

从收益矩阵可以看出:在双方都选择合作策略 $C$ 时,将达成合作成功猎杀鹿,每人分得10收

益;当猎人甲选择合作策略 $C$ ,猎人乙选择背叛策略 $D$ 的情况下,猎人甲将会一无所获从而获得收益0,猎人乙将因成功捕获兔子获得收益2;如果两人都出于安全的考虑,选择背叛策略 $D$ ,则两人都将成功狩猎兔子从而获得收益2。假设 $x$ 为选择策略 $C$ 的频率,则 $1-x$ 为选择策略 $D$ 的频率。根据收益矩阵可知,选择策略 $C$ 和策略 $D$ 的收益函数 $\pi_1, \pi_2$ 分别为 $10x$ 和 $2$ ,从而受乘性噪声影响猎鹿博弈的随机生态演化博弈动力学模型可表述为

$$dx = \left[ xr \left( 1 - \frac{10x}{k} \right) - xd \right] dt + \sigma x dB(t), \quad (7)$$

$$dN = N \left[ xr \left( 1 - \frac{10x}{k} \right) + (1-x)r \left( 1 - \frac{2}{k} \right) - d \right] dt + \sigma N dB(t)。 \quad (8)$$

**情形1** 基于随机模型(7),对应于随机微分方程的一般形式,有

$$f(x, t) = \left[ xr \left( 1 - \frac{10x}{k} \right) - xd \right], \quad g(x, t) = \sigma x,$$

根据假设1,有

$$|f(x, t)| \leq K_1 x, \quad K_2 = \sigma,$$

令

$$m(x, t) = K_1 x - |f(x, t)| = K_1 x - \left| xr \left( 1 - \frac{10x}{k} \right) - xd \right|,$$

为去绝对值,以下分两部分讨论:

a) 当  $0 \leq x \leq \frac{k}{10} \left( 1 - \frac{d}{r} \right)$  时,有

$$m(x, t) = K_1 x - \left[ xr \left( 1 - \frac{10x}{k} \right) - xd \right]。$$

基于 $m(x, t) \geq 0$ ,得

$$K_1 \geq r \left( 1 - \frac{10x}{k} \right) - d \geq r - d。$$

b) 当  $\frac{k}{10} \left( 1 - \frac{d}{r} \right) \leq x \leq 1$  时,有

$$m(x, t) = K_1 x + \left[ xr \left( 1 - \frac{10x}{k} \right) - xd \right]。$$

基于 $m(x, t) \geq 0$ ,得

$$K_1 \geq d - r \left( 1 - \frac{10x}{k} \right) \geq d - r \left( 1 - \frac{10}{k} \right)。$$

于是,  $K_1 = \max \left\{ r - d, d - r \left( 1 - \frac{10}{k} \right) \right\}$ , 令

$V(x, t) = x^2$ , 则

$$LV(x, t) = 2xf(x, t) + x^2\sigma^2 \leq (2K_1 + \sigma^2)x^2,$$

$$|V_x(x, t)g(x, t)|^2 = |2x^2\sigma|^2 = 4\sigma^2x^4.$$

由引理 2 可得,  $p = 2, c_1 = 1, c_2 = 2K_1 + \sigma^2, c_3 = 4\sigma^2$ , 将其代入式(6)可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log|x|}{t} \leq -\frac{4\sigma^2 - 2(2K_1 + \sigma^2)}{4} = K_1 - \frac{\sigma^2}{2} < 0,$$

故  $\sigma^2 > 2K_1, K_1 = \max\left\{r - d, d - r\left(1 - \frac{10}{k}\right)\right\}$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , 方程(7)的平凡解是唯一的随机稳定均衡点, 且选择合作策略的频率  $x = 0$  是几乎必然指数稳定的。

**情形 2** 基于随机模型(8), 对应于随机微分方程一般形式有

$$f(N, t) = N \left[ xr \left(1 - \frac{10x}{k}\right) + (1-x)r \left(1 - \frac{2}{k}\right) - d \right],$$

$$g(N, t) = \sigma N.$$

根据假设 1, 有

$$|f(N, t)| \leq K_1 N, K_2 = \sigma N,$$

令

$$M(N, t) = K_1 N - |f(N, t)| = K_1 N - N \left| xr \left(1 - \frac{10x}{k}\right) + (1-x)r \left(1 - \frac{2}{k}\right) - d \right|.$$

方法同上, 经分类讨论可得

$$K_1 = \max \left\{ r \left(1 - \frac{10x}{k}\right) - d, 0, d - r \left(1 - \frac{2}{k}\right) \right\}.$$

令  $V(N, t) = N^2$ , 则

$$\langle x(t) \rangle \geq \frac{1}{r \left(1 - \frac{10x}{k}\right) - r \left(1 - \frac{2}{k}\right)} \left( -d - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma B(t)}{t} - \frac{\ln N(t)}{t} + \frac{\ln N(0)}{t} \right) \geq \frac{1}{r \left(1 - \frac{10x}{k}\right) - r \left(1 - \frac{2}{k}\right)} \left( -d - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma B(t)}{t} + \frac{\ln N(0)}{t} \right).$$

根据大数定律得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln N(0)}{t} = 0$ , 又因为  $\sigma^2 < 2 \left[ r \left(1 - \frac{10x}{k}\right) - r \left(1 - \frac{2}{k}\right) - d \right]$ , 且  $b_1 > b_2$ , 所以

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle x(t) \rangle \geq$$

$$LV(N, t) = 2Nf(N, t) + N^2\sigma^2 \leq (2K_1 + \sigma^2)N^2,$$

$$|V_N(N, t)g(N, t)|^2 = |2N^2\sigma|^2 = 4\sigma^2N^4.$$

从而得  $p = 2, c_1 = 1, c_2 = 2k_1 + \sigma^2, c_3 = 4\sigma^2$ , 代入式(6)可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log|N|}{t} \leq -\frac{4\sigma^2 - 2(2K_1 + \sigma^2)}{4} = K_1 - \frac{\sigma^2}{2} < 0.$$

故  $\sigma^2 > 2K_1, K_1 = \max\left\{r \left(1 - \frac{10x}{k}\right) - d, 0, d - r \left(1 - \frac{2}{k}\right)\right\}$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$ , 方程(8)的平凡解是唯一的随机稳定均衡点, 且人口规模  $N = 0$  是几乎必然指数稳定的。

**情形 3** 设  $v(N, t) = \ln N$ , 应用 Itô's 公式可得

$$d \ln N = Lv(N, t)dt + v_N(N, t)g(N, t)dB(t) = \left[ \left( r \left(1 - \frac{10x}{k}\right) - r \left(1 - \frac{2}{k}\right) \right) x + r \left(1 - \frac{2}{k}\right) - d - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma dB(t) \geq \left[ \left( r \left(1 - \frac{10x}{k}\right) - r \left(1 - \frac{2}{k}\right) \right) x - d - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma dB(t),$$

不等式两边同时从 0 到  $t$  积分, 然后再除以  $t$ , 得

$$\frac{\ln N(t)}{t} - \frac{\ln N(0)}{t} \geq \frac{1}{t} \int_0^t \left[ r \left(1 - \frac{10x}{k}\right) - r \left(1 - \frac{2}{k}\right) \right] x(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t \left( d + \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma dB(s),$$

简化得

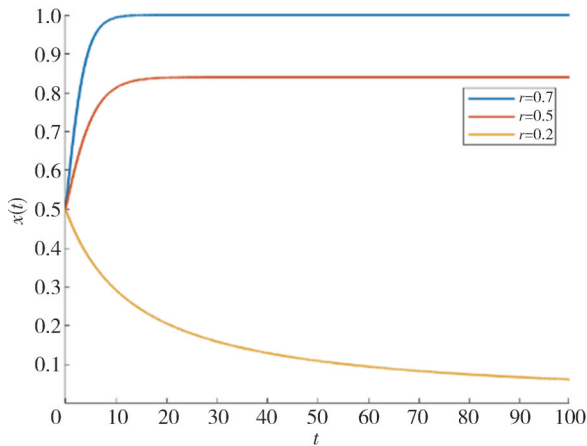
$$\frac{1}{r \left(1 - \frac{10x}{k}\right) - r \left(1 - \frac{2}{k}\right)} \left( -d - \frac{\sigma^2}{2} \right) > 0,$$

故当  $b_1 > b_2$  时, 即  $x < 0.2$  时, 选择合作策略的频率在时间均值意义下持续。

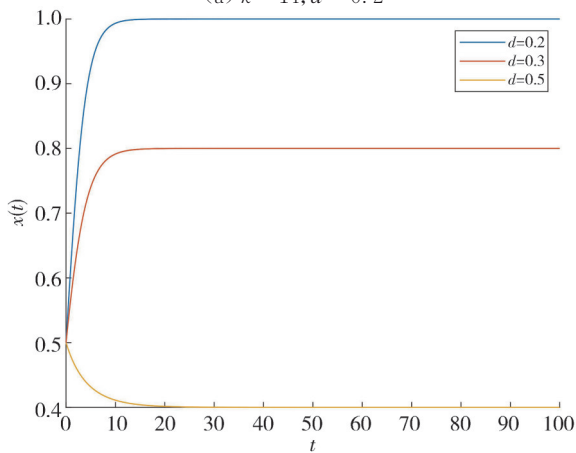
## 5 数值模拟

为了验证上述研究,本节以猎鹿博弈为例进行数值模拟。针对式(7),模拟的初始条件与猎鹿博弈相同。在初始值 $x=0.5$ 的情况下,令 $\sigma=0$ ,模拟无噪声干扰的确定型系统随着时间的推移逐渐演化并稳定到一个恒定的合作比,即个体选择合作策略的数量在总人群中占比的演化情况。

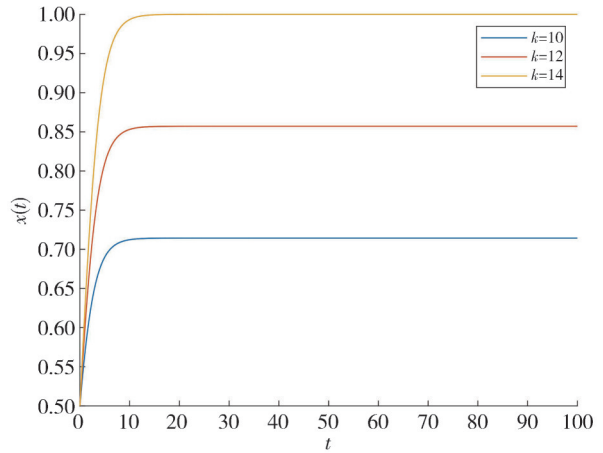
图1(a)中的模拟结果显示,选择合作策略人数的占比会因该群体内禀增长率 $r$ 的增加而增加,最终稳定在一个确定的比例。由图1(b)可以发现,选择合作策略的频率随死亡率 $d$ 的增加而减少,最后也稳定在一个定值,并且当死亡率超过一定阈值时,种群中选择合作的人数会演化为零。由图1(c)观察可得,随着环境能提供的最大收益量的增加,群体中选择合作策略的比例也增加。图1中的3幅图说明了模型中的这些参数均对种群中策略的演化发挥了重要作用,甚至在一定条件下能够使合作者比例趋于1(或0),换言之,种群中所有个体都将选择合作策略(或背叛策略)。



(a)  $k=14, d=0.2$



(b)  $r=0.7, k=14$

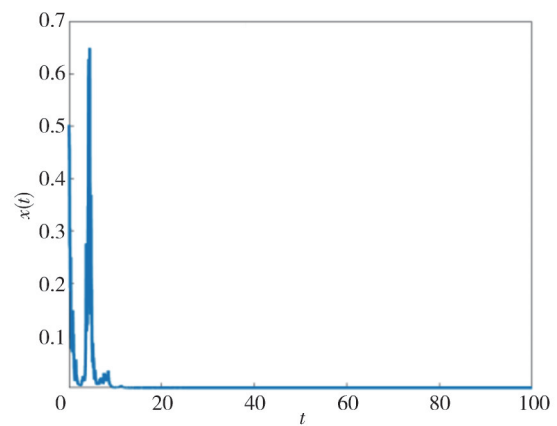


(c)  $r=0.7, d=0.2$

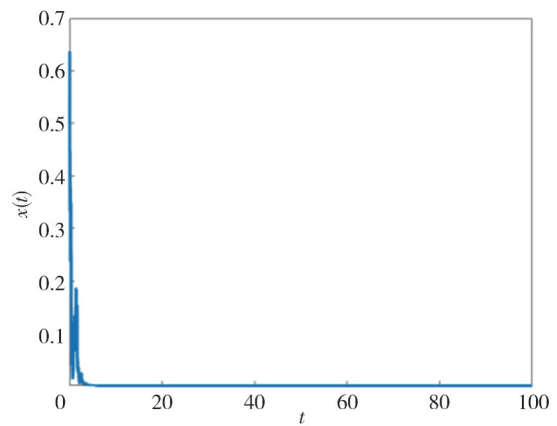
图1 无噪声干扰时选择合作策略的频率的时间序列图

Fig. 1 Time series plot of the frequency choosing a cooperative strategy in the absence of noise

接下来模拟了选择合作策略的频率在噪声干扰下的情况。模拟的初始值与图1相同。令 $r=0.7, k=14, d=0.2$ ,结果如图2所示。



(a)  $\sigma=12$



(b)  $\sigma=20$

图2 大于阈值的噪声干扰下选择合作策略的频率的时间序列图

Fig. 2 Time series plot of the frequency choosing a cooperative strategy in the noise exceeding the threshold

由图 2 可以看出,当噪声强度大于某一阈值时,平凡解  $x=0$  是几乎必然指数稳定的。因为不确定因素过大时,群体中将不再有个体愿意冒着没有食物的风险选择合作策略。图 2 中两个图分别表示两个不同的大于阈值的噪声强度下,选择合作策略的频率随时间演化的趋势。

针对式(8),在种群初始规模为 100 的情况下,令  $\sigma=0$ ,模拟无噪声干扰时该系统随着时间的演化情况,模拟结果显示,人口规模的变化与该群体中策略的选择有关。当  $x=0$  或  $x=1$  时,人口规模会演化并稳定到一个定值,这正好与猎鹿博弈中的两个纳什均衡对应(即两个猎人都猎鹿或都猎兔)。

当选择合作策略的人数少于一定比例时,人口规模将会随时间的增加而增加,而当选择合作策略的人数大于这一阈值时,人口规模将会随时间的增加而减小,直至人口灭绝。这也说明了在没有噪声干扰的情况下,适当少量的合作往往更有利于种群的发展,显然这是有一定的生物意义的。例如,当猎人全部选择猎鹿时,就会导致鹿的数量急剧骤减直至灭绝,而兔的数量由于没有捕食者而急剧上升,从而使整个系统失去平衡,如图 3 所示。

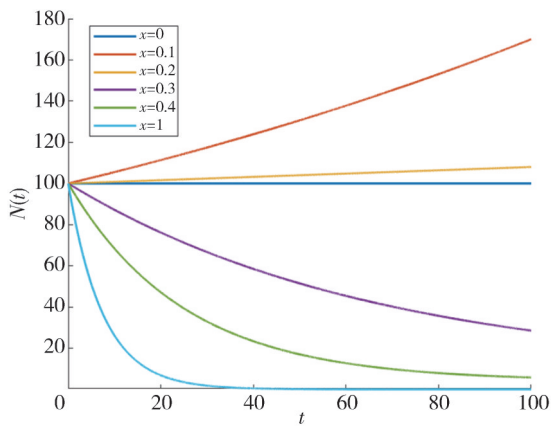


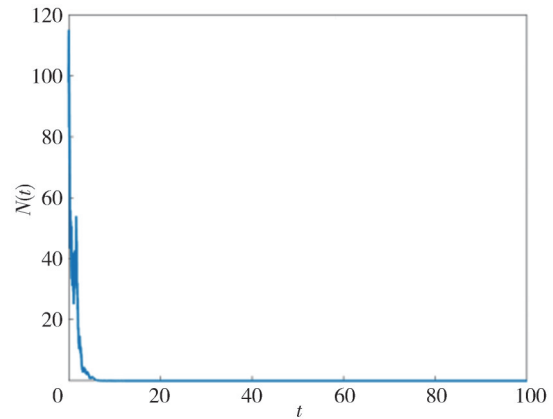
图 3 无噪声干扰时人口规模的时间序列图

Fig. 3 Time series plot of population size in the absence of noise

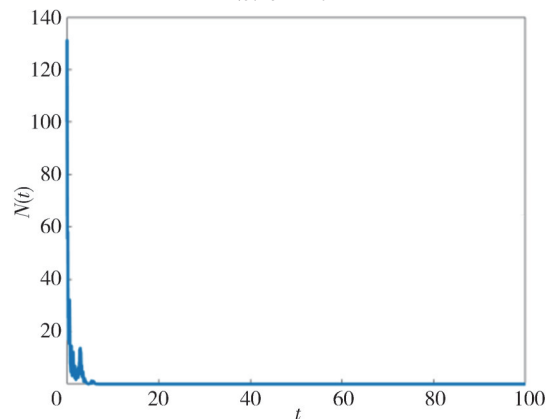
接下来模拟人口规模在噪声干扰下的演化情况,模拟的初始值与猎鹿博弈相同。令  $r=0.5$ ,  $k=12$ ,  $d=0.1$ , 初始人口规模为 100。分别取  $\sigma_1=10$ ,  $\sigma_2=50$  两个超过所给阈值的噪声强度,结果如图 4 所示。可以看出,当噪声强度大于所给阈值时,  $N=0$  是几乎必然指数稳定的,种群终会走向灭绝,这与第 4 节中的理论结果一致。

下面分别选取  $\sigma_1=0.1$  和  $\sigma_2=0.2$  两个小于所给阈值的噪声强度,为了更清晰地观察其变化趋势,取参数  $r=0.5$ ,  $k=12$ ,  $d=0.3$ , 选择合

作策略的初始频率  $x=0.5$ , 运行结果如图 5 所示。可以看出,当噪声强度的取值小于第 4 节中所求得的阈值时,选择合作策略的频率  $x(t)$  将在时间均值意义下保持持续,并且在某一值的邻域范围内随机波动,这也与第 4 节中的理论结果一致。



(a)  $\sigma=10$



(b)  $\sigma=50$

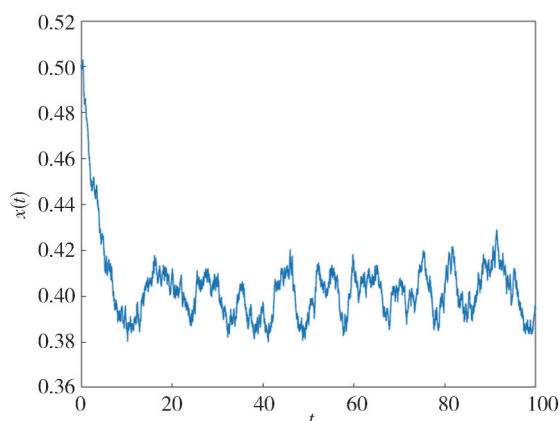
图 4 噪声干扰时人口规模的时间序列图

Fig. 4 Time series plot of population size in the presence of noise

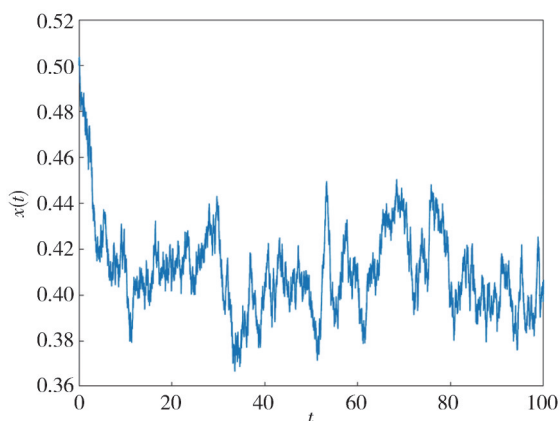
生态进化博弈是近年来提出的一个有意义的研究方向,现已有许多优秀学者耕耘于此,并对相关概念的研究做出了巨大贡献,但对于生态进化博弈的动力学研究还尚在发展之中。现有文献仅针对确定型生态演化博弈模型中内部均衡点的稳定性进行模拟,并给出不同内部均衡点对应的相图,但未考虑不同参数对生态演化博弈模型的影响,以及环境随机性对生态演化博弈动态的影响。基于此,本研究进行了上述模拟。

经上述模拟发现,模拟结果与理论结果相一致。不考虑环境噪声影响与考虑环境噪声影响所产生的结果并不相同,噪声干扰对策略的演化以及种群规模的进化都有着重要影响。同时,本文

还发现环境噪声强度的大小决定了其最终的演化结果在时间均值意义下持续存在还是灭绝。



(a)  $\sigma=0.1$



(b)  $\sigma=0.2$

图5 小于阈值的噪声干扰下选择合作策略的频率的时间序列图

Fig. 5 Time series plot of the frequency choosing a cooperative strategy in the noise less than threshold

## 6 结论

考虑外界环境中随机因素对种群规模和策略选择的影响,建立了一类具有密度依赖的随机生态演化博弈动力学模型及分析方法,并讨论了该随机演化博弈模型的动力学行为,最终得到种群灭绝和策略消失的噪声阈值,以及在噪声干扰下种群依旧能持续存在的噪声阈值。理论和数值结果均表明:当噪声强度大于一定阈值时,选择表型 $H_1$ 的频率为零是几乎必然指数稳定的,种群规模演化为零也是几乎必然指数稳定的。也就是说,当噪声较大时,无论种群初始规模有多大,种群最终都将灭绝,选择表型 $H_1$ 的频率也是如此,只要噪声足够大,将没有个体再选择表型 $H_1$ 。研究还发现,只要噪声强度小于某一阈值,那么出生率大的表型的频率将在时间均值意义下持续,

这对未来生态系统预测结果有着指示作用。

噪声对生态进化博弈动力学的影响是未来一个非常重要的研究方向,在今后的工作中将考虑随机噪声影响下多策略对策的随机生态演化博弈模型的动力学行为。

### 参考文献:

- [1] SMITH J M, PRICE G R. The logic of animal conflict[J]. Nature, 1973, 246(5427): 15-18.
- [2] SAHOO D, SAMANTA G. Modeling cooperative evolution in prey species using the snowdrift game with evolutionary impact on prey-predator dynamics [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2023, 177: 114269.
- [3] CHEN S, BRAVO-MELGAREJO S, MONGEAU R, et al. Adopting and diffusing hydrogen technology in air transport: An evolutionary game theory approach [J]. Energy Economics, 2023, 125: 106864.
- [4] XU L, DI Z, CHEN J. Evolutionary game of inland shipping pollution control under government co-supervision[J]. Marine Pollution Bulletin, 2021, 171: 112730.
- [5] 葛泽慧,于艾琳,赵瑞,等. 博弈论入门[M]. 北京:清华大学出版社,2018.
- [6] LIANG H, CAO M, WANG X. Analysis and shifting of stochastically stable equilibria for evolutionary snowdrift games [J]. Systems and Control Letters, 2015, 85: 16-22.
- [7] LIANG H, CUI Y, REN X, et al. Almost sure exponential stability of two-strategy evolutionary games with multiplicative noise [J]. Information Sciences, 2021, 579: 888-903.
- [8] YUAN H, MENG X. Replicator dynamics of the Hawk-Dove game with different stochastic noises in infinite populations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2022, 430: 127272.
- [9] FENG T J, FAN S J, LI C, et al. Noise-induced sustainability of cooperation in Prisoner's Dilemma game [J]. Applied Mathematics and Computation, 2023, 438: 127603.
- [10] TURCHIN P, OKSANEN L, EKERHOLM P, et al. Are lemmings prey or predators? [J]. Nature, 2000, 405(6786): 562-565.
- [11] BJØRNSTAD O N, GRENFELL B T. Noisy clockwork: time series analysis of population fluctuations in animals[J]. Science, 2001, 293(5530): 638-643.
- [12] LANDE R, ENGEN S, SAETHER B E. Stochastic population dynamics in ecology and conservation[M].

- New York: Oxford University Press, 2003.
- [13] ZHENG X D, DENG L L, QIANG W Y, et al. Limiting similarity of competitive species and demographic stochasticity [J]. *Physical Review E*, 2017, 95(4): 042404.
- [14] MAY R M. *Stability and complexity in model ecosystems*[M]. Princeton University Press, 2019.
- [15] MAY, ROBERT M. *Stability and complexity in model ecosystems*[M]. Princeton: Princeton University Press, 2001.
- [16] 尹文倩, 刘桂荣. 一类随机时滞捕食者食饵模型的定性分析[J]. *重庆理工大学学报(自然科学)*, 2019, 33(3): 202-208.  
YIN Wenqian, LIU Guirong. Qualitative analysis of a class of stochastic delay predator-prey model[J]. *Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science)*, 2019, 33(3): 202-208. (in Chinese)
- [17] JNAWALI K, ANAND M, BAUCH C T. Stochasticity-induced persistence in coupled social-ecological systems[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2022, 542: 111088.
- [18] 钟颖, 韦煜明. 污染环境下具有混合功能反应和 Markov 切换的食饵-捕食模型[J]. *广西师范大学学报(自然科学版)*, 2023, 41(04): 135-148.  
ZHONG Ying, WEI Yiming. A predator-prey model with mixed functional responses and Markov switching in a contaminated environment[J]. *Journal of Guangxi Normal University (Natural Science Edition)*, 2023, 41(4): 135-148. (in Chinese)
- [19] CRESSMAN R, DASH A T. Density dependence and evolutionary stable strategies[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1987, 126(4): 393-406.
- [20] CRESSMAN R. Frequency and density-dependent selection: The two-phenotype model[J]. *Theoretical Population Biology*, 1988, 34(3): 378-398.
- [21] TILMAN A R, PLOTKIN J B, AKÇAY E. Evolutionary games with environmental feedbacks [J]. *Nature Communications*, 2020, 11(1): 915.
- [22] WANG C, FENG T, GAO Y, et al. Evolutionary stability in an eco-evolutionary game dynamics with density dependence[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2023, 168: 113141.
- [23] ZHANG S, CLARK R, HUANG Y. Frequency-dependent strategy selection in a hunting game with a finite population[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, 382: 125355.
- [24] MAO X. *Stochastic differential equations and applications* [M]. New York: Horwood Publishing Limited, 2007.

---

(上接第 63 页)

- [20] 闫群民, 马瑞卿, 马永翔, 等. 一种自适应模拟退火粒子群优化算法[J]. *西安电子科技大学学报(自然科学版)*, 2021, 48(4): 120-127.  
YAN Qunmin, MA Ruiqing, MA Yongxiang, et al. Adaptive simulated annealing particle swarm optimization algorithm[J]. *Journal of Xidian University (Natural Science)*, 2021, 48(4): 120-127. (in Chinese)