

一类具有饱和发生率的SEIQV网络蠕虫模型的稳定性分析

闫斌, 薛亚奎

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

摘要: 本文建立了一类考虑隔离和安装杀毒软件策略的具有饱和发生率的SEIQV网络蠕虫模型, 并利用下一代矩阵法得到了模型的基本再生数 R_0 。以LaSalle不变集原理证明了当 $R_0 \leq 1$ 时无蠕虫平衡点 E^0 是全局渐近稳定的; 以Hurwitz判据证明了当 $R_0 > 1$ 时正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的; 利用Li-Mulowney几何方法证明了正平衡点 E^* 的全局渐近稳定性。通过数值模拟验证了所得结论的正确性, 同时证明, 减少感染设备与其他设备的连接, 提高人们对杀毒软件的认识, 可有效控制蠕虫病毒的传播。

关键词: 网络蠕虫; 基本再生数; 隔离; 稳定性; 平衡点

中图分类号: O175

文献标识码: A

doi: 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2024.10.0022

引用格式: 闫斌, 薛亚奎. 一类具有饱和发生率的SEIQV网络蠕虫模型的稳定性分析[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2025, 46(4): 532-538.

YAN Bin, XUE Yakui. Stability analysis of a class of SEIQV network worm model with saturated incidence rate [J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2025, 46(4): 532-538.

Stability Analysis of a Class of SEIQV Network Worm Model with Saturated Incidence Rate

YAN Bin, XUE Yakui

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: A type of network worm model with saturated incidence rate was established, this model took into account isolation and antivirus software installation strategies. The basic reproduction number of the model was derived using the next generation matrix method; The LaSalle invariant set principle was utilized to prove that the worm free equilibrium point E^0 was globally asymptotically stable when $R_0 \leq 1$. The Hurwitz criterion was employed to demonstrate that the positive equilibrium point E^* was locally asymptotically stable when $R_0 > 1$. And the Li-Mulowney geometric method was used to prove the global asymptotic stability of the positive equilibrium point E^* . The correctness of these conclusions was verified through numerical simulation, and it was found that reducing the connectivity between infected devices with other devices, as well as enhancing individuals' awareness of antivirus software, could significantly curb the spread of worm viruses.

Key words: worm; basic regeneration number; isolation; stability; equilibrium point

收稿日期: 2024-10-31

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(11301491); 山西省自然科学基金资助项目(2018010221040)

作者简介: 闫斌(2000-), 男, 硕士生, 主要从事生物数学的研究。

通信作者: 薛亚奎(1970-), 男, 教授, 博士, 主要从事生物数学的研究。E-mail: xyk5152@163.com。

0 引言

网络蠕虫病毒是一种可以自我复制并感染其他计算机的计算机程序^[1], 它具有生物病毒的一些特征, 可以像生物病毒在人与人之间传播一样从一台计算机传播到另一台计算机, 网络蠕虫的恶意传播对网络安全造成了严重威胁。

自从 Kephart 等^[2-3]对蠕虫病毒的传播进行数学建模以来, 许多学者对不同的数学模型^[4-11]进行了研究。Badshah 等^[4]建立了一类具有非线性关联函数的 SEIQRS 模型, 得到了基本再生数和平衡点, 并证明了平衡点的稳定性。Xiao 等^[5]研究了一类具有隔离的 SEIQR 蠕虫传播模型, 发现隔离(即切断感染设备与其它设备的联系)能有效减少感染设备的影响。Kim 等^[6]建立了包含计算机和 USB 外接设备两个子框架的计算机病毒传播模型, 发现提高完全恢复率能够有效减少感染计算机和感染 USB 设备的数量。Gao 等^[7]研究了一类 VEIQS 网络蠕虫模型, 发现安装杀毒软件能够有效减少感染设备的数量。Wang 等^[8]建立了具有饱和发生率的计算机蠕虫模型, 研究了计算机蠕虫在利用 USB 传输数据过程中的动态行为。Madhusudanan 等^[9]建立了具有 holling 型发生率的 SVEIR 计算机蠕虫模型, 证明了 Hopf 分岔的存在, 并研究了 Hopf 分岔的性质。Wang 等^[10]建立了具有两个子框架的网络蠕虫模型, 研究了安装杀毒软件策略后计算机与可移动设备之间交互动力学的影响。王瑞玲等^[11]建立了具有饱和发生率的网络蠕虫模型, 发现隔离能有效减少感染设备的数量。

上述文献并未将饱和发生率和隔离以及安装杀毒软件策略结合起来, 且大多采用构造 Lyapunov 函数法来证明正平衡点的全局稳定性, 本文将其结合起来, 建立了一类具有饱和发生率的 SEIQV 网络蠕虫模型, 并采用 Li-Mulowney 几何方法^[12]证明了正平衡点的全局稳定性。

1 模型的建立

将计算机种群 $N(t)$ 分为 5 个状态: 易感状态 $S(t)$, 潜伏状态 $E(t)$, 感染状态 $I(t)$, 隔离状态 $Q(t)$, 安全状态 $V(t)$ 。其中, $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, $Q(t)$, $V(t)$ 分别表示在 t 时刻处于易感状态、潜伏状态、感染状态、隔离状态、安全状态的设备的数量。蠕虫传播过程如图 1 所示。

图 1 中, b 为外部设备连入网络的速率; μ 为

自然淘汰率; ω 为杀毒软件的覆盖率; β 为感染设备对易感设备的传染率; m 为杀毒软件的生效效率; σ 为从潜伏状态到感染状态的转移率; γ 为从感染状态到免疫状态的转移率; n 为感染状态计算机修复的成功率; φ 为从隔离状态到安全状态的转移率; q_1, q_2, q_3 分别为易感状态、潜伏状态、感染状态的隔离率。参数 $b, \mu, \omega, m, q_1, q_2, q_3, \sigma, \gamma, \varphi$ 均为不大于 1 的正数, β, α 均大于等于 0。假设不考虑计算机因病毒入侵所导致的淘汰率, 处于安全状态的计算机有永久免疫。

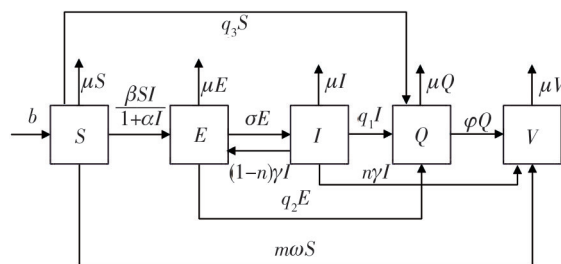


图 1 蠕虫传播过程

Fig. 1 The process of network worm

建立模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (m\omega + \mu + q_3)S, \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (\sigma + \mu + q_2)E + (1 - n)\gamma I, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\mu + \gamma + q_1)I, \\ \frac{dQ}{dt} = q_3 S + q_2 E + q_1 I - (\mu + \varphi)Q, \\ \frac{dV}{dt} = m\omega S + \varphi Q + n\gamma I - \mu V. \end{cases} \quad (1)$$

令 $N(t) = S(t) + E(t) + Q(t) + I(t) + R(t)$, $N(t)$ 为 t 时刻移动设备的总数。

将系统(1)中的等式相加得

$$\frac{dN(t)}{dt} = b - \mu N(t),$$

从而可得,

$$N(t) = \frac{b}{\mu} + \left(N(0) - \frac{b}{\mu} \right) e^{-\mu t},$$

故

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{b}{\mu}.$$

由此可得系统(1)的正向不变集为

$$\Omega =$$

$$\left\{ (S, E, I, Q, V) \in R_+^5 \mid 0 \leq S + E + I + Q + V \leq \frac{b}{\mu} \right\}.$$

2 基本再生数及平衡点的存在性

通过计算,系统(1)的无蠕虫平衡点为 $E^0(S_0, 0, 0, Q_0, V_0)$, 其中

$$S_0 = \frac{b}{m\omega + \mu + q_3}, \quad Q_0 = \frac{q_3 S_0}{\mu + \varphi},$$

$$V_0 = \frac{m\omega S_0 + \varphi Q_0}{\mu}.$$

利用下一代矩阵法^[13]求基本再生数 R_0 , 则

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta SI \\ 1 + \alpha I \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\sigma + \mu + q_2)E - (1 - n)\gamma I \\ -\sigma E + (\mu + \gamma + q_1)I \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta S_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} \sigma + \mu + q_2 & -(1 - n)\gamma \\ -\sigma & \mu + \gamma + q_1 \end{bmatrix},$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mu + \gamma + q_1}{A} & \frac{(1 - n)\gamma}{A} \\ \frac{\sigma}{A} & \frac{\sigma + \mu + q_2}{A} \end{bmatrix},$$

令

$$A = |V| =$$

$$(\sigma + \mu + q_2)(\mu + \gamma + q_1) - \sigma(1 - n)\gamma,$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \beta S_0 \frac{\sigma}{A} & \beta S_0 \frac{\sigma + \mu + q_2}{A} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

基本再生数 R_0 是 FV^{-1} 的谱半径

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \beta S_0 \frac{\sigma}{A} =$$

$$\frac{\sigma \beta b}{(m\omega + \mu + q_3)[(\sigma + \mu + q_2)(\mu + \gamma + q_1) - \sigma(1 - n)\gamma]}.$$

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} -(m\omega + \mu + q_3) & 0 & -\frac{\beta b}{m\omega + \mu + q_3} & 0 & 0 \\ 0 & -(\sigma + \mu + q_2) & \frac{\beta b}{m\omega + \mu + q_3} + (1 - n)\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu + \gamma + q_1) & 0 & 0 \\ q_3 & q_2 & q_1 & -(\mu + \varphi) & 0 \\ m\omega & 0 & n\gamma & \varphi & -\mu \end{bmatrix},$$

显然 $J(E^0)$ 有 3 个负特征根, 即

$$\lambda_1 = -(m\omega + \mu + q_3), \quad \lambda_2 = -(\mu + \varphi), \quad \lambda_3 = -\mu,$$

定理 1 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)在 Ω 内存在唯一的正平衡点 $E^*(S^*, E^*, I^*, Q^*, V^*)$ 。

证明 通过计算, 可得

$$\begin{cases} S^* = \frac{A(1 + \alpha I^*)}{\sigma \beta}, \\ I^* = \frac{\sigma \beta b - (m\omega + \mu + q_3)A}{A[\beta + \alpha(m\omega + \mu + q_3)]}, \\ E^* = \frac{\mu + \gamma + q_1}{\sigma} I^*, \\ Q^* = \frac{q_3 S^* + q_2 E^* + q_1 I^*}{\mu + \varphi}, \\ V^* = \frac{m\omega S^* + \varphi Q^* + n\gamma I^*}{\mu V^*}, \end{cases}$$

$$I^* = \frac{\sigma \beta b - (m\omega + \mu + q_3)A}{A[\beta + \alpha(m\omega + \mu + q_3)]} =$$

$$\frac{\sigma \beta b / [(m\omega + \mu + q_3)A] - 1}{[\beta + \alpha(m\omega + \mu + q_3)] / (m\omega + \mu + q_3)} =$$

$$\frac{R_0 - 1}{[\beta + \alpha(m\omega + \mu + q_3)] / (m\omega + \mu + q_3)},$$

$$A = |V| =$$

$$(\sigma + \mu + q_2)(\mu + \gamma + q_1) - \sigma(1 - n)\gamma.$$

当 $R_0 > 1$ 时, $I^* > 0$, 系统(1)在 Ω 内存在唯一的正平衡点 $E^*(S^*, E^*, I^*, Q^*, V^*)$ 。

3 平衡点的稳定性

定理 2 当 $R_0 \leq 1$ 时, E^0 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, E^0 是不稳定的。

证明 系统(1)在无蠕虫平衡点 E^0 处的 Jacobian 矩阵为

其它特征值为

$$\lambda^2 + (2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2)\lambda +$$

$$\begin{aligned}
& (\sigma + \mu + q_2)(\mu + \gamma + q_1) - \\
& \sigma \left[\frac{\beta b}{m\omega + \mu + q_3} + (1-n)\gamma \right] = 0, \\
& c = (\sigma + \mu + q_2)(\mu + \gamma + q_1) - \\
& \sigma \left[\frac{\beta b}{m\omega + \mu + q_3} + (1-n)\gamma \right].
\end{aligned}$$

当 $R_0 \leq 1$ 时, $c > 0$, 则 $\lambda_4 \lambda_5 = c > 0$,

$\lambda_4 + \lambda_5 = -(2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2) < 0$, 所以, λ_4 和 λ_5 均为负数。 $J(E^0)$ 的特征值均为负数, 故无蠕虫平衡点 E^0 局部渐近稳定。

当 $R_0 > 1$ 时, $c < 0$, 则 $\lambda_4 \lambda_5 = c < 0$, 故 λ_4 和 λ_5 一正一负, 无蠕虫平衡点 E^0 不稳定。

定理 3 当 $R_0 \leq 1$ 时, E^0 全局渐近稳定。

证明 构造 Lyapunov 函数

$$H(E, I) = \sigma E + (\sigma + \mu + q_2)I.$$

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} - (m\omega + \mu + q_3) & 0 & -\frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2} & 0 & 0 \\ \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} & -(\sigma + \mu + q_2) & \frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2} + (1-n)\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu + \gamma + q_1) & 0 & 0 \\ q_3 & q_2 & q_1 & -(\mu + \varphi) & 0 \\ m\omega & 0 & n\gamma & \varphi & -\mu \end{bmatrix}.$$

易知 $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -(\mu + \varphi)$ 是 $J(E^*)$ 的两个负特征根, 只需考虑 $\lambda^3 + B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3 = 0$ 的根, 其中

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} + 3\mu + m\omega + \sigma + \gamma + \\
& q_1 + q_2 + q_3 > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} + m\omega + \mu + q_3 \right) (2\mu + \sigma + \\
& \gamma + q_1 + q_2) + A - \frac{A}{1 + \alpha I^*} > 0,
\end{aligned}$$

$$B_3 = \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} A + (m\omega + \mu + q_3) \cdot$$

$$\left(A - \frac{A}{1 + \alpha I^*} \right) > 0,$$

$$B_1 B_2 - B_3 =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} + m\omega + \mu + q_3 \right) \cdot \\
& (2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2) - \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} \frac{A}{1 + \alpha I^*} + \\
& (m\omega + \mu + q_3) \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} + m\omega + \mu + q_3 \right) \cdot
\end{aligned}$$

计算 H 沿着系统(1)的导数, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \sigma E' + (\sigma + \mu + q_2)I' = \\
& \sigma \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} + \sigma(1-n)\gamma I - \\
& (\sigma + \mu + q_2)(\mu + \gamma + q_1)I \leq \\
& \sigma \beta SI + \sigma(1-n)\gamma I - \\
& (\sigma + \mu + q_2)(\mu + \gamma + q_1)I = \frac{\sigma \beta S_0}{R_0} \left(\frac{R_0 S}{S_0} - 1 \right) I,
\end{aligned}$$

当 $R_0 \leq 1$ 时, $\frac{dH}{dt} \leq 0$, 并且 $\frac{dH}{dt} = 0$ 当且仅当 $I = 0$ 。由 LaSalle 不变集原理^[14]可知, 当 $R_0 \leq 1$ 时, E^0 在 Ω 内是全局渐近稳定的。

定理 4 当 $R_0 > 1$ 时, E^* 是局部渐近稳定的。

证明 系统(1)在 E^* 处的 Jacobian 矩阵为

$$\begin{aligned}
& (2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2) + \\
& (2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2) \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} + m\omega + \mu + q_3 \right) \cdot \\
& (2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2) + \\
& (2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2) \left(A - \frac{A}{1 + \alpha I^*} \right).
\end{aligned}$$

由不等式

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} \frac{A}{1 + \alpha I^*} + (2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2) \cdot \\
& (2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2) \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} = \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} \cdot \\
& [(2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2)(2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2) - \\
& ((\sigma + \mu + q_2)(\mu + \gamma + q_1) - \sigma(1-n)\gamma) / \\
& (1 + \alpha I^*)] > 0,
\end{aligned}$$

可得 $B_1 B_2 - B_3 > 0$ 。根据 Hurwitz 判据^[15], $H_1 = B_1 > 0$, $H_2 = B_1 B_2 - B_3 > 0$, $H_3 = B_3 H_2 > 0$, $J(E^*)$ 的其它 3 个特征根也是负的, 故 E^* 是局部渐近稳定的。

引理 1^[16] 系统(1)在 Ω 内是一致持续的, 等

价于存在一个紧的吸引集 $K \subset \Omega$ 。

定理 5 当 $R_0 > 1$ 时, E^* 是全局渐近稳定的。

证明 用 Li-Mulowney 几何方法^[12]来证明。据文献[17]的定理 2.3, 当且仅当 $R_0 > 1$ 时系统(1)在 Ω 内一致持续, 故单连通集 Ω 内存在一个紧的吸引集 K 。

考虑系统(1)的子系统

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (m\omega + \mu + q_3) & 0 & -\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} \\ \frac{\beta SI}{1+\alpha I} & -(\sigma + \mu + q_2) & \frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} + (1-n)\gamma \\ 0 & \sigma & -(\mu + \gamma + q_1) \end{bmatrix}$$

它的第二加性复合矩阵^[18]为

$$J^{[2]}(E^*) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - M & \frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} + (1-n)\gamma & \frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} \\ \sigma & -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - N & 0 \\ 0 & \frac{\beta I}{1+\alpha I} & -K \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} M &= 2\mu + m\omega + \sigma + q_2 + q_3, \\ N &= 2\mu + m\omega + \gamma + q_1 + q_3, \\ K &= 2\mu + \sigma + \gamma + q_1 + q_2, \end{aligned}$$

选 $P(S, E, I) = \text{diag}\left(1, \frac{E}{I}, \frac{E}{I}\right)$, 则 $P_f P^{-1} = \text{diag}\left(0, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}\right)$, 矩阵 $B = P_f P^{-1} + P J^{[2]} P^{-1}$ 可写成分块矩阵

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{11} = -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - M, \\ B_{12} &= \left(\frac{I}{E} \left(\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} + (1-n)\gamma \right), \frac{\beta SI}{E(1+\alpha I)^2} \right), \\ B_{21} &= \left(\frac{E}{I} \sigma, 0 \right)^T, \end{aligned}$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \frac{\beta I}{1+\alpha I} - N & 0 \\ \frac{\beta I}{1+\alpha I} & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - K \end{bmatrix}.$$

令 (u, v, w) 为 R^3 上的一个向量, 定义其范数 $\|\cdot\|$ 为

$$\|(u, v, w)\| = \max\{|u|, |v| + |w|\},$$

关于范数的 Lozinskil 测度为 $\mu(B)$, $\mu(B) \leq$

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (m\omega + \mu + q_3)S, \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (\sigma + \mu + q_2)E + (1-n)\gamma I, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\mu + \gamma + q_1)I, \end{cases} \quad (2)$$

系统(2)在 E^* 处的 Jacobian 矩阵为

$\sup\{g_1, g_2\}$, 其中 $g_1 = \mu_1(B_{11}) + |B_{12}|$, $g_{12} = |B_{21}| + \mu_1(B_{22})$, $|B_{12}|, |B_{21}|$ 为 l_1 矩阵范数, μ_1 为 l_1 范数的 Lozinskil 测度。

$$\begin{aligned} \mu_1(B_{11}) &= -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - M, \quad |B_{21}| = \frac{\sigma E}{I}, \\ |B_{12}| &= \max\left\{ \frac{I}{E} \left(\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} + (1-n)\gamma \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{\beta SI}{E(1+\alpha I)^2} \right\} = \frac{I}{E} \left[\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} + (1-n)\gamma \right] = \\ &\quad \frac{\beta SI}{E(1+\alpha I)^2} + \frac{I(1-n)\gamma}{E}, \\ B'_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - N & 0 \\ \frac{\beta S}{1+\alpha I} & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - K \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

取 B'_{22} 的对角元素的最大值即得 $\mu_1(B_{22})$ 。

$$\begin{aligned} \mu_1(B_{22}) &= \max\left\{ \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - N, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - K \right\} = \\ &\quad \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \min\{N, K\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - M + \frac{\beta SI}{E(1+\alpha I)^2} + \frac{I}{E} (1-n)\gamma, \\ g_2 &= \frac{\sigma E}{I} + \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \min\{N, K\}, \end{aligned}$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{\beta SI}{E(1 + \alpha I)} - (\sigma + \mu + q_2) + \frac{(1 - n)\gamma I}{E},$$

$$\frac{I'}{I} = \frac{\sigma E}{I} - (\mu + \gamma + q_1),$$

$$g_1 = -\frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - M + \frac{\beta SI}{E(1 + \alpha I)} + \frac{I(1 - n)\gamma}{E} +$$

$$\left(\frac{\beta SI}{E(1 + \alpha I)^2} - \frac{\beta SI}{E(1 + \alpha I)} \right) \leq$$

$$-\frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (\mu + m\omega + q_3) + \frac{E'}{E},$$

$$g_2 = \frac{I'}{I} + (\mu + \gamma + q_1) + \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \min\{N, K\} \leq$$

$$\frac{E'}{E} - \mu,$$

$$\mu(B) \leq \sup\{g_1, g_2\} \leq$$

$$\sup\left\{ -\frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - \mu + \frac{E'}{E}, \frac{E'}{E} - \mu \right\} \leq \frac{E'}{E} - \mu.$$

从而

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{E'}{E} - \mu \right) ds = \frac{1}{t} \ln \frac{E(t)}{E(0)} - \mu,$$

$$q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) ds \leq -\frac{\mu}{2} < 0.$$

根据文献[12]中定理 3.5, (S^*, E^*, I^*) 是全局渐近稳定的。

由系统(1)的子系统

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = q_3 S + q_2 E + q_1 I - (\mu + \varphi) Q, \\ \frac{dV}{dt} = m\omega S + n\gamma I + \varphi Q - \mu V, \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = q_3 S^* + q_2 E^* + q_1 I^* - (\mu + \varphi) Q^*, \\ \frac{dV}{dt} = m\omega S^* + n\gamma I^* + \varphi Q^* - \mu V^*, \end{cases}$$

$$Q(t) = Q(0)e^{-(\mu + \varphi)t} + \frac{q_3 S^* + q_2 E^* + q_1 I^*}{\mu + \varphi},$$

$$V(t) = V(0)e^{-\mu t} + \frac{m\omega S^* + n\gamma I^* + \varphi Q^*}{\mu},$$

取极限, 可得

$$Q(t) \rightarrow Q^*, V(t) \rightarrow V^*, t \rightarrow \infty,$$

所以, 正平衡点 E^* 是全局渐近稳定的。

4 数值模拟和敏感性分析

为验证以上结果, 用 Matlab 对系统(1)的结论进行数值模拟, 具体情况如表 1 所示。

表 1 仿真参数

Tab.1 Simulation parameter

参数	图 1	图 2
b	0.7	0.7
m	0.8	0.8
n	0.5	0.5
μ	0.06	0.06
σ	0.7	0.7
β	0.35	0.35
γ	0.3	0.3
ω	0.40	0.10
q_1	0.2	0.2
q_2	0.2	0.2
q_3	0.1	0.1
φ	0.4	0.4
α	2	2

图 2 模拟了无蠕虫平衡点 E^0 的稳定性, 此时基本再生数 $R_0 = 0.8259 < 1$, 可看出 t 趋于无穷时, 潜伏设备和感染设备均为零, 恶意蠕虫传播结束, E^0 是全局渐近稳定的, 验证了定理 3。

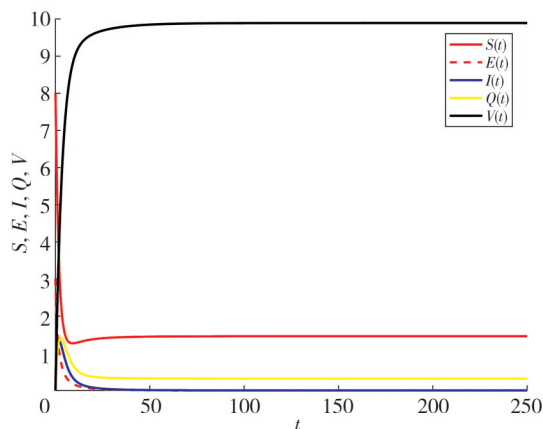


图 2 E^0 的稳定性

Fig.2 Stability of E^0

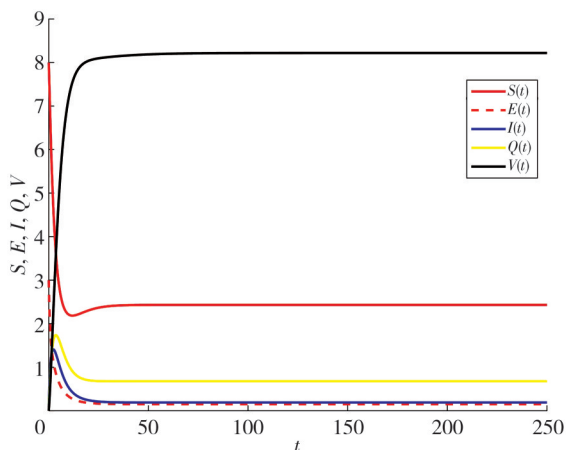


图 3 E^* 的稳定性

Fig.3 Stability of E^*

图 3 中, 令参数 $\omega = 0.10$, 其余参数和图 2 一样, 此时, 基本再生数 $R_0 = 1.6518 > 1$, 可看

出 t 趋于无穷时, 潜伏设备和感染设备都大于零, 恶意蠕虫会持续存在, E^* 是全局渐近稳定的, 验证了定理 5。

基本再生数 R_0 和其它参数的关系如图 4。其中, σ, β, b 与 R_0 呈正相关, $m, \omega, \gamma, q_1, q_2, q_3$ 与 R_0 呈负相关, 且 m, ω, q_1 的变化对 R_0 更敏感。结果表明, 增大感染设备的隔离率 q_1 , 增大杀毒软件的覆盖率 ω 以及生效率 m 都可使 R_0 减小, 即通过减少感染设备与其他设备的连接, 提高人们对杀毒软件的认识, 可有效控制蠕虫病毒传播。

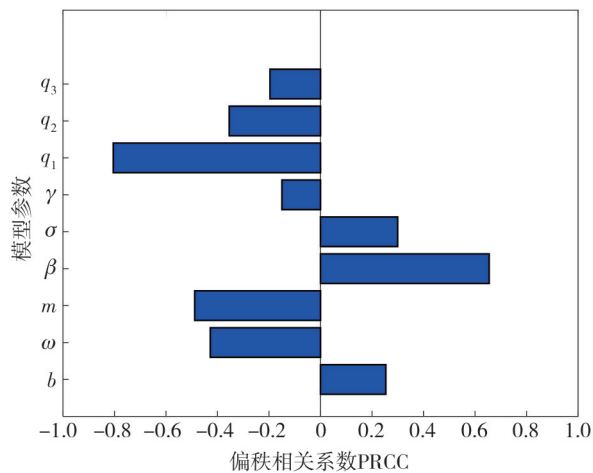


图 4 R_0 与参数的相关性

Fig. 4 Correlation between R_0 and parameters

5 结 论

本文研究了一类具有饱和发生率的 SEIQV 网络蠕虫传播模型, 考虑了安装杀毒软件和隔离对蠕虫传播的影响。计算了基本再生数 R_0 , 并证明了正平衡点的存在性, 通过 LaSalle 不变集原理, 证明了当 $R_0 \leq 1$ 时无蠕虫平衡点 E^0 是全局渐近稳定的, 蠕虫病毒传播结束; 用 Li-Mulowney 几何方法证明了当 $R_0 > 1$ 时正平衡点 E^* 是全局渐近稳定的, 蠕虫病毒将会在网络中传播。通过 Matlab 验证了结论的准确性, 并发现通过增大感染设备的隔离率 q_1 , 增大杀毒软件的覆盖率 ω 以及生效率 m , 都可减少 R_0 , 即通过减少感染设备与其他设备的连接, 提高人们对杀毒软件的认识, 可有效控制蠕虫病毒传播。

参考文献:

- [1] COHEN F. Computer viruses: theory and experiments [J]. Computers & Security, 1987, 6(1): 22-35.
 [2] KEPHART J O, WHITE S R. Directed-graph

epidemiological models of computer viruses[C]//Proceedings of 1991 IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy, 1991: 343-359.

- [3] KEPHART J O, WHITE S R. Measuring and modeling computer virus prevalence [C]//Proceedings 1993 IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy. IEEE, 1993: 2-15.
 [4] BADSHAH Q. Global stability of SEIQRS computer virus propagation model with non-linear incidence function [J]. Applied Mathematics, 2015, 6(11): 1926-1938.
 [5] XIAO X, FU P, DOU C, et al. Design and analysis of SEIQR worm propagation model in mobile internet [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2017, 43: 341-350.
 [6] KIM K S, IBRAHIM M M, JUNG I H, et al. Mathematical analysis of the effectiveness of control strategies to prevent the autorun virus transmission propagation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 371: 124955.
 [7] GAO Q, ZHUANG J. Stability analysis and control strategies for worm attack in mobile networks via a VEIQS propagation model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 368: 124584.
 [8] WANG R, XUE Y, XUE K. Dynamic analysis and optimal control of worm propagation model with saturated incidence rate [J]. Frontiers in Physics, 2023, 10: 1098040.
 [9] MADHUSUDANAN V, SRINIVAS M N, NWOKOYE C N H, et al. HOPF-bifurcation analysis of delayed computer virus model with holling type iii incidence function and treatment [J]. Scientific African, 2022, 15: e01125.
 [10] WANG R, XUE Y. Stability analysis and optimal control of worm propagation model with saturated incidence rate [J]. Computers & Security, 2023, 125: 103063.
 [11] 王瑞玲, 薛亚奎. 具有饱和发生率的网络蠕虫病毒模型分析 [J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2023, 57(3): 347-353.
 WANG Ruiling, XUE Yakui. Analysis of network worm virus model with saturated incidence rate [J]. Journal of Central China Normal University (Natural Sciences), 2023, 57(3): 347-353. (in Chinese)
 [12] LI M Y, MULDOWNNEY J S. A geometric approach to global-stability problems [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1996, 27(4): 1070-1083.