文章编号: 1673-3193(2024)02-0163-07

度为2的广义星图矩阵的逆特征值问题

李繁华, 雷英杰, 苏　然

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

摘　要: 运用两种不同的方法对度为2的广义星图矩阵(一种特殊类型的树的矩阵)的逆特征值问题进行了深入研究。首先, 引入了一种标记这种树的顶点的方案, 以便以多种特殊形式表示相应的矩阵。然后, 针对给定的两类不同的特征数据, 将此类矩阵的逆特征值问题转化为线性方程组求解问题, 得到了所研究问题有唯一解的充分必要条件。最后, 给出了矩阵唯一解的表达式和相应的算法。通过数值模拟实例验证了结果的准确性。

关键词: 向量对; 特征对; 逆特征值问题; 广义星图; 图矩阵

中图分类号: O157　　**文献标识码:** A　　**doi:** 10.3969/j.issn.1673-3193.2024.02.005

引用格式: 李繁华, 雷英杰, 苏然. 度为2的广义星图矩阵的逆特征值问题[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2024, 45(2): 163-169.

LI　Fanhua, LEI　Yingjie, SU　Ran. Inverse eigenvalue problems for generalized star graph matrix with degree 2[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2024, 45(2): 163-169.

Inverse Eigenvalue Problems for Generalized Star Graph Matrix with Degree 2

LI Fanhua, LEI Yingjie, SU Ran

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: The inverse eigenvalue problems of generalized star graph matrices (matrices of a special kind of tree) with degree 2 were studied by using two methods. Firstly, a scheme for labeling the vertices of such a tree was introduced in order to express the corresponding matrices in a number of special forms. Then, inverse eigenvalue problem of matrix for the given two different kinds of eigendata was transformed into the solution of the system of linear equations, and the sufficient and necessary conditions for the problem to have a unique solution were obtained. Finally, an expression for the unique solution of the matrix was provided, and the numerical algorithms and examples were given to verify the accuracy of the results.

Key words: vector pair; characteristic pair; inverse eigenvalue problem; generalized star graph; graph matrix

0　引　言

逆特征值问题是指在一定条件下, 根据预先给定的特征值或特征向量, 求解具有特殊结构的矩阵的问题。逆特征值问题在生活中的应用随处可见, 而且至今仍是热门的研究问题之一, 如在地球物理

收稿日期: 2023-06-30

基金项目: 山西省基础研究计划资助项目(202203021211088)

作者简介: 李繁华(1998—), 女, 硕士生, 主要从事组合矩阵理论的研究。

通信作者: 雷英杰(1970—), 男, 副教授, 硕士生导师, 主要从事组合矩阵理论、图论及其在相关学科应用的研究。E-mail: leiyingjie@nuc.edu.cn。

学、结构动力学、质量弹簧振动、电路分析、信号处理、图论等[1-10]中的应用。在结构设计中，往往要求满足一定向量对的条件，因此，向量对的应用不仅在理论上是有意义的，而且在工程上也是有价值的[2]。

描述矩阵结构的一种有效的方法是用图表示它们。一个$n\times n$阶对称矩阵可以用n个顶点上的无向图表示。此外，在图论的应用中，图的矩阵表示也具有重要的作用。Nair等[11]中研究了具有规定图的矩阵的逆特征值问题。Sen和Sharma[12-13]研究了关于从给定特征数据重建特殊非循环矩阵(如路径或扫帚)的逆特征值问题。Pickmann等[14]研究了从给定特征数据构建箭头矩阵和双箭头矩阵的逆特征值问题。易福侠[15]研究了由向量对构造广义箭状矩阵的问题。Sen等[16]研究了从给定最大最小特征值来构造度为2的广义星图矩阵的逆特征值问题。因此，从不同类型的特征数据中构造各种结构的矩阵的方法确实是有用的。

然而由特征对和向量对构造相应该矩阵的研究却很少。本文重新定义了度为2的广义星图的矩阵表示，并研究了针对两类不同的特征对和向量对构建该矩阵的问题。

1 基础知识

令V是一个有限集，P是仅有两个不同元素的V的所有子集的集合。令$E\subset P$，则$G=(V,E)$被称为顶点集V和边集E的图。P的选择意味着所考虑的图是无向图，没有多重边或环。G的一条路径是由不同的顶点$v_1,v_2,\cdots,v_n$组成的序列，其中连续的顶点是相邻的。如果图的每一对顶点之间都存在一条路径，那么这个图就是连通的。一个循环是一个连通图，其中每个顶点都与恰好另外两个顶点相邻。树是没有循环的连通图。

给定一个$n\times n$对称矩阵$\boldsymbol{A}$，该矩阵对应的图$G(\boldsymbol{A})$具有顶点集$\{1,2,\cdots,n\}$和边集$\{ij: i\neq j, a_{ij}\neq 0\}$。对于具有$n$个顶点的图$G$，$S(G)$表示以$G$为其图的所有$n\times n$对称矩阵的集合。非循环矩阵是其图为一个森林的矩阵，即其每个连通分量都是一棵树[11]。一些无环矩阵的简单示例是其图为路径、扫帚[13]和蜈蚣[10]的矩阵。

定义1 设$n,k\in\mathbf{Z}^+$，且满足$n=2k+1$。将悬挂边(即两个顶点上的路径)连接到含有$k+1$个顶点的星上的每个非中心顶点，从而获得度为2的n个顶点上的广义星。$2k+1$个顶点上度为2的广义星用G_2S_k(见图1)表示。

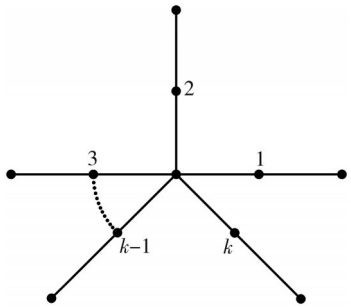

图1 度为2的广义星图(G_2S_k)

Fig. 1 Generalized star of depth 2(G_2S_k)

根据定义可知，度为2的广义星图有奇数个顶点。需要注意的是，G_2S_k只有一个度为k的顶点，它是底层星图的中心顶点，将该顶点称为G_2S_k的中心顶点。G_2S_k恰有k个度为2的顶点$(1,2,\cdots,k)$和k个悬挂顶点。去掉G_2S_k的中心顶点后可得到k条孤立边。

本文引入一种标记G_2S_k的顶点的方法，以便用一种特殊的形式表示相应的矩阵。将G_2S_k的中心顶点标记为0，与其相邻的k个顶点标记为$1,2,\cdots,k$。设f是集合$\{1,2,\cdots,k\}$上的一个置换，与顶点i相邻的悬挂顶点标记为$k+f(i)$。如图2中G_2S_3所示，有$3!=6$种可能的标记方式。

定义2 G_2S_k在任何置换f下对应的矩阵记为$\boldsymbol{A}_f\in S(G_2S_k)$。该矩阵的对角线元素由$a_i(0\leqslant i\leqslant 2k)$表示，连接中心顶点和顶点$j(1\leqslant j\leqslant k)$的边的非对角线元素由$b_j$表示，连接顶点$j$和悬挂顶点$k+f(j)$的边的非对角线元素由$b_{k+f(j)}$表示。任何矩阵$\boldsymbol{A}_f\in S(G_2S_k)$都可表示为

$$\boldsymbol{A}_f=\begin{bmatrix} a_0 & b_1 & \cdots & b_k & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & & \boldsymbol{B}_{k\times k} & \\ b_k & 0 & 0 & a_k & & & \\ 0 & & & & a_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & & \boldsymbol{B}_{k\times k}^{\mathrm{T}} & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 & a_{k+k} \end{bmatrix}_{n\times n}, \tag{1}$$

式中：$f(j)$的值由置换f决定，矩阵$\boldsymbol{B}_{k\times k}$的第$j$行第$f(j)$列的元素为$b_{k+f(j)}$，其余元素都为0。显然，矩阵$\boldsymbol{B}_{k\times k}^{\mathrm{T}}$的第$f(j)$行第$j$列的元素为$b_{k+f(j)}$，其余元素都为0。

考虑如下两个逆特征值问题：

问题1 给定两个非零向量对

$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{U}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{V}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$。

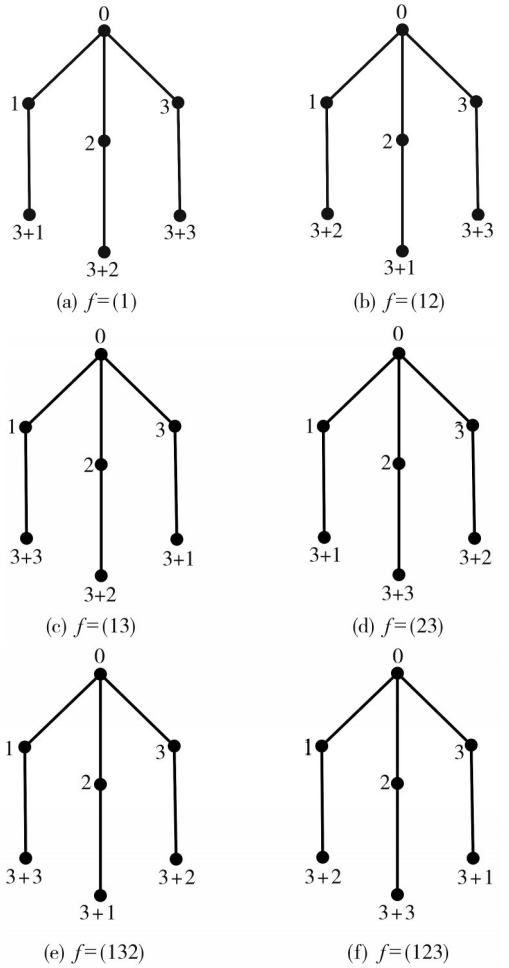

图2　G_2S_3的标记方案

Fig. 2　Labellings of G_2S_3

构造形如式(1)的矩阵$\boldsymbol{A}_f$，使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_f\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U},\\ \boldsymbol{A}_f\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{V}。\end{cases}\tag{2}$$

问题2　给定两个不同的实数λ_1，λ_2及两组非零向量

$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$。

构造形如式(1)的矩阵$\boldsymbol{A}_f$，使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_f\boldsymbol{X}=\lambda_1\boldsymbol{X},\\ \boldsymbol{A}_f\boldsymbol{Y}=\lambda_2\boldsymbol{Y}。\end{cases}\tag{3}$$

作如下约定：

$$c_{k+f(j)}=x_{j+1}x_{i+1}^{-1}-y_{j+1}y_{i+1}^{-1},$$
$$i=k+f(j),j=1,\cdots,k,$$
$$c_j=x_{k+f(j)+1}x_{j+1}^{-1}-y_{k+f(j)+1}y_{j+1}^{-1},\ j=1,\cdots,k,$$
$$d_i=x_1x_{i+1}^{-1}-y_1y_{i+1}^{-1},\ i=1,\cdots,k,$$
$$e_i=u_{i+1}x_{i+1}^{-1}-v_{i+1}y_{i+1}^{-1},\ i=0,\cdots,2k。$$

2　问题的解

定理 1　给定两个非零向量对

$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{U}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{V}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$,

则问题1有唯一解等价于以下条件成立：

1）$x_{i+1}\neq 0, y_{i+1}\neq 0, i=0,\cdots,2k$;

2）$c_{k+f(j)}\neq 0, i=k+f(j), j=1,\cdots,k$;

3）$d_i\neq 0, i=1,\cdots,k$;

4）$e_0=\sum_{j=1}^{k}\left(e_j-e_{k+f(j)}c_{k+f(j)}^{-1}c_j\right)d_j^{-1}x_{j+1}x_1^{-1}-$

$\sum_{j=1}^{k}\left(e_j-e_{k+f(j)}c_{k+f(j)}^{-1}c_j\right)d_j^{-1}y_{j+1}y_1^{-1}$。

证明　设$\boldsymbol{A}_f\in S(G_2S_k)$具有形式(1)。

当$k+1\leqslant i\leqslant 2k$时，$k+f(j)=i$，结合式(2)可得方程组

$$\begin{cases}b_{k+f(j)}x_{j+1}+a_ix_{i+1}=u_{i+1},\\ b_{k+f(j)}y_{j+1}+a_iy_{i+1}=v_{i+1}。\end{cases}\tag{4}$$

当条件(1)和(2)同时成立时，式(4)存在唯一解

$$\begin{cases}b_{k+f(j)}=e_i\left(c_{k+f(j)}\right)^{-1},\\ a_i=\left(u_{i+1}-b_{k+f(j)}x_{j+1}\right)x_{i+1}^{-1}。\end{cases}\tag{5}$$

当$1\leqslant i\leqslant k$时，$j=i$，结合式(2)可得方程组

$$\begin{cases}b_jx_1+a_ix_{i+1}+b_{k+f(j)}x_{k+f(j)+1}=u_{i+1},\\ b_jy_1+a_iy_{i+1}+b_{k+f(j)}y_{k+f(j)+1}=v_{i+1}。\end{cases}\tag{6}$$

此方程组可写为

$$\begin{cases}b_jx_1+a_ix_{i+1}=u_{i+1}-b_{k+f(j)}x_{k+f(j)+1},\\ b_jy_1+a_iy_{i+1}=v_{i+1}-b_{k+f(j)}y_{k+f(j)+1}。\end{cases}\tag{7}$$

当条件(1)和(3)同时成立时，式(7)存在唯一解

$$\begin{cases}b_j=\left(e_i-b_{k+f(j)}c_j\right)d_i^{-1},\\ a_i=\left(u_{i+1}-b_{k+f(j)}x_{k+f(j)+1}-b_jx_1\right)x_{i+1}^{-1}。\end{cases}\tag{8}$$

当$i=0$时，结合式(2)可得方程组

$$\begin{cases}a_0x_1+\sum_{j=1}^{k}b_jx_{j+1}=u_1,\\ a_0y_1+\sum_{j=1}^{k}b_jy_{j+1}=v_1。\end{cases}\tag{9}$$

当$x_1\neq 0, y_1\neq 0$时，直接计算可得

$$a_0=\begin{cases}\left(u_1-\sum_{j=1}^{k}b_jx_{j+1}\right)x_1^{-1},\\ \left(v_1-\sum_{j=1}^{k}b_jy_{j+1}\right)y_1^{-1}。\end{cases}\tag{10}$$

式(9)的解唯一，当且仅当条件(4)成立。

由此可知，定理1结论成立。

问题1的唯一解的元素a_i由式(5)、式(8)和式(10)给出，$b_{k+f(j)}$和b_j分别由式(5)和式(8)给出。

定理2 给定两个不同的实数λ_1,λ_2及两组非零向量

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{Y}=\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)^{\mathrm{T}},$$

则问题2有唯一解等价于以下条件成立：

1) $x_{i+1}\neq 0, y_{i+1}\neq 0, i=0,\cdots,2k$;

2) $c_{k+f(j)}\neq 0, i=k+f\left(j\right), j=1,\cdots,k$;

3) $d_i\neq 0, i=1,\cdots,k$;

4) $\lambda=\sum_{j=1}^{k}\left[\lambda-\lambda c_{k+f(j)}^{-1}c_j\right]d_j^{-1}x_{j+1}x_1^{-1}-\sum_{j=1}^{k}\left[\lambda-\lambda c_{k+f(j)}^{-1}c_j\right]d_j^{-1}y_{j+1}y_1^{-1}$,

其中，$\lambda=\lambda_1-\lambda_2$。

证明 设$\boldsymbol{A}_f\in S(G_2S_k)$具有形式(1)。

当$k+1\leqslant i\leqslant 2k$时，$k+f\left(j\right)=i$，结合式(3)可得方程组

$$\begin{cases}b_{k+f(j)}x_{j+1}+a_ix_{i+1}=\lambda_1x_{i+1},\\ b_{k+f(j)}y_{j+1}+a_iy_{i+1}=\lambda_2y_{i+1}。\end{cases}\tag{11}$$

当条件(1)和(2)同时成立时，式(11)存在唯一解

$$\begin{cases}b_{k+f(j)}=\lambda c_{k+f(j)}^{-1},\\ a_i=\lambda_1-b_{k+f(j)}x_{j+1}x_{i+1}^{-1}。\end{cases}\tag{12}$$

其中，$\lambda=\lambda_1-\lambda_2$。

当$1\leqslant i\leqslant k$时，$j=i$，结合式(3)可得方程组

$$\begin{cases}b_jx_1+a_ix_{i+1}+b_{k+f(j)}x_{k+f(j)+1}=\lambda_1x_{i+1},\\ b_jy_1+a_iy_{i+1}+b_{k+f(j)}y_{k+f(j)+1}=\lambda_2y_{i+1}。\end{cases}\tag{13}$$

此方程组可写为

$$\begin{cases}b_jx_1+a_ix_{i+1}=\lambda_1x_{i+1}-b_{k+f(j)}x_{k+f(j)+1},\\ b_jy_1+a_iy_{i+1}=\lambda_2y_{i+1}-b_{k+f(j)}y_{k+f(j)+1}。\end{cases}\tag{14}$$

当条件(1)和(3)同时成立时，式(14)存在唯一解

$$\begin{cases}b_j=\left(\lambda-b_{k+f(j)}c_j\right)d_i^{-1},\\ a_i=\lambda_1-b_{k+f(j)}x_{k+f(j)+1}x_{i+1}^{-1}-b_jx_1x_{i+1}^{-1}。\end{cases}\tag{15}$$

当$i=0$时，结合式(3)可得方程组

$$\begin{cases}a_0x_1+\sum_{j=1}^{k}b_jx_{j+1}=\lambda_1x_1,\\ a_0y_1+\sum_{j=1}^{k}b_jy_{j+1}=\lambda_2y_1。\end{cases}\tag{16}$$

当$x_1\neq 0, y_1\neq 0$时，直接计算可得

$$a_0=\begin{cases}\lambda_1-\sum_{j=1}^{k}b_jx_{j+1}x_1^{-1},\\ \lambda_2-\sum_{j=1}^{k}b_jy_{j+1}y_1^{-1}。\end{cases}\tag{17}$$

式(16)的解唯一，当且仅当条件(4)成立。

由此可知，定理2结论成立。

问题2的唯一解的元素a_i由式(12)、式(15)和式(17)给出，$b_{k+f(j)}$和b_j分别由式(12)和式(17)给出。

3 算法及实例

3.1 数值算法

问题1的算法(算法1)

1) 输入$k,f,\boldsymbol{X},\boldsymbol{U},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{V}$;

2) 若$\boldsymbol{X},\boldsymbol{U},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{V}$满足定理1中的条件(1)～(4)则继续，否则算法结束；

3) 当$i=k+1,\cdots,2k$时，由式(5)分别计算$b_{k+f(j)}$和a_i;

4) 当$i=1,\cdots,k$时，由式(8)分别计算b_j和a_i;

5) 当$i=0$时，由式(10)计算a_0;

6) 输出矩阵$\boldsymbol{A}_f$, a_i, b_j, $b_{k+f(j)}$。

问题2的算法(算法2)

1) 输入$k,f,\lambda_1,\lambda_2,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$;

2) 若$\lambda_1,\lambda_2,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$满足定理2中的条件(1)～(4)则继续，否则算法结束；

3) 当$i=k+1,\cdots,2k$时，由式(12)分别计算$b_{k+f(j)}$和a_i;

4) 当$i=1,\cdots,k$时，由式(15)分别计算b_j和a_i;

5) 当$i=0$时，由式(17)计算a_0;

6) 输出矩阵$\boldsymbol{A}_f$, a_i, b_j, $b_{k+f(j)}$。

3.2 数值实例

例1 给定

$$\boldsymbol{X}=(1,-2,-1,4,2,2,-1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{U}=(9,-5,1,10,14,10,13)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{Y}=(3,-1,-2,-2,2,4,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$V=(11,-4,-2,2,1,3,-6)^{\mathrm{T}},$$

求 G_2S_3 在置换 $f=(23)$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}_f$。

解 根据算法1并通过MATLAB 2016a编程计算形成矩阵

$$\boldsymbol{A}_f=\begin{bmatrix} -3.0857 & 4.6000 & -23.0000 & -0.4286 & 0 & 0 & 0 \\ 4.6000 & -8.2000 & 0 & 0 & -13.0000 & 0 & 0 \\ -23.0000 & 0 & -43.0000 & 0 & 0 & 0 & 19.0000 \\ -0.4286 & 0 & 0 & 1.7571 & 0 & 1.7000 & 0 \\ 0 & -13.0000 & 0 & 0 & -6.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.7000 & 0 & 1.6000 & 0 \\ 0 & 0 & 19.0000 & 0 & 0 & 0 & -32.0000 \end{bmatrix}。$$

例 2 给定 $\boldsymbol{X}=(2,4,-1,3,3,4,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}=(-1,3,3,-2,3,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，求 G_2S_3 在置换 $f=(23)$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}_f$。

解 根据算法2并通过MATLAB 2016a编程计算形成矩阵

$$\boldsymbol{A}_f=\begin{bmatrix} 52.4000 & -4.2000 & 2.0000 & -28.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -4.2000 & 7.6000 & 0 & 0 & -6.0000 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3.4000 & 0 & 0 & 0 & 0.8000 \\ -28.0000 & 0 & 0 & 9.0000 & 0 & 8.0000 & 0 \\ 0 & -6.0000 & 0 & 0 & 9.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.0000 & 0 & -5.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8000 & 0 & 0 & 0 & 0.6000 \end{bmatrix}。$$

根据以上矩阵 $\boldsymbol{A}_f$，重新计算得到该矩阵的特征值为 -12.2250，0.3507，$\underline{1.0000}$，$\underline{3.0000}$，3.9588，14.3225，66.5929；其中，1.0000 与 3.0000 分别为给定的 λ_1 与 λ_2，其对应的特征向量分别为 $\tilde{\boldsymbol{X}}=(0.2604,0.5208,-0.1302,0.3906,0.3906,0.5208,-0.2604)^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{Y}}=(-0.1644,0.4932,0.4932,-0.3288,0.4932,-0.3288,0.1644)$。

将给定的特征向量 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$ 与计算得到的特征向量 $\tilde{\boldsymbol{X}}$，$\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 进行对比，结果如表1和表2所示。

表1　例2给定的特征向量 $\boldsymbol{X}$ 与计算所得的特征向量 $\tilde{\boldsymbol{X}}$

Tab. 1　The given eigenvector $\boldsymbol{X}$ and the calculated eigenvector $\tilde{\boldsymbol{X}}$ of example 2

$\boldsymbol{X}$	$\tilde{\boldsymbol{X}}$	$\tilde{\boldsymbol{X}}/\boldsymbol{X}$
2	0.2604	0.1302
4	0.5208	0.1302
−1	−0.1302	0.1302
3	0.3906	0.1302
3	0.3906	0.1302
4	0.5208	0.1302
−2	−0.2604	0.1302

表2　例2给定的特征向量 $\boldsymbol{Y}$ 与计算所得的特征向量 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$

Tab. 2　The given eigenvector $\boldsymbol{Y}$ and the calculated eigenvector $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ of example 2

$\boldsymbol{Y}$	$\tilde{\boldsymbol{Y}}$	$\tilde{\boldsymbol{Y}}/\boldsymbol{Y}$
−1	−0.1644	0.1644
3	0.4932	0.1644
3	0.4932	0.1644
−2	−0.3288	0.1644
3	0.4932	0.1644
−2	−0.3288	0.1644
1	0.1644	0.1644

所得的数据表明该问题的算法是有效的。

例 3 给定 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，

$$\boldsymbol{X}=(-2,5,2,6,3,1,1,-2,4)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{Y}=(5,3,2,-2,1,3,5,2,-1)^{\mathrm{T}},$$

求 G_2S_4 在置换 $f=(1432)$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}_f$。

解 根据算法2并通过MATLAB 2016a编程计算形成矩阵

$$\boldsymbol{A}_f=\begin{bmatrix} 1.5088 & -0.3548 & -0.5000 & 0.2692 & 0.0588 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3548 & 1.6698 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2353 \\ -0.5000 & 0 & 1.1250 & 0 & 0 & 0.7500 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2692 & 0 & 0 & 2.0637 & 0 & 0 & 0.1563 & 0 & 0 \\ 0.0588 & 0 & 0 & 0 & 1.7059 & 0 & 0 & -0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7500 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1563 & 0 & 0 & 1.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5000 & 0 & 0 & 1.2500 & 0 \\ 0 & 0.2353 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7059 \end{bmatrix}。$$

根据以上矩阵A_f，重新计算得到该矩阵的特征值为$-0.056\,9$，$0.922\,1$，$\underline{1.000\,0}$，$1.058\,1$，$1.496\,1$，$1.817\,5$，$\underline{2.000\,0}$，$2.031\,2$，$0.323\,5$；其中，$1.000\,0$与$2.000\,0$分别为给定的λ_2与λ_1，其对应的特征向量分别为

$$\tilde{Y}=(0.552\,2, 0.331\,3, 0.220\,9, -0.220\,9, 0.110\,4, 0.331\,3, 0.552\,2, 0.220\,9, -0.110\,4)^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{X}=(-0.200\,0, 0.500\,0, 0.200\,0, 0.600\,0, 0.300\,0, 0.100\,0, 0.100\,0, -0.200\,0, 0.400\,0)^{\mathrm{T}}。$$

再将给定的特征向量X，Y与计算得到的特征向量$\tilde{X}$，$\tilde{Y}$进行对比，结果如表3和表4所示。所得的数据表明该问题的算法是有效的。

表3 例3给定的特征向量X与计算所得的特征向量$\tilde{X}$

Tab. 3 The given eigenvector X and the calculated eigenvector $\tilde{X}$ of example 3

X	$\tilde{X}$	$\tilde{X}/X$
−2	−0.200 0	0.100 0
5	0.500 0	0.100 0
2	0.200 0	0.100 0
6	0.600 0	0.100 0
3	0.300 0	0.100 0
1	0.100 0	0.100 0
1	0.100 0	0.100 0
−2	−0.200 0	0.100 0
4	0.400 0	0.100 0

表4 例3给定的特征向量Y与计算所得的特征向量$\tilde{Y}$

Tab. 4 The given eigenvector Y and the calculated eigenvector $\tilde{Y}$ of example 3

Y	$\tilde{Y}$	$\tilde{Y}/Y$
5	0.552 2	0.110 4
3	0.331 3	0.110 4
2	0.220 9	0.110 4
−2	−0.220 9	0.110 4
1	0.110 4	0.110 4
3	0.331 3	0.110 4
5	0.552 2	0.110 4
2	0.220 9	0.110 4
−1	−0.110 4	0.110 4

4 结论

本文根据给定的两类不同的特征数据依次研究了度为2的广义星图(一种特殊类型的树)矩阵的逆特征值问题。首先，引入了一种标记这种树的顶点的方案。其次，将此类矩阵的逆特征值问题转化为基于给定特征数据的线性方程组求解问题。最后，得到了所研究问题有唯一解的充分必要条件，以及矩阵唯一解的表达式，并通过相应的算法和数值模拟实例验证了结果的准确性。

参考文献：

[1] CHU M T. Inverse eigenvalue problems[J]. SIAM Review, 1998, 40(1): 1-39.

[2] HUANG H, WANG Q, LI Z, et al. The Uniqueness of solution to the inverse eigenvalue problem for an arrow-shaped generalised jacobi matrix[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2021, 2068(1):012014.

[3] GLADWELL G M L. Inverse problems in Vibration [M]. Berlin: Springer Netherlands, 2005.

[4] LI N. A matrix inverse eigenvalue problem and its application[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1997, 266(1/3): 143-152.

[5] NYLEN P, UHLIG F. Inverse eigenvalue problems associated with spring-mass systems[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1997, 254(1): 409-425.

[6] MONFARED K H, SHADER B L. Construction of matrices with a given graph and prescribed interlaced spectral data[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 438(11): 4348-4358.

[7] ZARCH M B, FAZELI S A S. Inverse eigenvalue problem for a kind of acyclic matrices[J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A: Science, 2019, 43(5): 2531-2539.

[8] DAHLGREN F S. GERSHKOFF Z. HOGBEN L, et al. Inverse eigenvalue and related problems for hollow matrices described by graphs[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2022, 38: 661-679.

[9] ZARCH M B, FAZELI S A S, KARBASSI S M. Inverse eigenvalue problem for constructing a kind of acyclic matrices with two eigenpairs[J]. Applications of Mathematics, 2020, 65(1): 89-103.

[10] FIEDLER M. Some inverse problems for acyclic matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1997, 253(1): 113-123.

[11] NAIR R, SHADER B L. Acyclic matrices with a small number of distinct eigenvalues[J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 438(10): 4075-4089.

[12] SEN M, SHARMA D. Generalized inverse eigenvalue problem for matrices whose graph is a path[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2014, 446(2): 224-236.

[13] SHARMA D, SEN M. Inverse eigenvalue problems for two special acyclic matrices [J]. Mathematics, 2016, 4 (1): 12.

[14] PICKMANN H, EGANA J, SOTO R L. Extremal inverse eigenvalue problem for bordered diagonal matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2007, 427 (2): 256 - 271.

[15] 易福侠. 广义箭状矩阵特征值及向量对反问 题[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(11): 247-256.
YI Fuxia. Inverse eigenvalue and vector pair problem for generalized arrow matrix[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2021, 51(11): 247-256. (in Chinese)

[16] SEN M, SHARMA D. The minimax inverse eigenvalue problem for matrices whose graph is a generalized star of depth 2[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2021, 621: 334-344.

（上接第 162 页）

[12] 崔萌, 雷英杰. 两类对称箭状矩阵的广义逆特征值问题[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2022, 43 (6): 488-492.
CUI Meng, LEI Yingjie, Generalized inverse eigenvalue problems for two kinds of symmetric arrow matrix[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2022, 43 (6): 488-492. (in Chinese)

[13] 郭雪娟, 吉雁斐. 基于谱数据构造的子周期Jacobi矩阵[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2021, 42(3): 207-212.
GUO Xuejuan, JI Yanfei. Reconstruction of subperiodic jacobi matrix based on spectra data[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2021, 42(3): 207-212. (in Chinese)

[14] GHANBARI K, MOGHADDAM M R. Construction of symmetric pentadiagonal matrix from three interlacing spectrum [J]. Journal of Algebra and Related Topics, 2022, 10(2): 89-98.

[15] BABAEI Z M. On the inverse eigenvalue problem for a specific symmetric matrix[J]. Journal of Mathematical Modeling, 2023, 11(3): 479-489.