

文章编号: 1673-3193(2024)04-0481-07

疫苗接种及多种措施对新型冠状病毒传播及死亡的影响

胡国庆, 薛亚奎

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

摘要: 为了深入了解新型冠状病毒的传播机制, 结合疫苗接种的特点, 考虑了人口流动、核酸检测和个人防护多种防控措施, 将感染者分为无症状感染者、轻症感染者和重症感染者, 建立了新型冠状病毒的SEIR传播动力学模型。利用下一代矩阵法计算了基本再生数, 利用Lyapunov函数分析了平衡点的稳定性。通过数值模拟和敏感性分析发现: 增加疫苗接种率对减少死亡人数有帮助; 控制流动人口和进行核酸检测对减少死亡人数和控制疫情的传播都有帮助。疫苗接种率较低时虽然不会减少无症状感染者的数量, 但也能减少总感染人数与死亡人数。

关键词: 传染病模型; 无症状感染; 疫苗接种; 新型冠状病毒; 全局稳定性

中图分类号: O175

文献标识码: A

doi: 10.3969/j.issn.1673-3193.2024.04.009

引用格式: 胡国庆, 薛亚奎. 疫苗接种及多种措施对新型冠状病毒传播及死亡的影响[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2024, 45(4): 481-487.

HU Guoqing, XUE Yakui. Impact of vaccination and multiple measures on corona virus infection and death [J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2024, 45(4): 481-487.

Impact of Vaccination and Multiple Measures on Corona Virus Infection and Death

HU Guoqing, XUE Yakui

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: In order to gain insights into the mechanism of corona virus transmission, based on the characteristics of vaccination, the SEIR transmission dynamics model of corona virus was established by taking into account various prevention and control measures such as population flow, nucleic acid detection and personal protection. The infected persons were classified into asymptomatic, mild and severe infected persons. The next generation matrix method was used to calculate the basic regeneration number and Lyapunov function was used to analyze the stability of the equilibrium point. Through numerical simulation and sensitivity analysis, it is found that increasing the vaccination rate is helpful to reduce the number of deaths; Control of floating populations and nucleic acid testing are both helpful in reducing the number of deaths and controlling the spread of the epidemic. Low vaccination rates will not reduce the number of asymptomatic infections, but they can reduce the total number of infections and deaths.

Key words: epidemic model; asymptomatic infection; vaccination; corona virus; global stability

收稿日期: 2022-11-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11971278); 山西省自然科学基金资助项目(201801D221040)

作者简介: 胡国庆(1998-), 男, 硕士生, 主要从事生物数学研究。

通信作者: 薛亚奎(1970-), 男, 教授, 硕士生导师, 主要从事生物数学研究。E-mail: xyk5152@163.com。

0 引言

新型冠状病毒给世界带来了巨大的灾难,研究其传播动力学性质是非常有必要的。传染病的动力学研究有很多经典模型^[1-3]。Kar等^[4]考虑了媒体宣传与国家政策对新型冠状病毒传播的影响。Sujath等^[5]利用机器学习通过线性回归、多层感知和向量自回归方法预测了印度的 COVID-19 演变。Khan等^[6]提出了考虑未发现感染病例、社会隔离、解除隔离和再次感染的模型。为了考虑感染的全局动态,Alqadi等^[7]开发了扩展的 SIR 模型。Youssef等^[8]利用 SEIQR 类型模型研究了 COVID-19 的传播情况。虽然新型冠状病毒的模型有很多,但都没有考虑到接种疫苗在提供保护的同时会增加无症状感染者的人数。本文采用经典的双线性发生率,综合考虑疫苗的接种、人口流动、核酸检测、媒体的宣传和个人的防护措施,将感染人群分为无症状感染者、轻症患者和重症感染者,建立了 SEIR 传染病模型,主要研究了以下问题:

1) 与未接种疫苗的感染者相比,接种过疫苗的感染者成为无症状感染者的概率更高。在这种情况下,接种疫苗如何影响新型冠状病毒的流行病学动态和死亡情况。

2) 在目前新型冠状病毒疫苗的接种率下,非药物干预对新型冠状病毒的传播及死亡的影响情况。

1 模型的建立

本文将人群分为易感类 S 、潜伏类 E 、无症状感染类 I_0 、轻症感染类 I_1 、重症感染类 I_2 和恢复类 R , 并做如下假设:

1) 有些人在收到某区域发生感染的信息后自我隔离,不再被感染,直接进入恢复者;

2) 将临床上普通型和轻型统一视为轻症患者,临床上重型和危重型统一视为重症患者;

3) 潜伏者在核酸检测中被发现后可以全部被治愈,不会转化成轻症患者;为简化模型,本文视在检测中被发现的潜伏者直接进入恢复者;

4) 潜伏者一旦成为有症状感染者则立即就医隔离,从而不会传染给易感者,不具有感染性;

5) 无症状感染者的含义为全程无症状感染者;

6) 新型冠状病毒疫苗的有效性不是 100%,

接种疫苗后感染新型冠状病毒则不会变成重症患者,未接种疫苗的人感染新型冠状病毒后则有可能发展成为重症患者,同为轻症患者的情况下,接种过疫苗的人治愈率更高;

7) 轻症患者不会因病死亡,只考虑重症患者的因病死亡;

8) 不考虑垂直感染。

依据假设,则各个人群之间的人员流动可用图 1 表示。由流程图可以建立模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - (1 - p_1)^2(1 - pp_4)S(\beta_1 E + \beta_2 I_0) - p_2 S - dS, \\ \frac{dE}{dt} = (1 - p_1)^2(1 - pp_4)S(\beta_1 E + \beta_2 I_0) - \sigma_1 E - \alpha E - dE, \\ \frac{dI_0}{dt} = \left[h \frac{p(1 - p_4)}{1 - pp_4} + p_3 \frac{(1 - p)}{1 - pp_4} \right] \sigma_1 E - \alpha I_0 - dI_0, \\ \frac{dI_1}{dt} = \left[(1 - h) \frac{p(1 - p_4)}{1 - pp_4} + (1 - p_3) \frac{(1 - p)}{1 - pp_4} \right] \cdot \sigma_1 E + \alpha I_0 - \sigma_2 \lambda I_1 - \gamma_0(1 - \lambda)I_1 - \gamma_1 \lambda I_1 - dI_1, \\ \frac{dI_2}{dt} = \sigma_2 \lambda I_1 - \gamma_2 I_2 - \eta I_2 - dI_2, \\ \frac{dR}{dt} = p_2 S + \alpha E + \gamma_0(1 - \lambda)I_1 + \gamma_1 \lambda I_1 + \gamma_2 I_2 - dR, \end{cases} \quad (1)$$

式中: A 为常数流动人口; β_1 和 β_2 分别为潜伏者和无症状感染者的传染率系数; α^{-1} 为核酸检测间隔; p 为疫苗接种率; p_1 为个人防护率,即人群遵守防疫规则时,潜伏者和无症状感染者无法向外界传染的概率,也是在潜伏者和无症状感染者向外界传染后,易感者不会被感染的概率; p_2 为媒体宣传后自我隔离的防护率; p_3 为未接种疫苗的人潜伏期结束后成为无症状感染者的比例; h 为接种疫苗的人潜伏期结束后成为无症状感染者的比例; p_4 为疫苗有效性,既接种人群相对于未接种人群的群体感染率所降低的百分比; σ_1^{-1} 为平均潜伏期; σ_2 为未接种疫苗的轻症患者到重症患者转化率; γ_0^{-1} 为接种疫苗过的轻症患者的平均患病期; γ_1^{-1} 为未接种过疫苗的轻症患者的平均患病期; γ_2^{-1} 为重症患者的平均患病期; η 为重症患者的因病死亡率; d 为自然死亡率; $\lambda =$

$\frac{(1-p_3)(1-p)}{(1-h)p(1-p_4)+(1-p_3)(1-p)}$ 。以参数均为正数。

系统(1)的初始条件为 $S(0) \geq 0, E(0) \geq 0, I_0(0) \geq 0, I_1(0) \geq 0, I_2(0) \geq 0$ 和 $R(0) \geq 0$ 。

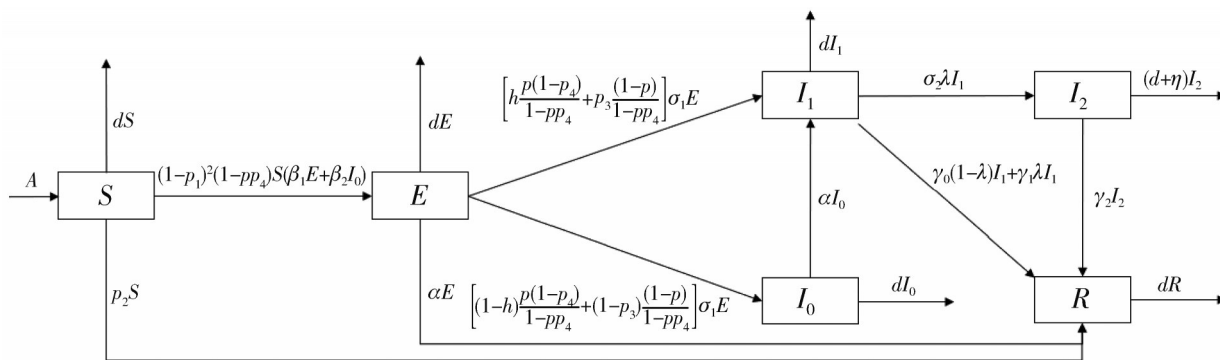


图 1 SEIR 模型的人员流动图

Fig. 1 Personnel flow diagram of SEIR model

将人口的总数设为 N , 则 $N = S + E + I_0 + I_1 + I_2 + R$ 。将系统(1)的方程相加得到

$$(S_0, E_0, I_{0,0}, I_{1,0}, I_{2,0}) = \left(\frac{A}{p_2 + d}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

$$\frac{dN}{dt} = A - dN - \eta I_2,$$

利用下一代矩阵法求模型(2)的基本再生数 $R_0^{[9]}$ 。为方便计算, 令

即 $\frac{dN}{dt} + dN \leq A$, 对不等式进行积分, 由此得

$$a = (1 - p_1)^2(1 - pp_4), \quad b = \sigma_1 + \alpha + d,$$

$$N(t) \leq \frac{A}{d} + \left(N(0) - \frac{A}{d} \right) e^{-dt}, \text{ 从而 } 0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{A}{d}.$$

$$c = \alpha + d, \quad k = h \frac{p(1-p_4)}{1-pp_4} + p_3 \frac{(1-p)}{1-pp_4},$$

因此, 系统(1)的正向不变集 $\Omega = \left\{ (S, E, I_0, I_1, I_2, R) \in \mathbb{R}_+^6 \mid 0 < S + E + I_0 + I_1 + I_2 + R < \frac{A}{d} \right\}$ 。

$$z = \lambda \sigma_2 + (1 - \lambda) \gamma_0 + \lambda \gamma_1 + d,$$

2 基本再生数及平衡点的存在性

则

因为系统(1)的前 5 个方程不含 R , 故只需考虑下列子系统

$$F = \begin{bmatrix} \frac{a\beta_1 A}{p_2 + d} & \frac{a\beta_2 A}{p_2 + d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - (1 - p_1)^2(1 - pp_4)S(\beta_1 E + \beta_2 I_0) - p_2 S - dS, \\ \frac{dE}{dt} = (1 - p_1)^2(1 - pp_4)S(\beta_1 E + \beta_2 I_0) - \sigma_1 E - \alpha E - dE, \\ \frac{dI_0}{dt} = \left[h \frac{p(1-p_4)}{1-pp_4} + p_3 \frac{(1-p)}{1-pp_4} \right] \sigma_1 E - \alpha I_0 - dI_0, \\ \frac{dI_1}{dt} = \left[1 - h \frac{p(1-p_4)}{1-pp_4} - p_3 \frac{(1-p)}{1-pp_4} \right] \sigma_1 E + \alpha I_0 - \sigma_2 \lambda I_1 - \gamma_0(1 - \lambda)I_1 - \gamma_1 \lambda I_1 - dI_1, \\ \frac{dI_2}{dt} = \sigma_2 \lambda I_1 - \gamma_2 I_2 - \eta I_2 - dI_2. \end{cases} \quad (2)$$

$$V = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ -k\sigma_1 & c & 0 & 0 \\ -(1-k)\sigma_1 & -\alpha & z & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda\sigma_2 & \gamma_2 + \eta + d \end{bmatrix},$$

则

$$FV^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a(\beta_1 c + \beta_2 k \sigma_1) A}{bc(p_2 + d)} & \frac{a\beta_2 A}{c(p_2 + d)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

基本再生数 R_0 为矩阵 FV^{-1} 的谱半径, 则

$$R_0 = \frac{a(\beta_1 c + \beta_2 k \sigma_1) A}{bc(p_2 + d)}.$$

定理 1 系统(2)存在唯一的无病平衡点 $P_0 =$

定理 2 系统(2)在 $R_0 > 1$ 时存在唯一的地方

病平衡点 $P^*=(S^*, E^*, I_0^*, I_1^*, I_2^*)$ 。其中,

$$S^* = \frac{A}{R_0(p_2 + d)}, E^* = \frac{A}{b} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right),$$

$$I_0^* = \frac{k\sigma_1 A}{bc} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right), I_2^* = \frac{\sigma_2 \lambda I_1^*}{\gamma_2 + \eta + d},$$

$$I_1^* = \frac{A\sigma_1 [k\alpha + (1-k)c]}{bcz} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right).$$

3 平衡点的稳定性

定理 3 若 $R_0 > 1$, 则唯一的地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的。

证明 构造下列的 Lyapunov 函数^[10-11]

$$V_2 = S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} + E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*} +$$

$$\frac{a\beta_2}{c} S^* \left(I_0 - I_0^* - I_0^* \ln \frac{I_0}{I_0^*} \right).$$

对 V_2 关于 t 求导, 则函数 V_2 沿着系统(2)轨线的导数为

$$\frac{dV_2}{dt} = \left(1 - \frac{S}{S_0}\right) [A - aS(\beta_1 E + \beta_2 I_0) - p_2 S -$$

$$dS +] \left(1 - \frac{E}{E^*}\right) [aS(\beta_1 E + \beta_2 I_0) - bE] +$$

$$\frac{a\beta_2}{c} S^* \left(1 - \frac{I_0}{I_0^*}\right) (k\sigma_1 E - cI_0) =$$

$$(a\beta_1 E^* + p_2 + d) S^* \left(2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*}\right) +$$

$$a\beta_2 S^* I_0^* \left(3 - \frac{EI_0^*}{E^* I_0} - \frac{S}{S^*} - \frac{S^* E^* I_0}{SEI_0^*}\right).$$

由算术平均值与几何平均值的关系, 有

$$\left(2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*}\right) \leq 0,$$

$$\left(3 - \frac{EI_0^*}{E^* I_0} - \frac{S}{S^*} - \frac{S^* E^* I_0}{SEI_0^*}\right) \leq 0,$$

所以有 $\frac{dV_2}{dt} \leq 0$ 。因 $(S^*, E^*, I_0^*, I_1^*, I_2^*) \in \Omega$, 由 LaSalle 不变集原理^[12]知, 地方病平衡点 P^* 全局渐近稳定。

定理 4 若 $R_0 < 1$, 则唯一的无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的。

证明 构造下列的 Lyapunov 函数^[10-11]

$$V_1 = S - S_0 - S_0 \ln \frac{S}{S_0} + E + \frac{a\beta_2}{c} S_0 I_0.$$

对 V_1 关于 t 求导, 则函数 V_1 沿着系统(2)轨

线的导数为

$$\frac{dV_1}{dt} = \left(1 - \frac{S}{S_0}\right) [A - aS(\beta_1 E + \beta_2 I_0) - p_2 S -$$

$$dS] + aS(\beta_1 E + \beta_2 I_0) - bE + \frac{a\beta_2}{c} S_0 (k\sigma_1 E - cI_0) =$$

$$b \left(\frac{a(\beta_1 c + \beta_2 k)}{bc} S_0 - 1 \right) E +$$

$$(p_2 + d) S_0 \left(2 - \frac{S_0}{S} - \frac{S}{S_0} \right) = b(R_0 - 1) E +$$

$$(p_2 + d) S_0 \left(2 - \frac{S_0}{S} - \frac{S}{S_0} \right).$$

由算术平均值与几何平均值的关系, 有

$$\left(2 - \frac{S_0}{S} - \frac{S}{S_0}\right) \leq 0.$$

又 $R_0 < 1$, 所以有 $\frac{dV_1}{dt} \leq 0$ 。因 $(S_0, E_0, I_{0,0},$

$I_{1,0}, I_{2,0}) \in \Omega$, 由 LaSalle 不变集原理^[12]知, 无病平衡点 P_0 全局渐近稳定。

4 数值模拟及敏感性分析

4.1 数值模拟

为了验证模型, 对系统(2)进行数值模拟。图 2 模拟了地方病平衡点的稳定性, 初始条件为 $S(0)=5\ 000, E(0)=5, I_0(0)=4, I_1(0)=0, I_2(0)=0, R(0)=0$, 系统(2)的其它参数见表 1。

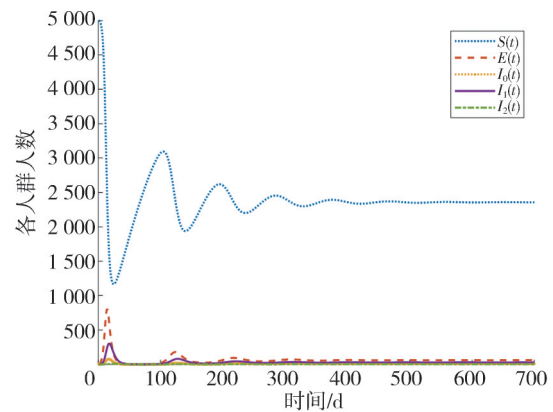


图 2 地方病平衡点的稳定性($R_0=2.3568$)

Fig. 2 The stability of the equilibrium of endemic diseases at $R_0=2.3568$

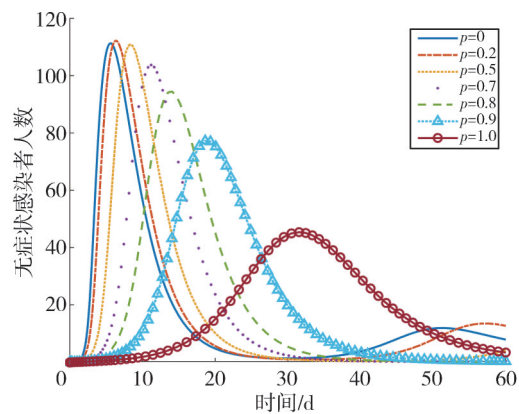
同时为了得到各种措施对新型冠状病毒传播的影响, 设置初始条件 $S(0)=5\ 000, E(0)=5, I_0(0)=4, I_1(0)=0, I_2(0)=0, R(0)=0$, 系统(2)的其它参数以表 1 为基准, 仅对需要分析的参数进行改变。

图 3 展示了疫苗接种率对无症状感染者、总感染者与重症患者人数的影响。图 3(a) 显示, 疫苗接

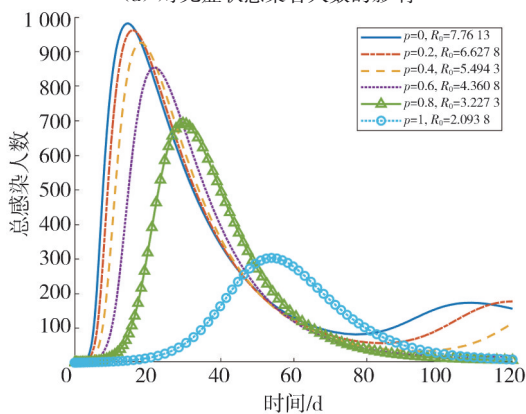
率较低时,无症状感染者人数的峰值几乎不变。

表 1 参数取值
Tab.1 Parameter value

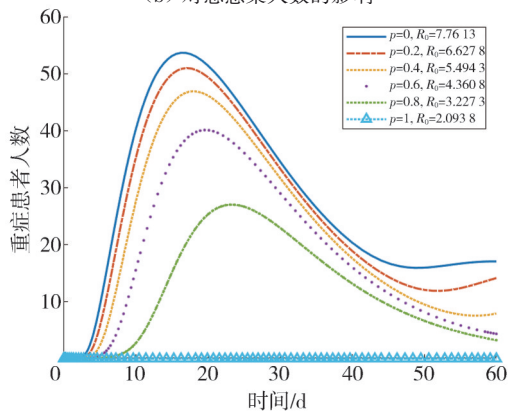
参数	取值	参数	取值
$A/\text{人}$	50	α	0.33
β_1	0.015	σ_1	0.142 9
β_2	0.023 2	σ_2	0.01
p	0.897	γ_0	0.2
p_1	0.8	γ_1	0.111 1
p_2	0.002	γ_2	0.05
p_3	0.179	η	0.021
h	0.32	d	0.007
p_4	0.793 4		



(a) 对无症状感染者人数的影响



(b) 对总感染人数的影响



(c) 对重症患者人数的影响

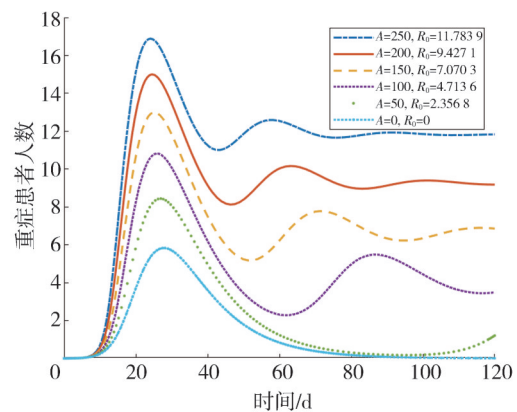
图 3 疫苗接种率 p 的影响

Fig. 3 Effects of vaccination rate p

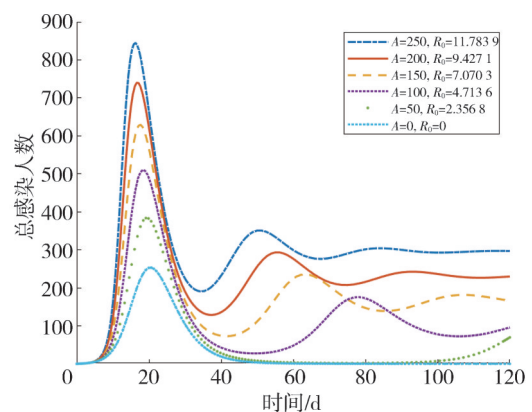
随着接种率的增加,无症状感染者人数的峰值不断降低,到达峰值的时间也在往后推迟。图 3(b) 和图 3(c) 显示,随着疫苗接种率的增加,总感染者和重症患者的数量是减少的,并且疫苗接种率越高,总感染者人数与重症患者人数的减少越明显。这说明接种疫苗在减少死亡人数和控制疫情扩散方面是非常有帮助的,应快速增加疫苗接种,使接种率到达一个比较高的水平。

图 3 整体显示,随着疫苗接种率的增加,虽然无症状感染者数量先不变后减少,但感染人数与重症患者人数都在减少,说明无论疫苗接种率为多少,都对控制疫情和减少死亡人数有帮助。

图 4(a) 与图 4(b) 表明控制流动人口 A 虽然没有缩短重症患者 I_2 与感染人数到达峰值的时间,但是明显降低了重症患者 I_2 的人数与总感染人数的峰值。



(a) 对重症患者人数的影响



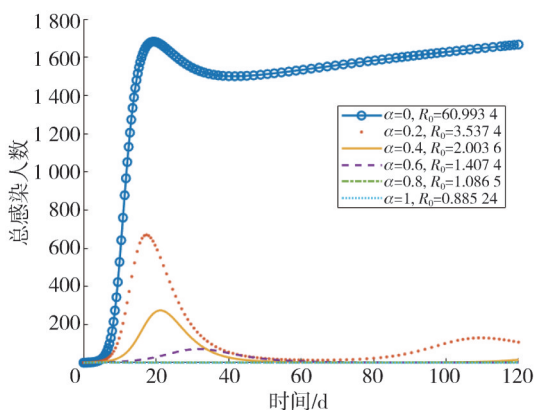
(b) 对感染人数的影响

图 4 流动人口 A 的影响

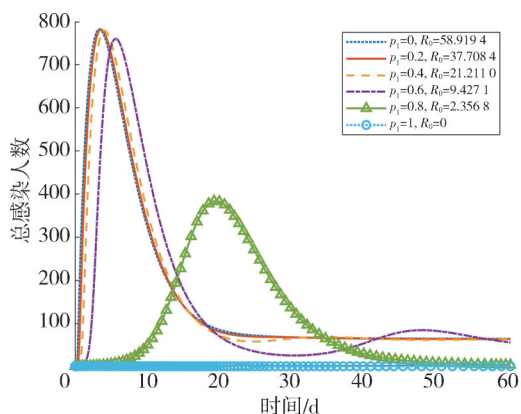
Fig. 4 Effects of floating population A

图 5(a) 表明,增加核酸检测率对降低感染人数的作用是非常明显的,但随着核酸检测率的同比例增加,减少的感染人数却是递减的,所以不

必一味地增加核酸检测率。图 5(b) 显示,个人防护力在 0.6 之前感染人数的峰值降低不明显,在 0.8 之后感染人数的峰值出现了明显的降低。这表明如果在人群中只有 60% 的人在认真防护对控制疫情没有任何帮助;或者所有人都进行个人防护,但防护效果只有认真防护效果的 60% 以下时,对疫情控制同样没有任何效果。



(a) 核酸检测率 α 对总感染人数的影响



(b) 个人防护率 p_1 对总感染人数的影响

图 5 α 与 p_1 的影响

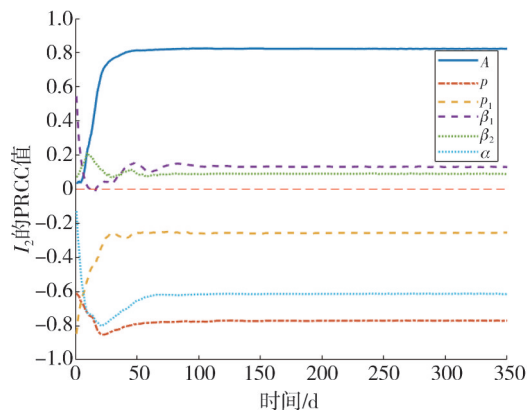
Fig. 5 Effects of α and p_1

4.2 敏感性分析

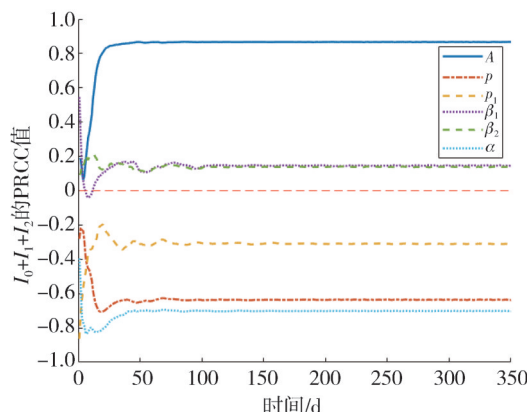
新型冠状病毒的传播主要受到流动人口、疫苗接种、个人防护和核酸检测的影响。通过 PRCC 分析这几个参数对重症感染者人数与总感染人数的影响的敏感性。

由图 6 可以清晰地看出,疫苗接种率 p 、核酸检测率 α 和个人防护率 p_1 与重症患者人数和总感染人数均是负相关的,流动人口 A 与重症患者人数和总感染人数呈正相关。图 6(a) 表明,影响重症患者人数的主要因素是流动人口 A , 其次是疫苗接种率 p 和核酸检测率 p_1 。因此,增加疫苗接种

率,控制人口流动和增加核酸检测次数可以有效减少重症患者人数,从而减少死亡人数。图 6(b) 表明,影响感染人数的主要因素是流动人口 A 与核酸检测率 p_1 , 其次是疫苗接种率 p , 所以控制人口流动与适当增加核酸检测的次数是控制疫情的最佳方法。



(a) 对重症患者人数的影响



(b) 对总感染人数的影响

图 6 接种疫苗与多种措施的影响

Fig. 6 Effects of vaccinations and multiple measures

5 结 论

本文建立了有疫苗接种和其它多种措施的 SEIR 模型,依据模型给出了基本再生数 R_0 , 讨论了平衡点的存在性与稳定性。通过数值模拟与敏感性分析发现:

- 1) 控制人口流动、加强核酸检测与接种疫苗是减少死亡最有效的方法,疫苗接种率较低时不会减少无症状感染者的数量,但会减少总感染人数与死亡人数;
- 2) 控制人口流动与加强核酸检测是控制疫情,减少感染人数最有效的方法;
- 3) 无症状感染者增加的情况下只能通过核酸

检测检查出来,但核酸检测的边际效益是递减的,所以平时不必过于频繁地检测,必要时可以适当增加检测频率;

4)个人防护一定要做好,如正确佩戴口罩,保存社交距离和勤洗手等。并且个人防护对控制疫情的影响是非常依赖群体的,仅仅小部分人做好个人防护是没有用的,必须大部分人都严格执行。

参考文献:

- [1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics I 1927 [J]. *Bulletin of mathematical biology*, 1991, 53(1): 33-55.
- [2] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics II—The problem of endemicity [J]. *Bulletin of mathematical biology*, 1932, 138(834): 55-83.
- [3] BAILEY N T J. *The mathematical theory of infectious diseases and its applications* [M]. London: Charles Griffin, 1975.
- [4] KAR T K, NANDI S K, JANA S, et al. Stability and bifurcation analysis of an epidemic model with the effect of media[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2019, 120: 188-199.
- [5] SUJATH R A A, CHATTERJEE J M, HASSANIEN A E. A machine learning forecasting model for COVID-19 pandemic in India [J]. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 2020, 34: 959-972.
- [6] KHAN Z S, VAN BUSSEL F, HUSSAIN F. A predictive model for Covid-19 spread-with application to eight US states and how to end the pandemic[J]. *Epidemiology & Infection*, 2020, 148: e249.
- [7] ALQADI H, BANI-YAGHOUB M. Incorporating global dynamics to improve the accuracy of disease models: Example of a COVID-19 SIR model [J]. *Plos one*, 2022, 17(4): e0265815.
- [8] YOUSSEF H M, ALGHAMDI N, EZZAT M A, et al. A proposed modified SEIQR epidemic model to analyze the COVID-19 spreading in Saudi Arabia[J]. *Alexandria Engineering Journal*, 2022, 61(3): 2456-2470.
- [9] DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission [J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, 180(1-2): 29-48.
- [10] LI J, XIAO Y, ZHANG F, et al. An algebraic approach to proving the global stability of a class of epidemic models [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, 13(5): 2006-2016.
- [11] LI J, YANG Y, ZHONG Y. Global stability of an epidemic model with latent stage and vaccination [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, 12(4): 2163-2173.
- [12] LASALLE J P. *The stability of dynamical systems* [M]. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.