文章编号：1673-3193(2024)02-0158-05

两类非对称双箭型矩阵的广义逆谱问题

苏 然，雷英杰，李繁华
(中北大学 数学学院，山西 太原 030051)

摘 要：针对两类非对称双箭型矩阵的广义逆谱问题，本文先将两类矩阵的两组特征对作为其特征数据，然后利用矩阵元素间具有的函数关系、线性关系及箭型矩阵的相关性质，将两类矩阵的逆谱问题转换为求解线性方程组的问题，进而实现了两类矩阵的重构。本文给出了该问题有唯一解的充分必要条件以及问题构造的算法，并通过相应数值实例验证了所得结果。

关键词：特征对；逆谱问题；箭型矩阵；线性关系；函数关系
中图分类号：O157 **文献标识码**：A **doi**：10.3969/j.issn.1673-3193.2024.02.004
引用格式：苏然，雷英杰，李繁华．两类非对称双箭型矩阵的广义逆谱问题[J]．中北大学学报(自然科学版)，2024，45(2)：158-162.
SU Ran，LEI Yingjie，LI Fanhua. Generalized inverse spectrum problems for two kinds of nonsymmetric doubly arrow matrix[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition)，2024，45(2)：158-162.

Generalized Inverse Spectrum Problems for Two Kinds of Nonsymmetric Doubly Arrow Matrix

SU Ran，LEI Yingjie，LI Fanhua
(School of Mathematics，North University of China，Taiyuan 030051，China)

Abstract：The generalized inverse spectral problem of two types of nonsymmetric double-arrow matrices was studied in this paper. Firstly，two sets of eigenpairs of two types of matrices were used as their eigendata. Secondly，the inverse spectral problem of two types of matrices was converted into a problem of solving a system of linear equations by using the functional relationship between matrix elements，linear relationship and the related properties of arrow matrices，and then the reconstruction of two types of matrices was realized. Finally，the sufficient and necessary conditions for the problem to have a unique solution and the algorithm for the problem construction were given，and the results were verified by the corresponding numerical examples.

Key words：characteristic pair；inverse spectrum problem；arrow matrices；linear relationship；function relationship

0 引 言

逆谱问题是一类重要的数学问题，在加密算法、信息检索和人脸识别等领域有着广泛的应用。

当$m=0$或$m=n$时，形如式(1)和式(2)的矩阵A，B称为非对称箭型矩阵[1]，该类型的矩阵经常出现在科学和工程的各种应用问题中，如无线通信系

收稿日期：2023-04-06
基金项目：山西省基础研究计划资助项目(202203021211088)
作者简介：苏 然(1993－)，女，硕士生，主要从事组合矩阵理论的研究。
通信作者：雷英杰(1970－)，男，副教授，硕士生导师，主要从事组合矩阵理论、图论及其在相关学科应用的研究。E-mail：leiyingjie@nuc.edu.cn。

统；当$m=2$，$n=4$时，矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为广义Jacobi矩阵[2-4]；当$m=2$，$n=5$时，矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为箭状矩阵[5-6]；当$m=3$，$n=5$时，矩阵$\boldsymbol{A}$为向下箭型矩阵加三对角矩阵[6]，矩阵$\boldsymbol{B}$则变成了向上箭型矩阵加三对角矩阵；此外，通过给定特征数据构造矩阵的类似问题也有相关研究[7-15]。

本文分别讨论了具有线性关系、函数关系的两类特殊非对称矩阵的广义逆谱问题，即采用特征对来重构矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$。其中，$a_i(i=1,\cdots,n)$，$b_i,c_i,d_i(i=1,\cdots,n-1)$，$3\leqslant m\leqslant n-3$，$c_i=kb_i$，$k$为实常数，$b_i=g_i(d_i)$，$i=1,\cdots,m-2$，$d_i=f_i(b_i)$，$i=m-1,\cdots,n-1$，$g_i(x)$，$f_i(x)$，$x\in\mathbf{R}$皆为实函数。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & & \cdots & b_1 & & & & \\ & a_2 & & \vdots & & & & \\ & & \ddots & b_{m-1} & & & & \\ c_1 & \cdots & c_{m-1} & a_m & b_m & & & \\ & & & c_m & a_{m+1} & & & b_{m+1} \\ & & & & & a_{r+1} & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & c_{m+1} & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & & & & \\ d_1 & a_2 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ d_{m-1} & & & a_m & b_m & & & \\ & & & d_m & a_{m+1} & & & b_{m+1} \\ & & & & & a_{m+2} & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & d_{m+1} & \cdots & d_{n-1} & a_n \end{bmatrix}。\tag{2}$$

用$\boldsymbol{A}_{\backslash k}$表示$\boldsymbol{A}$去掉第$k$行，第$k$列所余的$n-1$阶子矩阵，用$\boldsymbol{B}_{\backslash k}$表示$\boldsymbol{B}$去掉第$k$行，第$k$列所余的$n-1$阶子矩阵，其中$k=m+1$，则$\boldsymbol{A}_{\backslash k}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_{\backslash k}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{\backslash k}$，$\boldsymbol{B}_{\backslash k}$是图为毛毛虫的无环矩阵[11]，记

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} a_1 & & & b_1 \\ & a_2 & & b_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & a_{k-1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} a_{k+1} & & & b_{k+1} \\ & a_{k+2} & & b_{k+2} \\ & & \ddots & \vdots \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & b_{k-2} \\ d_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ d_{k-2} & & & a_{k-1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix} a_{k+1} & & & b_{k+1} \\ & a_{k+2} & & b_{k+2} \\ & & \ddots & \vdots \\ d_{k+1} & d_{k+2} & \cdots & a_n \end{bmatrix}。$$

1　主要问题

问题 1　给定两个不同的实数λ，μ及$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$两个非零实向量，构造形如式（1）的实矩阵$\boldsymbol{A}$，使得$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{AY}=\mu\boldsymbol{Y}$。

问题 2　基于问题1的同等条件下，构造形如式（2）的实矩阵$\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{BX}=\lambda\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{BY}=\mu\boldsymbol{Y}$。

作如下约定：

$$\varphi_i=\begin{vmatrix} x_j & x_{j+1}\\ y_j & y_{j+1}\end{vmatrix},\ \varphi_j(\lambda,\mu)=\begin{vmatrix} \lambda x_j & x_{j+1}\\ \mu y_j & y_{j+1}\end{vmatrix};$$

$$\theta_{i,j}=\begin{vmatrix} x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{vmatrix},\ \theta_{i,j}(\lambda,\mu)=\begin{vmatrix} \lambda x_i & x_j\\ \mu y_i & y_j\end{vmatrix}。$$

2　问题有唯一解的充要条件

定理 1　问题1有唯一解的充要条件：

1）$\theta_{i,m}\neq 0(i=1,\cdots,m-1)$，

2）$\varphi_m\neq 0$，

3）$\theta_{m+1,n}\neq 0$，

4）$\theta_{i,n}\neq 0(i=m+2,\cdots,n-1)$，

5）$x_ny_n=0,x_n^2+y_n^2\neq 0$。

证明　充分性　因为$(\lambda,\ \boldsymbol{X})$，$(\mu,\ \boldsymbol{Y})$是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个特征对，所以$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{AY}=\mu\boldsymbol{Y}$。

当$1\leqslant i\leqslant m-1$时，由$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{AY}=\mu\boldsymbol{Y}$可得线性方程组

$$\begin{cases} a_ix_i+b_ix_m=\lambda x_i,\\ a_iy_i+b_iy_m=\mu y_i, c_i=kb_i(i=1,\cdots,m-1)。\end{cases} \tag{3}$$

由定理1中条件1）可得式（3）有唯一解

$$a_i=\frac{\lambda x_iy_m-\mu y_ix_m}{x_iy_m-y_ix_m}=\frac{\theta_{i,m}(\lambda,\mu)}{\theta_{i,m}},$$

$$b_i=\frac{(\mu-\lambda)x_iy_i}{x_iy_m-y_ix_m}=\frac{(\mu-\lambda)x_iy_i}{\theta_{i,m}},$$

$$c_i=kb_i(i=1,\cdots,m-1)。\tag{4}$$

当$i=m$时,由$AX=\lambda X$, $AY=\mu Y$可得线性方程组

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m-1} c_i x_i + a_m x_m + b_m x_{m+1} = \lambda x_m, \\ \sum_{i=1}^{m-1} c_i y_i + a_m y_m + b_m y_{m+1} = \mu y_m, c_m = k b_m。\end{cases} \tag{5}$$

由定理1中条件2)可得式(5)有唯一解

$$a_m = \frac{\varphi_m(\lambda,\mu) - \sum_{i=1}^{m-1} c_i \theta_{i,m+1}}{\varphi_m},$$

$$b_m = \frac{(\mu-\lambda) x_m y_m - \sum_{i=1}^{m-1} c_i \theta_{i,m}}{\varphi_m},$$

$$c_m = k b_m。 \tag{6}$$

当$i=m+1$时,由$AX=\lambda X$, $AY=\mu Y$可得线性方程组

$$\begin{cases} c_m x_m + a_{m+1} x_{m+1} + b_{m+1} x_n = \lambda x_{m+1}, \\ c_m y_m + a_{m+1} y_{m+1} + b_{m+1} y_n = \mu y_{m+1}。\end{cases} \tag{7}$$

由定理1中的条件3)可得,式(7)有唯一解

$$a_{m+1} = \frac{\theta_{m+1,n}(\lambda,\mu) - c_m \theta_{m,n}}{\theta_{m+1,n}},$$

$$b_{m+1} = \frac{(\mu-\lambda) x_{m+1} y_{m+1} - c_m \theta_{m+1,m}}{\theta_{m+1,n}},$$

$$c_{m+1} = k b_{m+1}。 \tag{8}$$

当$m+2 \leqslant i \leqslant n-1$时,由$AX=\lambda X, AY=\mu Y$可得线性方程组

$$\begin{cases} a_i x_i + b_i x_n = \lambda x_i, \\ a_i y_i + b_i y_n = \mu y_i。\end{cases} \tag{9}$$

由定理1中的条件4) 可得式(9)有唯一解

$$a_i = \frac{\theta_{i,n}(\lambda,\mu)}{\theta_{i,n}},\ b_i = \frac{(\mu-\lambda) x_i y_i}{\theta_{i,n}},$$

$$c_i = k b_i (i = m+2, \cdots, n-1)。 \tag{10}$$

当$i=n$时,由$AX=\lambda X$, $AY=\mu Y$可得线性方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=m+1}^{n-1} c_i x_i + a_n x_n = \lambda x_n, \\ \sum_{i=m+1}^{n-1} c_i y_i + a_n y_n = \mu y_n。\end{cases} \tag{11}$$

因为$x_n y_n = 0, x_n^2 + y_n^2 = 0$,由方程组(11)解得

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda x_n - \sum_{i=m+1}^{n-1} c_i x_i}{x_n}, \\ \dfrac{\mu y_n - \sum_{i=m+1}^{n-1} c_i y_i}{y_n}。\end{cases} \tag{12}$$

必要性 若问题1有唯一解,则方程组(3)有唯一解,则推出定理1中的条件1)成立。类似地,方程组(5),(7),(9)和(11)有唯一解,则可以推出定理1中的条件2)~5)成立。

定理2 问题2有唯一解的充要条件:

1) $\theta_{1,i+1} \neq 0, i = 1, \cdots, m-2$,

2) $\theta_{1,m} \neq 0$,

3) $\varphi_m \neq 0$,

4) $\theta_{m+1,n} \neq 0$,

5) $\theta_{i,n} \neq 0, i = m+2, \cdots, n-1$,

6) $x_n y_n = 0, x_n^2 + y_n^2 \neq 0$。

证明 充分性 因为(λ, X), (μ, Y)是矩阵B的两组不同特征对,I是单位矩阵,所以有方程组(14)成立。

$$\begin{cases} (\lambda I - B) X = 0, \\ (\mu I - B) Y = 0。\end{cases} \tag{14}$$

将方程组(14)转化为以下线性方程组

$$\begin{cases} d_i x_1 + a_{i+1} x_{i+1} = \lambda x_{i+1}, \\ d_i y_1 + a_{i+1} y_{i+1} = \mu y_{i+1}, i = 1, \cdots, m-2。\end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} a_1 x_1 + \sum_{i=1}^{m-2} b_i x_{i+1} + b_{m-1} x_m = \lambda x_1, \\ a_1 y_1 + \sum_{i=1}^{m-2} b_i y_{i+1} + b_{m-1} y_m = \mu y_1。\end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} d_{m-1} x_1 + a_m x_m + b_m x_{m+1} = \lambda x_m, \\ d_{m-1} y_1 + a_m y_m + b_m y_{m+1} = \mu y_m。\end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} d_m x_m + a_{m+1} x_{m+1} + b_{m+1} x_n = \lambda x_{m+1}, \\ d_m y_m + a_{m+1} y_{m+1} + b_{m+1} y_n = \mu y_{m+1}。\end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} a_i x_i + b_i x_n = \lambda x_i, \\ a_i y_i + b_i y_n = \mu y_i, i = m+2, \cdots, n-1。\end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=m+1}^{n-1} d_i x_i + a_n x_n = \lambda x_n, \\ \sum_{i=m+1}^{n-1} d_i y_i + a_n y_n = \mu y_n。\end{cases} \tag{20}$$

重构矩阵B,需要求解上述线性方程组。当$1 \leqslant i \leqslant m-2$时,因定理2中条件1)存在,方程组(15)有唯一解

$$a_{i+1} = \frac{\mu x_1 y_{i+1} - \lambda y_1 x_{i+1}}{x_1 y_{i+1} - y_1 x_{i+1}} = \frac{-\theta_{i+1,1}(\lambda,\mu)}{\theta_{1,i+1}},$$

$$d_i = \frac{(\mu-\lambda) x_{i+1} y_{i+1}}{x_1 y_{i+1} - y_1 x_{i+1}} = \frac{(\mu-\lambda) x_{i+1} y_{i+1}}{\theta_{1,i+1}},$$

$$b_i = g_i(d_i), i = 1, \cdots, m-2。 \tag{21}$$

因定理2中条件2)存在,方程组(16)有唯一解

$$a_1=\frac{\theta_{1,m}(\lambda,\mu)-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\theta_{i+1,m}}{\theta_{1,m}},$$

$$b_{m-1}=\frac{(\mu-\lambda)x_1y_1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\theta_{1,i+1}}{\theta_{1,m}},$$

$$d_{m-1}=f_{m-1}(b_{m-1})。\tag{22}$$

因定理2中条件3)存在，方程组(17)有唯一解

$$a_m=\frac{\varphi_m(\lambda,\mu)-d_{m-1}\theta_{1,m+1}}{\varphi_m},$$

$$b_m=\frac{(\mu-\lambda)x_my_m-d_{m-1}\theta_{m,1}}{\varphi_m},$$

$$d_m=f_m(b_m)。\tag{23}$$

因定理2中条件4)存在，方程组(18)有唯一解

$$a_{m+1}=\frac{\varphi_{m+1,n}(\lambda,\mu)-d_m\theta_{m,n}}{\theta_{m+1,n}},$$

$$b_{m+1}=\frac{(\mu-\lambda)x_{m+1}y_{m+1}-d_m\theta_{m+1,m}}{\varphi_m},$$

$$d_{m+1}=f_{m+1}(b_{m+1})。\tag{24}$$

因定理2中条件5)存在，方程组(19)有唯一解

$$a_i=\frac{\theta_{i,n}(\lambda,\mu)}{\theta_{i,n}},\ b_i=\frac{(\mu-\lambda)x_iy_i}{\theta_{i,n}},$$

$$d_i=f_i(b_i),i=m+2,\cdots,n-1。\tag{25}$$

因定理2中条件6)存在，方程组(20)有唯一解

$$a_n=\frac{\lambda x_n-\sum_{i=m+1}^{n-1}c_ix_i}{x_n}=\frac{\mu y_n-\sum_{i=m+1}^{n-1}c_iy_i}{y_n}。\tag{26}$$

必要性 若问题2有唯一解，则线性方程组(15)～(20)有唯一解，推出条件1)～6)成立。必要性得证。

3 算法及实例

3.1 数值算法

问题1的算法(算法1)

1. 输入$\lambda,\mu,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},k$；

2. 若$\lambda,\mu,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},k$满足定理1中条件1)～5)则继续，否则算法结束；

3. 当$j=1,\cdots,m-1$时，由式(4)分别计算a_j,b_j,c_j；

4. 当$j=m$时，由式(6)分别计算a_m, b_m, c_m；

5. 当$j=m+1$时，由式(8)分别计算a_{m+1}, b_{m+1}, c_{m+1}；

6. 当$j=m+2,\cdots,n-1$时，由式(10)分别计算a_j, b_j, c_j；

7. 当$j=n$时，由式(12)计算a_n；

8. 输出：矩阵$\boldsymbol{A}$。

问题2的数值算法(算法2)

1. 输入λ, μ, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $g(x)$, $f(x)$, $x\in\mathbf{R}$；

2. 若λ, μ, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $g(x)$, $f(x)$, $x\in\mathbf{R}$，满足定理2中条件1)～(6)则继续，否则算法结束；

3. 当$j=1,\cdots,m-2$时，由式(21)分别计算a_{j+1}, b_j, d_j；

4. 由式(22)分别计算a_1,b_{m-1},d_{m-1}；

5. 当$j=m$时，由式(23)分别计算a_m, b_m,d_m；

6. 当$j=m+1$时，由式(24)分别计算a_{m+1}, b_{m+1}, d_{m+1}；

7. 当$j=m+2,\cdots,n-1$时，由式(25)分别计算a_j,b_j,d_j；

8. 当$j=n$时，由式(26)计算a_n；

9. 输出：矩阵$\boldsymbol{B}$。

3.2 数值实例

例1 给定$\lambda=3$, $\mu=1$, $\boldsymbol{X}=(1,2,1,4,3,6)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}=(-2,1,3,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $k=2$，求形如式(1)的矩阵$\boldsymbol{A}_6$。

解 根据问题1的算法，利用MATLAB R2021b解得形如式(1)的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_6=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8000 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3.4000 & -0.8000 & 0 & 0 & 0\\ 1.6000 & -1.6000 & 2.4182 & 0.5455 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1.0909 & -2.2727 & 0 & 3.3333\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000\\ 0 & 0 & 0 & 6.6667 & 2.0000 & -2.4444\end{bmatrix},$$

通过计算验证了矩阵$\boldsymbol{A}_6$满足$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{AY}=\mu\boldsymbol{Y}$, $c_i=kb_i(i=1,\cdots,n-1)$。

通过MATLAB R2021b计算出矩阵$\boldsymbol{A}_6$的特征值$\Lambda(\boldsymbol{A}_6)$及对应的特征向量$\boldsymbol{V}$为

$$\Lambda(\boldsymbol{A}_6)=(-7.2291,0.4404,\underline{1.0000},4.4271,2.6626,\underline{3.0000}),$$

$$V=\begin{bmatrix} 0.0028 & -0.1234 & 0.3914 & -0.2540 & -0.4392 & 0.1222 \\ -0.0024 & 0.0734 & -0.1957 & 0.5509 & -0.2756 & 0.2443 \\ -0.0325 & 0.2714 & -0.5871 & -0.7072 & -0.2540 & 0.1222 \\ 0.5599 & -0.4070 & -0.1957 & -0.2437 & 0.3662 & 0.4887 \\ 0.0999 & 0.7507 & 0.1957 & -0.0754 & 0.3761 & 0.3665 \\ -0.8219 & -0.4201 & 0.0000 & -0.2584 & 0.6254 & 0.7330 \end{bmatrix}。$$

例 2 给定 $\lambda=3$, $\mu=1$, $\boldsymbol{X}=(1,2,1,4,3,6)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}=(2,1,3,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$, $g(x)=2x$, $f(x)=x^3$, 求形如式(2)的矩阵$\boldsymbol{B}_6$。

解 根据问题2的算法,利用MATLAB R2021b解得形如(2)式的矩阵为

$$\boldsymbol{B}_6=\begin{bmatrix} 2.0323 & 2.0000 & 0.8387 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5900 & 0 & 1.0177 & -0.2419 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0142 & 0.9575 & 0 & 1.3640 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5377 & 1.0000 & 0.8082 \end{bmatrix}。$$

4 结 论

本文基于对称箭型矩阵的研究,讨论了两类非对称双箭型矩阵的逆谱问题。本研究是对前人有关箭型矩阵从对称到非对称双箭型矩阵的扩展。给定两组特征对去构造非对称双箭型矩阵明显存在困难,但在其基础上进行改进,加入其它的约束条件,如利用矩阵元素间具有的函数关系、线性关系作为条件,这样就能得到问题有唯一解的充要条件,并可以给出非对称构造。本文结果对研究其它矩阵的逆谱问题有一定的借鉴意义。

参考文献:

[1] PICKMANN-SOTO H, ARELA PEREZ S, EGANA J, et al. On the inverse eigenproblem for symmetric and nonsymmetric arrowhead matrices[J]. Proyecciones(Antofagasta), 2019, 38(4): 811-828.

[2] GHANBARI K. A survey on inverse and generalized inverse eigenvalue problems for Jacobi matrices[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 195(2): 355-363.

[3] HOCHSTADT H. On the construction of a Jacobi matrix from spectral data[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1974, 8(5): 435-446.

[4] HOCHSTADT H. On the construction of a Jacobi matrix from mixed given data[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1979, 28(28): 113-115.

[5] XU W R, CHEN G L. On inverse eigenvalue problems for two kinds of special banded matrices[J]. Filomat, 2017, 31(2): 371-385.

[6] 雷英杰,郑志勇. 对称箭头矩阵加三对角矩阵的广义逆特征值问题[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2020, 44(1): 14-19.
LEI Yingjie, ZHENG Zhiyong. Generalized inverse eigenvalue problem for symmetric arrow matrix plus tridiagonal matrices[J]. Journal of Anhui University (Natural Science Edition), 2020, 44(1): 14-19. (in Chinese)

[7] BABAEI ZARCH M, SHAHZADEH FAZELI S A, KARBASSI S M. Inverse eigenvalue problem for constructing a kind of acyclic matrices with two eigenpairs[J]. Applications of Mathematics, 2020, 65: 89-103.

[8] BABAEI ZARCH M, SHAHZADEH FAZLI S A. Inverse eigenvalue problem for a kind of acyclic matrices[J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 2019, 43: 2531-2539.

[9] STANIMIROVIC P S, KATSIKIS V N, KOLUNDZIJA D. Inversion and pseudoinversion of block arrowhead matrices[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 341: 379-401.

[10] 吉雁斐,雷英杰. 连箭矩阵的逆谱问题[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2022, 39(1): 49-57.
JI Yanfei, LEI Yingjie. Inverse spectrum problems of connected arrow matrix[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2022, 39(1): 49-57. (in Chinese)

[11] AREL-PEREZ S, EGANA J, Pasten G, et al. Extremal realization spectra by two acyclic matrices whose graphs are caterpillars[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2023, 71(10): 1657-1680.

(下转第169页)