

# 一些特殊图形线图和细分图的Sombor指数

符惠芬, 梅银珍

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

**摘要:** 化学图可以通过数字(拓扑指数)、代数多项式或矩阵来描述, 这些数字和多项式有助于预测化合物的许多潜在的物理化学性质, 尤其是在展示物质结构方面具有重要的应用价值。本文以Sombor指数为载体, 根据线图和细分图的概念, 通过对不同图的结构分析, 利用边的划分技巧, 以及同类归纳等方法研究了友谊图、风车图、爆竹图、香蕉树图、轮图、舵轮图、齿轮图、棒棒糖图、网图、花图和向日葵图等特殊图形的线图和细分图的Sombor指数, 并获得了这些指数的一般表达式。这些特殊图形的计算结果进一步揭示了基于度的拓扑指数与边的类型之间的关系, 可以作为其他更复杂图族研究的基础。

**关键词:** 拓扑指数; 线图; 细分图; Sombor指数

**中图分类号:** O157.5 **文献标识码:** A **doi:** 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2023.11.0033

**引用格式:** 符惠芬, 梅银珍. 一些特殊图形线图和细分图的Sombor指数[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2025, 46(5): 675-685.

FU Huifen, MEI Yinzen. The Sombor index for some special line graphs and subdivision graphs[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2025, 46(5): 675-685.

## The Sombor Index for Some Special Line Graphs and Subdivision Graphs

FU Huifen, MEI Yinzen

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** Chemical graphs can be described by numbers (topological indices), algebraic polynomials, or matrices. These numbers and polynomials help predict many potential physical and chemical properties of compounds, especially in demonstrating the structure of substances, which have important application value. By taking the Sombor index as a carrier, based on the concepts of line graphs and subdivision graphs, by analyzing the structures of different graphs, and using edge partition techniques and category induction method, we studied the Sombor indices of special graphs such as the friendship graph, dutch windmill graph, firecracker graph, banana tree graph, wheel graph, helm graph, gear graph, lollipop graph, web graph, flower graph, and sunflower graph, and obtained general expressions of these indices. The relationship between degree-based topological indices and the types of edges was further revealed. The computational results of these specific graphs can provide a foundation for studying other more complex graph families.

**Key words:** topological index; line graph; subdivision graph; Sombor index

收稿日期: 2023-11-29

基金项目: 山西省回国留学人员科研项目(2022-149)

作者简介: 符惠芬(1998-), 女, 硕士生, 主要从事图论及其应用的研究。

通信作者: 梅银珍(1977-), 女, 副教授, 博士, 主要从事图论及其应用的研究。E-mail: myzmath@nuc.edu.cn.

## 0 引言

图的拓扑指数是从化合物的分子结构图中衍生出来的一种数学不变量。拓扑指数(也称为图的不变量)由于其能有效地应用于量子化学、计算机科学、复杂网络、动植物系统发育等许多领域而被众多学者所关注<sup>[1-4]</sup>。特殊图形拓扑指数的研究一直是大家关注的热点<sup>[5-7]</sup>。Chaluvvaraju等<sup>[8]</sup>计算了几类风车图,如法国风车图、荷兰风车图、Kulli圈风车图和Kulli路风车图的增广Zagreb指数及其多项式。Hayat等<sup>[9]</sup>计算了硅酸、链状硅酸、六角形、氧化物和蜂窝网络的 $ABC_4$ 和 $GA_5$ 指数。Iqbal等<sup>[10]</sup>分别计算了细分友谊图和细分友谊图线图的原子键连通度指数、几何算术指数、Randic指数、和连通度指数和增广Zagreb指数的闭合公式。Su等<sup>[11]</sup>利用细分概念研究了蝌蚪图、轮图和阶梯图的线图的拓扑指标,推广了Ranjini等的结果。Ali等<sup>[12]</sup>计算了基于顶点的双荷兰风车图和强双荷兰风车图的拓扑指标。

2021年,Gutman<sup>[13]</sup>基于分子的化学结构,提出了一种新的拓扑指数——Sombor指数。实验表明,与以往一些常用的指数相比,这个新指数在预测苯炔类碳氢化合物理化性质方面具有较高的准确性<sup>[14]</sup>。Liu等<sup>[15]</sup>确定了给定顶点的化学树的最大和最小Sombor指数,并刻画了它们的极图。Cruz等<sup>[16]</sup>研究了单圈图和双圈图中Sombor指数的极值。Wang等<sup>[17]</sup>对Sombor指数与其他基于度的拓扑指数的相关性进行了计算研究,结果表明,Sombor指数与第一萨格勒布指数和遗忘指数具有良好的相关性。本文将研究友谊图、风车图、爆竹图、香蕉树图、轮图、舵轮图、齿轮图、棒棒糖图、网图、花图和向日葵图等特殊图形线图和细分图的Sombor指数,可以拓展基于度的拓扑指数与特殊图形之间的数值结果。

## 1 预备知识

设 $G=(V,E)$ 是一个有限简单连通图,其中顶点集为 $V=\{u_1,u_2,\dots,u_{n_c}\}$ ,边集为 $E=E(G)$ , $|V(G)|=n_c$ , $|E(G)|=m_G$ 。图 $G$ 中和顶点 $v$ 相关联的边数称为顶点 $v$ 的度,用 $d_G(v)$ 表示(简记为 $d(v)$ )。

**定义 1**<sup>[13]</sup> Sombor指数的定义为

$$SO=SO(G)=\sum_{uv\in E(G)}\sqrt{d_u^2+d_v^2}。$$

**定义 2**<sup>[18]</sup> 图 $G$ 的线图记为 $L(G)$ (Line Graph),是指以图 $G$ 的边集为顶点集, $L(G)$ 的两个顶点相邻当且仅当对应的 $G$ 的两条边在 $G$ 中相邻。也就是说,若 $w_iw_j, w_jw_k\in E(G)$ ,记 $w_iw_j$ 为 $u'$ , $w_jw_k$ 为 $v'$ ,则 $u'$ 和 $v'$ 为 $L(G)$ 的顶点, $u'v'$ 为 $L(G)$ 的边。

**定义 3**<sup>[19]</sup>  $S(G)$ 是一个图的细分图(Subdivision Graph),是在 $G$ 的每条边插入一个额外的顶点得到的图。即 $G$ 的每条边都被一条长度为2的路径所取代。

**引理**<sup>[20]</sup> 设 $G$ 是一个简单图,则线图 $L(G)$ 边的个数为

$$l=\frac{1}{2}M_1(G)-m_G,$$

其中

$$M_1(G)=\sum_{v\in V(G)}d_G^2(v),$$

即

$$l=\frac{1}{2}M_1(G)-m_G=\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}d_G^2(v)-m_G。$$

## 2 定理

本节将计算一些特殊图的线图和细分图的Sombor指数。

### 2.1 友谊图的线图和细分图的Sombor指数

友谊图 $F_n$ 是将长度为3的圈图 $C_3$ 复制 $n$ 次收缩在一个公共顶点所得,如图1所示。友谊图是更大的风车图家族的成员。

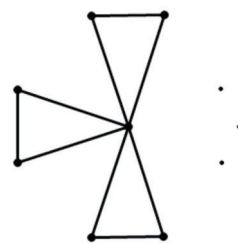


图1 友谊图 $F_n$

Fig. 1 Friendship graph  $F_n$

**定理 1** 设 $L(F_n)$ 和 $S(F_n)$ 分别是友谊图 $F_n$ 的线图和细分图,则 $L(F_n)$ 和 $S(F_n)$ 的Sombor指数为

$$SO(L(F_n))=4n\sqrt{1+n^2}+2n(2n^2-n)\sqrt{2},$$

$$SO(S(F_n))=8n\sqrt{2}+4n\sqrt{1+n^2}。$$

**证明**  $F_n$  边的个数为  $3n$ , 所以  $L(F_n)$  的大小为  $3n$ ,  $F_n$  中度为 2 的点的个数为  $2n$ , 度为  $2n$  的点的个数为 1。根据引理,  $L(F_n)$  的边的个数为  $2n^2 + n$ 。  $L(F_n)$  中度为  $2n$  的点的个数为  $2n$ 。将  $L(F_n)$  的边划分为  $E(d_u, d_v)$  类型的边, 其中  $uv$  是  $L(F_n)$  的一条边, 用  $uv \in E(L(F_n))$  来表示。对于  $L(F_n)$  可以得到  $E(2, 2n)$  和  $E(2n, 2n)$  等 2 种类型的边, 各类型边的个数如表 1 所示。

表 1  $L(F_n)$  边的分布情况

Tab. 1 Edge partition of  $L(F_n)$

边的类型	边的个数
$E(2, 2n)$	$2n$
$E(2n, 2n)$	$2n^2 - n$

那么,

$$SO(L(F_n)) = \sum_{uv \in E(L(F_n))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} = 2n\sqrt{2^2 + (2n)^2} + (2n^2 - n)\sqrt{(2n)^2 + (2n)^2} = 4n\sqrt{1 + n^2} + 2n(2n^2 - n)\sqrt{2},$$

$$SO(S(F_n)) = \sum_{uv \in E(S(F_n))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} = 4n\sqrt{2^2 + 2^2} + 2n\sqrt{2^2 + (2n)^2} = 8n\sqrt{2} + 4n\sqrt{1 + n^2}.$$

### 2.2 风车图的线图和细分图的 Sombor 指数

风车图  $D_n^m$  是将长度为  $n$  的圈图  $C_n$  复制  $m$  次收缩在一个公共顶点所得的图族, 其中  $m$  为任意正整数。  $D_4^m$  如图 2 所示, 且  $n=3$  的情况与友谊图  $F_n$  相同。

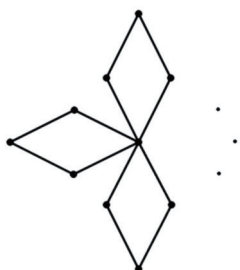


图 2 风车图  $D_4^m$

Fig. 2 Dutch windmill graph  $D_4^m$

**定理 2** 设  $L(D_n^m)$  和  $S(D_n^m)$  分别是风车图  $D_n^m$  的线图和细分图, 则  $L(D_n^m)$  和  $S(D_n^m)$  的 Sombor 指

数为

$$SO(L(D_n^m)) = 2m(n-3)\sqrt{2} + 4m\sqrt{m^2 + 1} + 2(2m-1)m^2\sqrt{2},$$

$$SO(S(D_n^m)) = 4m((n-1)\sqrt{2} + \sqrt{1 + m^2}).$$

**证明**  $D_n^m$  边的个数为  $mn$ , 所以  $L(D_n^m)$  的大小为  $mn$ ,  $D_n^m$  中度为 2 的点的个数为  $m(n-1)$ , 度为  $2m$  的点的个数为 1。根据引理,  $L(D_n^m)$  的边的个数为  $2m^2 + nm - 2m$ 。  $L(D_n^m)$  中度为 2 的点的个数为  $(n-2)m$ , 度为  $2m$  的点的个数为  $2m$ 。将  $L(D_n^m)$  的边划分为  $E(d_u, d_v)$  类型的边, 其中  $uv$  是  $L(D_n^m)$  的一条边, 对于  $L(D_n^m)$  可以得到  $E(2, 2)$ ,  $E(2, 2m)$  和  $E(2m, 2m)$  等 3 种类型的边, 各类型边的个数如表 2 所示。

表 2  $L(D_n^m)$  边的分布情况

Tab. 2 Edge partition of  $L(D_n^m)$

边的类型	边的个数
$E(2, 2)$	$m(n-3)$
$E(2, 2m)$	$2m$
$E(2m, 2m)$	$(2m-1)m$

那么,

$$SO(L(D_n^m)) = \sum_{uv \in E(L(D_n^m))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} = m(n-3)\sqrt{2^2 + 2^2} + 2m\sqrt{2^2 + (2m)^2} + (2m-1)m\sqrt{(2m)^2 + (2m)^2} = 2m(n-3)\sqrt{2} + 4m\sqrt{m^2 + 1} + 2(2m-1)m^2\sqrt{2},$$

$$SO(S(D_n^m)) = \sum_{uv \in E(S(D_n^m))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} = 2m(n-1)\sqrt{2^2 + 2^2} + 2m\sqrt{2^2 + (2m)^2} = 4m((n-1)\sqrt{2} + \sqrt{1 + m^2}).$$

### 2.3 爆竹图的线图和细分图的 Sombor 指数

爆竹图  $F_{n,m}$  是由  $n$  个  $m$ -星图复制, 依次连接每个星图的一个叶子拼接而得到的图。  $F_{4,7}$  如图 3 所示。

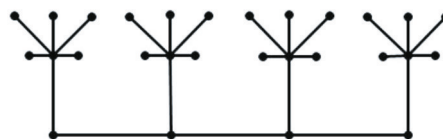


图 3 爆竹图  $F_{4,7}$

Fig. 3 Firecracker graph  $F_{4,7}$

**定理 3** 设  $L(F_{n,m})$  和  $S(F_{n,m})$  分别是爆竹图  $F_{n,m}$  的线图和细分图, 则  $L(F_{n,m})$  和  $S(F_{n,m})$  的 Sombor 指数为

$$SO(L(F_{n,m})) = 2\left(5 + \sqrt{9+m^2} + \sqrt{9+(m-1)^2}\right) + 4(n-2)\sqrt{2} + (2n-6)\sqrt{16+m^2} + 2(m-2)\sqrt{2m^2-6m+5} + \sqrt{2} \frac{nm^2+5nm+6n}{2}(m-2) + (n-2)(m-2)\sqrt{2m^2-4m+4},$$

$$SO(S(F_{n,m})) = n(m-2)\sqrt{5} + n(m-1)\sqrt{4+(m-1)^2} + 8\sqrt{2} + 2(n-2)\sqrt{13}.$$

**证明**  $F_{n,m}$  边的个数为  $nm-1$ , 所以  $L(F_{n,m})$  的大小为  $nm-1$ ,  $F_{n,m}$  中度为 1 的点的个数为  $n(m-2)$ , 度为 2 的点的个数为 2, 度为 3 的点的个数为  $n-2$ , 度为  $m-1$  的点的个数为  $n$ 。根据引理,  $L(F_{n,m})$  的边的个数为  $\frac{nm^2-3nm+8n-8}{2}$ 。

$L(F_{n,m})$  中度为 3 的点的个数为 2, 度为 4 的点的个数为  $n-3$ , 度为  $m-2$  的顶点为  $n(m-2)$ , 度为  $m-1$  的点的个数为 2, 度为  $m$  的点的个数为  $n-2$ 。将  $L(F_{n,m})$  的边划分为  $E(d_u, d_v)$  类型的边, 其中  $uv$  是  $L(F_{n,m})$  的一条边, 对于  $L(F_{n,m})$  可以得到  $E(3,4), E(3,m), E(3,m-1), E(4,4), E(4,m), E(m-1,m-2), E(m-2,m-2)$  和  $E(m-2,m)$  等 8 种类型的边, 各类型边的个数如表 3 所示。

表 3  $L(F_{n,m})$  边的分布情况

Tab. 3 Edge partition of  $L(F_{n,m})$

边的类型	边的个数
$E(3,4)$	2
$E(3,m)$	2
$E(3,m-1)$	2
$E(4,4)$	$n-4$
$E(4,m)$	$2n-6$
$E(m-1,m-2)$	$2(m-2)$
$E(m-2,m-2)$	$\frac{nm^2-5nm+6n}{2}$
$E(m-2,m)$	$(n-2)(m-2)$

那么,

$$SO(L(F_{n,m})) = \sum_{uv \in E(L(F_{n,m}))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} = 2\sqrt{3^2+4^2} + 2\sqrt{3^2+m^2} + 2\sqrt{3^2+(m-1)^2} + (n-4)\sqrt{4^2+4^2} + (2n-6)\sqrt{4^2+m^2} + 2(m-2)\sqrt{(m-1)^2+(m-2)^2} + \frac{nm^2+5nm+6n}{2}\sqrt{(m-2)^2+(m-2)^2} + (n-2)(m-2)\sqrt{(m-2)^2+m^2} = 2\left(5 + \sqrt{9+m^2} + \sqrt{9+(m-1)^2}\right) + 4(n-2)\sqrt{2} + (2n-6)\sqrt{16+m^2} + 2(m-2)\sqrt{2m^2-6m+5} + \sqrt{2} \frac{nm^2+5nm+6n}{2}(m-2) + (n-2)(m-2)\sqrt{2m^2-4m+4},$$

$$SO(S(F_{n,m})) = \sum_{uv \in E(S(F_{n,m}))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} = n(m-2)\sqrt{1^2+2^2} + n(m-2)\sqrt{2^2+(m-1)^2} + n\sqrt{(m-1)^2+2^2} + 4\sqrt{2^2+2^2} + 2(n-2)\sqrt{2^2+3^2} = n(m-2)\sqrt{5} + n(m-1)\sqrt{4+(m-1)^2} + 8\sqrt{2} + 2(n-2)\sqrt{13}.$$

**2.4 香蕉树图的线图和细分图的 Sombor 指数**

香蕉树图  $B_{n,m}$  是通过  $n$  个  $m$ -星图复制, 所有星图中的任意一个叶子连接到一个公共顶点所得到的。 $B_{3,5}$  如图 4 所示。

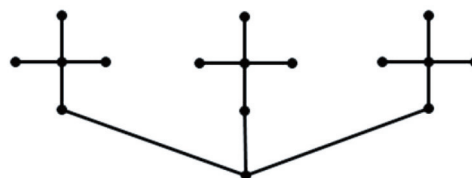


图 4 香蕉树图  $B_{3,5}$

Fig. 4 Banana tree graph  $B_{3,5}$

**定理 4** 设  $L(B_{n,m})$  和  $S(B_{n,m})$  分别是香蕉树  $B_{n,m}$  的线图和细分图, 则  $L(B_{n,m})$  和  $S(B_{n,m})$  的

Sombor 指数为

$$SO(L(B_{n,m})) = \sqrt{2} \frac{n^2(n-1)}{2} + n\sqrt{(m-1)^2 + n^2} + n(m-2)\sqrt{2m^2-6m+5} + \sqrt{2} \frac{nm^2 - 5nm + 6n}{2}(m-2),$$

$$SO(S(B_{n,m})) = n\left((m-2)\sqrt{5} + (m-1)\sqrt{4+(m-1)^2} 4\sqrt{2} + \sqrt{4+n^2}\right).$$

证明  $B_{n,m}$  边的个数为  $nm$ , 所以  $L(B_{n,m})$  的大小为  $nm$ ,  $B_{n,m}$  中度为 1 的点的个数为  $n(m-2)$ , 度为 2 的点的个数为  $n$ , 度为  $n$  的点的个数为 1, 度为  $m-1$  的点的个数为  $n$ . 根据引理,  $L(B_{n,m})$  的边的个数为  $\frac{n^2 + 3n + nm^2 - 3nm}{2}$ .  $L(B_{n,m})$  中度为  $m-2$  的点的个数为  $n(m-2)$ , 度为  $m-1$  的点的个数为  $n$ , 度为  $n$  的顶点为  $n$ . 将  $L(B_{n,m})$  的边划分为  $E(d_u, d_v)$  类型的边, 其中  $uv$  是  $L(B_{n,m})$  的一条边, 对于  $L(B_{n,m})$  可以得到  $E(n, n)$ ,  $E(m-1, n)$ ,  $E(m-1, m-2)$  和  $E(m-2, m-2)$  等 4 种类型的边, 各类型边的个数如表 4 所示.

表 4  $L(B_{n,m})$  边的分布情况

Tab. 4 Edge partition of  $L(B_{n,m})$

边的类型	边的个数
$E(n, n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$E(m-1, n)$	$n$
$E(m-1, m-2)$	$n(m-2)$
$E(m-2, m-2)$	$\frac{nm^2 - 5nm + 6n}{2}$

那么,

$$SO(L(B_{n,m})) = \sum_{uv \in E(L(B_{n,m}))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} = \frac{n(n-1)}{2} \sqrt{n^2 + n^2} + n\sqrt{(m-1)^2 + n^2} + n(m-2)\sqrt{(m-1)^2 + (m-2)^2} + \frac{nm^2 - 5nm + 6n}{2} \sqrt{(m-2)^2 + (m-2)^2} = \sqrt{2} \frac{n^2(n-1)}{2} + n\sqrt{(m-1)^2 + n^2} + n(m-2)\sqrt{2m^2 - 6m + 5} + \sqrt{2} \frac{nm^2 - 5nm + 6n}{2}(m-2),$$

$$SO(S(B_{n,m})) =$$

$$\sum_{uv \in E(S(B_{n,m}))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} = n(m-2)\sqrt{1^2 + 2^2} + n(m-1)\sqrt{2^2 + (m-1)^2} + 2n\sqrt{2^2 + 2^2} + n\sqrt{2^2 + n^2} = n\left((m-2)\sqrt{5} + (m-1)\sqrt{4+(m-1)^2} 4\sqrt{2} + \sqrt{4+n^2}\right).$$

### 2.5 轮图的线图和细分图的 Sombor 指数

轮图  $W_n$  是由一个顶点连接  $n$  阶圈上所有顶点形成的图, 即  $W_n = K_1 + C_n$  (其中,  $K_1$  是一个孤立点,  $C_n$  是一个  $n$  阶圈).  $W_8$  如图 5 所示. 轮图可以看作是星与圈的并. 孤立点与圈上顶点之间的边称为辐边, 圈上的边称为边缘边.

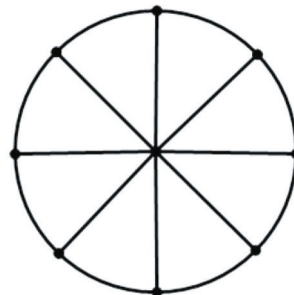


图 5 轮图  $W_8$

Fig. 5 Wheel graph  $W_8$

定理 5 设  $L(W_n)$  和  $S(W_n)$  分别是轮图  $W_n$  的线图和细分图, 则  $L(W_n)$  和  $S(W_n)$  的 Sombor 指数为

$$SO(L(W_n)) = \sqrt{2} \frac{n(n+1)}{2} + 2n\sqrt{16 + (n+1)^2} + 4n\sqrt{2},$$

$$SO(S(W_n)) = n\left(3\sqrt{13} + \sqrt{4+n^2}\right).$$

证明  $W_n$  边的个数为  $2n$ , 所以  $L(W_n)$  的大小为  $2n$ ,  $W_n$  中度为 3 的点的个数为  $n$ , 度为  $n$  的点的个数为 1. 根据引理,  $L(W_n)$  的边的个数为  $\frac{n^2 + 5n}{2}$ .  $L(W_n)$  中度为 4 的点的个数为  $n$ , 度为  $n+1$  的点的个数为  $n$ . 将  $L(W_n)$  的边划分为  $E(d_u, d_v)$  类型的边, 其中  $uv$  是  $L(W_n)$  的一条边, 对于  $L(W_n)$  可以得到  $E(n+1, n+1)$ ,  $E(4, n+1)$  和  $E(4, 4)$  等 3 种类型的边, 各类型边的个数如表 5 所示.

那么,

$$SO(L(W_n)) = \sum_{uv \in E(L(W_n))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \sqrt{(n+1)^2 + (n+1)^2} +$$

$$2n \sqrt{4^2 + (n+1)^2} + n \sqrt{4^2 + 4^2} =$$

$$\sqrt{2} \frac{n(n+1)^2}{2} + 2n \sqrt{16 + (n+1)^2} + 4n \sqrt{2},$$

$$SO(S(W_n)) = \sum_{uv \in E(S(W_n))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} =$$

$$3n \sqrt{2^2 + 3^2} + n \sqrt{2^2 + n^2} =$$

$$n(3\sqrt{13} + \sqrt{4+n^2}).$$

表5  $L(W_n)$ 边的分布情况

Tab.5 Edge partition of  $L(W_n)$

边的类型	边的个数
$E(n+1, n+1)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$E(4, n+1)$	$2n$
$E(4, 4)$	$n$

2.6 舵轮图的线图和细分图的 Sombor 指数

舵轮图  $H_n$  是由  $n$  阶圈  $C_n$  的每一个顶点都与同一个不在  $C_n$  上的顶点  $O$  相连, 然后在  $C_n$  的每点再增加一条悬边而得到的图<sup>[21]</sup>.  $H_8$  如图 6 所示, 即在轮图  $C_n$  边缘的每个点上, 添加一条悬挂边即为舵轮图。

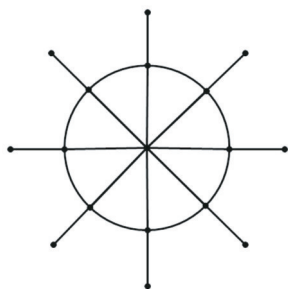


图6 舵轮图  $H_8$

Fig.6 Helm graph  $H_8$

**定理 6** 设  $L(H_n)$  和  $S(H_n)$  分别是舵轮图  $W_n$  的线图和细分图, 则  $L(H_n)$  和  $S(H_n)$  的 Sombor 指数为

$$SO(L(H_n)) = 6n \sqrt{5} + n \sqrt{9 + (n+2)^2} +$$

$$6n \sqrt{2} + 2n \sqrt{36 + (n+2)^2} +$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2} \sqrt{2},$$

$$SO(S(H_n)) = n(9\sqrt{5} + \sqrt{4+n^2}).$$

**证明**  $H_n$  边的个数为  $3n$ , 所以  $L(H_n)$  的大小为  $3n$ ,  $H_n$  中度为 1 的点的个数为  $n$ , 度为 4 的点的个数为  $n$ , 度为  $n$  的顶点的个数为 1。根据引理,  $L(H_n)$  的边的个数为  $\frac{n^2+11n}{2}$ 。  $L(H_n)$  中度为 3 的点的个数为  $n$ , 度为 6 的点的个数为  $n$ , 度为  $n+2$  的点的个数为  $n$ 。将  $L(H_n)$  的边划分为  $E(d_u, d_v)$  类型的边, 其中  $uv$  是  $L(H_n)$  的一条边, 对于  $L(H_n)$  可以得到  $E(3, 6)$ ,  $E(3, n+2)$ ,  $E(6, 6)$ ,  $E(6, n+2)$  和  $E(n+2, n+2)$  等 5 种类型的边, 各类型边的个数如表 6 所示。

表6  $L(H_n)$ 边的分布情况

Tab.6 Edge partition of  $L(H_n)$

边的类型	边的个数
$E(3, 6)$	$2n$
$E(3, n+2)$	$n$
$E(6, 6)$	$n$
$E(6, n+2)$	$2n$
$E(n+2, n+2)$	$\frac{n(n-1)}{2}$

那么,

$$SO(L(H_n)) = \sum_{uv \in E(L(H_n))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} =$$

$$2n \sqrt{3^2 + 6^2} + n \sqrt{3^2 + (n+2)^2} + n \sqrt{6^2 + 6^2} +$$

$$2n \sqrt{6^2 + (n+2)^2} +$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \sqrt{(n+2)^2 + (n+2)^2} =$$

$$6n \sqrt{5} + n \sqrt{9 + (n+2)^2} + 6n \sqrt{2} +$$

$$2n \sqrt{36 + (n+2)^2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{2} \sqrt{2},$$

$$SO(S(H_n)) = \sum_{uv \in E(S(H_n))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} =$$

$$n \sqrt{1^2 + 2^2} + 4n \sqrt{2^2 + 4^2} + n \sqrt{2^2 + n^2} =$$

$$n(9\sqrt{5} + \sqrt{4+n^2}).$$

2.7 齿轮图的线图和细分图的 Sombor 指数

齿轮图是轮图的扩展.  $n$  齿轮图  $G_n$  是通过在轮图  $W_n$  边缘边的每对相邻顶点之间插入一个额外的顶点来获得的. 本文考虑了  $W_{n,k}$  图.  $W_{n,k}$  图是  $W_n$  的  $(k-1)$  均匀细分, 它是在轮图  $W_n$  的边缘边的每对相邻顶点之间插入  $(k-1)$  个额外的顶点

获得的。 $W_{8,3}$ 如图 7 所示。由此可知, 轮图  $W_n$  为  $W_{n,1}$ ,  $n$  齿轮图  $G_n$  为  $W_{n,2}$ 。

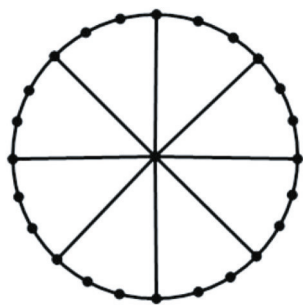


图 7  $W_{8,3}$   
Fig. 7  $W_{8,3}$

**定理 7** 设  $L(W_{n,k})$  和  $S(W_{n,k})$  分别是  $W_{n,k}$  的线图和细分图, 则  $L(W_{n,k})$  和  $S(W_{n,k})$  的 Sombor 指数为

$$SO(L(W_{n,k})) = \sqrt{2} \frac{n(n+1)^2}{2} + 2n\sqrt{9+(n+1)^2} + 3n\sqrt{2} + 2n\sqrt{13} + 2n(k-3)\sqrt{2},$$

$$SO(S(W_{n,k})) =$$

$$n(3\sqrt{13} + \sqrt{4+n^2}) + 4(k-1)\sqrt{2}.$$

**证明**  $W_{n,k}$  边的个数为  $n(k+1)$ , 所以  $L(W_{n,k})$  的大小为  $n(k+1)$ ,  $W_{n,k}$  中度为 2 的点的个数为  $n(k-1)$ , 度为 3 的点的个数为  $n$ , 度为  $n$  的顶点的个数为 1。根据引理,  $L(W_{n,k})$  的边的个数为  $\frac{2nk+n^2+3n}{2}$ 。 $L(W_{n,k})$  中度为 2 的点的个数为  $n(k-1)$ , 度为 3 的点的个数为  $2n$ , 度为  $n+1$  的点的个数为  $n$ 。将  $L(W_{n,k})$  的边划分为  $E(d_u, d_v)$  类型的边, 其中  $uv$  是  $L(W_{n,k})$  的一条边, 对于  $L(W_{n,k})$  可以得到  $E(n+1, n+1)$ ,  $E(3, n+1)$ ,  $E(3, 3)$ ,  $E(3, 2)$  和  $E(2, 2)$  等 5 种类型的边, 各类型边的个数如表 7 所示。

表 7  $L(W_{n,k})$  边的分布情况

Tab. 7 Edge partition of  $L(W_{n,k})$

边的类型	边的个数
$E(n+1, n+1)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$E(3, n+1)$	$2n$
$E(3, 3)$	$n$
$E(3, 2)$	$2n$
$E(2, 2)$	$n(k-3)$

那么,

$$SO(L(W_{n,k})) = \sum_{uv \in E(L(W_{n,k}))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} = \frac{n(n+1)}{2} \sqrt{(n+1)^2 + (n+1)^2} + 2n\sqrt{3^2 + (n+1)^2} + n\sqrt{3^3 + 3^3} + 2n\sqrt{3^2 + 2^2} + n(k-3)\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2} \frac{n(n+1)^2}{2} + 2n\sqrt{9+(n+1)^2} + 3n\sqrt{2} + 2n\sqrt{13} + 2n(k-3)\sqrt{2},$$

$$SO(S(W_{n,k})) = \sum_{uv \in E(S(W_{n,k}))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} = 3n\sqrt{2^2 + 3^2} + n\sqrt{2^2 + n^2} + 2(k-1)\sqrt{2^2 + 2^2} = n(3\sqrt{13} + \sqrt{4+n^2}) + 4(k-1)\sqrt{2}.$$

### 2.8 棒棒糖图的线图和细分图的 Sombor 指数

棒棒糖图  $L_{m,n}$  ( $m \geq 3$ ) 是通过将完全图  $K_m$  连接到路径  $P_n$  而获得的图。 $L_{4,3}$  如图 8 所示。

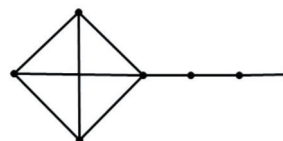


图 8 棒棒糖图  $L_{4,3}$

Fig. 8 Lollipop graph  $L_{4,3}$

**定理 8** 设  $L(L_{m,n})$  和  $S(L_{m,n})$  分别是棒棒糖图  $L_{m,n}$  的线图和细分图, 则  $L(L_{m,n})$  和  $S(L_{m,n})$  的 Sombor 指数为

$$SO(L(L_{m,n})) = \sqrt{5} + 2(n-3)\sqrt{2} + \sqrt{m^2+4} + (m-1)\left(\sqrt{(2m-3)^2+m^2} + (m-2)\sqrt{(2m-3)^2+(2m-4)^2} + 2(m-2)^3\right),$$

$$SO(S(L_{m,n})) = (m-1)^2\sqrt{4+(m-1)^2} + m\sqrt{4+m^2} + 4(n-1)\sqrt{2} + \sqrt{5}.$$

**证明**  $L_{m,n}$  边的个数为  $\frac{m(m-1)}{2} + n$ , 所以  $L(L_{m,n})$  的大小为  $\frac{m(m-1)}{2} + n$ ,  $L_{m,n}$  中度为 1 的点的个数为 1, 度为 2 的点的个数为  $n-1$ , 度为  $m$  的点的个数为 1, 度为  $m-1$  的点的个数为  $m-1$ 。根据引理,  $L(L_{m,n})$  的边的个数为

$\frac{m^3 - 3m^2 + 4m + 2n - 4}{2}$ 。  $L(L_{m,n})$  中度为  $2(m -$

$2)$  的点的个数为  $\frac{m^2 - 3m}{2}$ , 度为  $2m - 3$  的点的个数为  $m$ , 度为  $m$  的点的个数为  $1$ , 度为  $2$  的点的个数为  $n - 2$ , 度为  $1$  的点的个数为  $1$ 。将  $L(L_{m,n})$  的边划分为  $E(d_u, d_v)$  类型的边, 其中  $uv$  是  $L(L_{m,n})$  的一条边, 对于  $L(L_{m,n})$  可以得到  $E(1, 2)$ ,  $E(2, 2)$ ,  $E(m, 2)$ ,  $E(2m - 3, m)$ ,  $E(2m - 3, 2m - 4)$  和  $E(2m - 4, 2m - 4)$  等 6 种类型的

$$SO(L(L_{m,n})) = \sum_{uv \in E(L(L_{m,n}))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} =$$

$$\sqrt{1^2 + 2^2} + (n - 3)\sqrt{2^2 + 2^2} + \sqrt{m^2 + 2^2} + (m - 1)\sqrt{(2m - 3)^2 + m^2} +$$

$$(m - 2)(m - 1)\sqrt{(2m - 3)^2 + (2m - 4)^2} + \frac{(m - 1)(m - 2)^2}{2}\sqrt{(2m - 4)^2 + (2m - 4)^2} =$$

$$\sqrt{5} + 2(n - 3)\sqrt{2} + \sqrt{m^2 + 4} +$$

$$(m - 1)\left(\sqrt{(2m - 3)^2 + m^2} + (m - 2)\sqrt{(2m - 3)^2 + (2m - 4)^2} + 2(m - 2)^3\right),$$

$$SO(S(L_{m,n})) = \sum_{uv \in E(S(L_{m,n}))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} =$$

$$(m - 1)^2\sqrt{2^2 + (m - 1)^2} + m\sqrt{2^2 + m^2} +$$

$$2(n - 1)\sqrt{2^2 + 2^2} + \sqrt{2^2 + 1^2} =$$

$$(m - 1)^2\sqrt{4 + (m - 1)^2} + m\sqrt{4 + m^2} +$$

$$4(n - 1)\sqrt{2} + \sqrt{5}。$$

2.9 网图的线图和细分图的 Sombor 指数

网图  $W_n$  定义为广义棱镜图  $Y_{n+1,3}$  去掉外循环边缘<sup>[22]</sup>。  $W_6$  如图 9 所示。

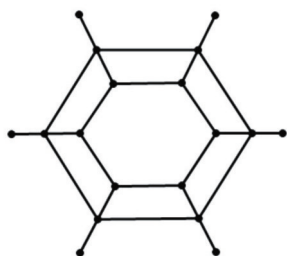


图 9 网图  $W_6$   
Fig. 9 Web graph  $W_6$

**定理 9** 设  $L(W_n)$  和  $S(W_n)$  分别是网图  $W_n$  的线图和细分图, 则  $L(W_n)$  和  $S(W_n)$  的 Sombor 指数为

边, 各类型边的个数如表 8 所示。

表 8  $L(L_{m,n})$  边的分布情况

Tab. 8 Edge partition of  $L(L_{m,n})$

边的类型	边的个数
$E(1, 2)$	1
$E(2, 2)$	$n - 3$
$E(m, 3)$	1
$E(2m - 3, m)$	$m - 1$
$E(2m - 3, 2m - 4)$	$(m - 2)(m - 1)$
$E(2m - 4, 2m - 4)$	$\frac{(m - 1)(m - 2)^2}{2}$

那么,

$$SO(L(W_n)) = 10n\sqrt{2} + 2n\sqrt{39} + 2n\sqrt{61} +$$

$$6n\sqrt{5} + n\sqrt{34},$$

$$SO(S(W_n)) = n(9\sqrt{5} + 3\sqrt{13}).$$

**证明**  $W_n$  边的个数为  $4n$ , 所以  $L(W_n)$  的大小为  $4n$ ,  $W_n$  中度为 1 的点的个数为  $n$ , 度为 3 的点的个数为  $n$ , 度为 4 的点的个数为  $n$ 。根据引理,  $L(W_n)$  的边的个数为  $9n$ 。  $L(W_n)$  中度为 4 的点的个数为  $n$ , 度为 5 的点的个数为  $n$ , 度为 6 的点的个数为  $n$ , 度为 3 的点的个数为  $n$ 。将  $L(W_n)$  的边划分为  $E(d_u, d_v)$  类型的边, 其中  $uv$  是  $L(W_n)$  的一条边, 对于  $L(W_n)$  可以得到  $E(4, 4)$ ,  $E(4, 5)$ ,  $E(5, 6)$ ,  $E(6, 6)$ ,  $E(6, 3)$  和  $E(5, 3)$  等 6 种类型的边, 各类型边的个数如表 9 所示。

表 9  $L(W_n)$  边的分布情况

Tab. 9 Edge partition of  $L(W_n)$

边的类型	边的个数
$E(4, 4)$	$n$
$E(4, 5)$	$2n$
$E(5, 6)$	$2n$
$E(6, 6)$	$n$
$E(6, 3)$	$2n$
$E(5, 3)$	$n$

那么,

$$SO(L(W_n)) = \sum_{uv \in E(L(W_n))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} =$$

$$n\sqrt{4^2 + 4^2} + 2n\sqrt{4^2 + 5^2} + 2n\sqrt{5^2 + 6^2} +$$

$$n\sqrt{6^2 + 6^2} + 2n\sqrt{6^2 + 3^2} + n\sqrt{5^2 + 3^2} =$$

$$4n\sqrt{2} + 2n\sqrt{39} + 2n\sqrt{61} + 6n\sqrt{2} + 6n\sqrt{5} + n\sqrt{34} =$$

$$10n\sqrt{2} + 2n\sqrt{39} + 2n\sqrt{61} + 6n\sqrt{5} + n\sqrt{34},$$

$$SO(S(W_n)) = \sum_{uv \in E(S(W_n))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} =$$

$$n\sqrt{1^2 + 2^2} + 4n\sqrt{2^2 + 4^2} + 3n\sqrt{2^2 + 3^2} =$$

$$n(9\sqrt{5} + 3\sqrt{13}).$$

**2.10 花图的线图和细分图的 Sombor 指数**

花图  $Fl_n$  是由舵轮图确定的, 由舵轮图中每条悬边的单点(度为 1 的点)与顶点  $O$  相连得到,  $Fl_4$  如图 10 所示。

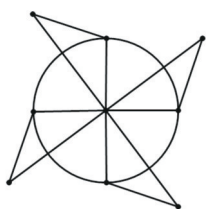


图 10 花图  $Fl_4$

Fig. 10 Flower graph  $Fl_4$

**定理 10** 设  $L(Fl_n)$  和  $S(Fl_n)$  分别是花图  $Fl_n$  的线图和细分图, 则  $L(Fl_n)$  和  $S(Fl_n)$  的 Sombor 指数为

$$SO(L(Fl_n)) = 4n\sqrt{13} + 2n\sqrt{1+n^2} +$$

$$2n\sqrt{n^2+2n+5} + 6n\sqrt{2} + 4n\sqrt{n^2+2n+10} +$$

$$2n^2\sqrt{2n^2+2n+1} + n^2(n-1)\sqrt{2} +$$

$$n(n-1)(n+1)\sqrt{2},$$

$$SO(S(Fl_n)) = 4n(\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{1+n^2}).$$

**证明**  $Fl_n$  边的个数为  $4n$ , 所以  $L(Fl_n)$  的大小为  $4n$ ,  $Fl_n$  中度为 2 的点的个数为  $n$ , 度为 4 的点的个数为  $n$ , 度为  $2n$  的顶点的个数为 1。根据引理,  $L(Fl_n)$  的边的个数为  $2n^2 + 6n$ 。  $L(Fl_n)$  中度为 4 的点的个数为  $n$ , 度为 6 的点的个数为  $n$ , 度为  $2n$  的点的个数为  $n$ , 度为  $2n+2$  的点的个数为  $n$ 。将  $L(Fl_n)$  的边划分为  $E(d_u, d_v)$  类型的边, 其中  $uv$  是  $L(Fl_n)$  的一条边, 对于  $L(Fl_n)$  可以得到  $E(4, 6)$ ,  $E(4, 2n)$ ,  $E(4, 2n+2)$ ,  $E(6, 6)$ ,  $E(6, 2n+2)$ ,  $E(2n, 2n+2)$ ,  $E(2n, 2n)$  和  $E(2n+2, 2n+2)$  等 8 种类型的

边, 各类型边的个数如表 10 所示。

表 10  $L(Fl_n)$  边的分布情况

Tab. 10 Edge partition of  $L(Fl_n)$

边的类型	边的个数
$E(4, 6)$	$2n$
$E(4, 2n)$	$n$
$E(4, 2n+2)$	$n$
$E(6, 6)$	$n$
$E(6, 2n+2)$	$2n$
$E(2n, 2n+2)$	$n^2$
$E(2n, 2n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$E(2n+2, 2n+2)$	$\frac{n(n-1)}{2}$

那么,

$$SO(L(Fl_n)) = \sum_{uv \in E(L(Fl_n))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} =$$

$$2n\sqrt{4^2 + 6^2} + n\sqrt{4^2 + (2n)^2} +$$

$$n\sqrt{4^2 + (2n+2)^2} + n\sqrt{6^2 + 6^2} +$$

$$2n\sqrt{6^2 + (2n+2)^2} +$$

$$n^2\sqrt{(2n)^2 + (2n+2)^2} +$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{(2n)^2 + (2n)^2} +$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{(2n+2)^2 + (2n+2)^2} =$$

$$4n\sqrt{13} + 2n\sqrt{1+n^2} + 2n\sqrt{n^2+2n+5} +$$

$$6n\sqrt{2} + 4n\sqrt{n^2+2n+10} +$$

$$2n^2\sqrt{2n^2+2n+1} +$$

$$n^2(n-1)\sqrt{2} + n(n-1)(n+1)\sqrt{2},$$

$$SO(S(Fl_n)) = \sum_{uv \in E(S(Fl_n))} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} =$$

$$2n\sqrt{2^2 + 2^2} + 4n\sqrt{2^2 + 4^2} + 2n\sqrt{2^2 + (2n)^2} =$$

$$4n(\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{1+n^2}).$$

**2.11 向日葵图的线图和细分图的 Sombor 指数**

向日葵图  $Sf_n$  是通过增加  $n$  个点与花图的顶点  $O$  相连得到,  $Sf_4$  如图 11 所示。

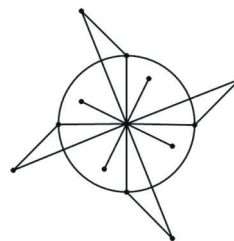


图 11 向日葵图  $Sf_4$

Fig. 11 Sunflower graph  $Sf_4$

**定理 11** 设  $L(Sf_n)$  和  $S(Sf_n)$  分别是花图  $Sf_n$  的线图和细分图, 则  $L(Sf_n)$  和  $S(Sf_n)$  的 Sombor 指数为

$$SO(L(Sf_n)) = 4n\sqrt{13} + n\sqrt{16 + 9n^2} + n\sqrt{9n^2 + 12n + 20} + 6n\sqrt{2} + 2n\sqrt{9n^2 + 12n + 40} + n^2(\sqrt{18n^2 + 12n + 4} + \sqrt{18n^2 + 6n + 5} + \sqrt{18n^2 - 6n + 1}) + \frac{\sqrt{2}n(n-1)}{2}(9n+1),$$

$$SO(S(Sf_n)) = n\left(4(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) + 5\sqrt{4 + 9n^2} + \sqrt{5}\right).$$

**证明**  $Sf_n$  边的个数为  $5n$ , 所以  $L(Sf_n)$  的大小为  $5n$ ,  $Sf_n$  中度为 1 的点的个数为  $n$ , 度为 2 的点的个数为  $n$ , 度为 4 的点的个数为  $n$ , 度为  $3n$  的顶点的个数为 1。根据引理,  $L(Sf_n)$  的边的个数为  $\frac{9n^2 + 11n}{2}$ 。  $L(Sf_n)$  中度为 4 的点的个数为  $n$ , 度为 6 的点的个数为  $n$ , 度为  $3n$  的点的个数为  $n$ , 度为  $3n + 2$  的点的个数为  $n$ , 度为  $3n - 1$  的点的个数为

$$SO(L(Sf_n)) = \sum_{uv \in E(L(Sf_n))} \sqrt{deg(u)^2 + deg(v)^2} = 2n\sqrt{4^2 + 6^2} + n\sqrt{4^2 + (3n)^2} + n\sqrt{4^2 + (3n+2)^2} + n\sqrt{6^2 + 6^2} + 2n\sqrt{6^2 + (3n+2)^2} + n^2\left(\sqrt{(3n)^2 + (3n+2)^2} + \sqrt{(3n-1)^2 + (3n+2)^2} + \sqrt{(3n-1)^2 + (3n)^2}\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt{(3n)^2 + (3n)^2} + \sqrt{(3n+2)^2 + (3n+2)^2} + \sqrt{(3n-1)^2 + (3n-1)^2}\right) = 4n\sqrt{13} + n\sqrt{16 + 9n^2} + n\sqrt{9n^2 + 12n + 20} + 6n\sqrt{2} + 2n\sqrt{9n^2 + 12n + 40} + n^2(\sqrt{18n^2 + 12n + 4} + \sqrt{18n^2 + 6n + 5} + \sqrt{18n^2 - 6n + 1}) + \frac{\sqrt{2}n(n-1)}{2}(9n+1),$$

$$SO(S(Sf_n)) = \sum_{uv \in E(S(Sf_n))} \sqrt{deg(u)^2 + deg(v)^2} = 2n\sqrt{2^2 + 2^2} + 4n\sqrt{2^2 + 4^2} + 2n\sqrt{2^2 + (3n)^2} + n\sqrt{2^2 + (3n)^2} + n\sqrt{1^2 + 2^2} = n\left(4(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) + 5\sqrt{4 + 9n^2} + \sqrt{5}\right).$$

### 3 结论

拓扑指数是图的一种数学符号, 本文详细阐述了友谊图、风车图、爆竹图、香蕉树图、轮图、舵轮图、齿轮图、棒棒糖图、网图、花图和向日葵

$n$ 。将  $L(Sf_n)$  的边划分为  $E(d_u, d_v)$  类型的边, 其中  $uv$  是  $L(Sf_n)$  的一条边, 对于  $L(Sf_n)$  可以得到  $E(4, 6)$ ,  $E(4, 3n)$ ,  $E(4, 3n + 2)$ ,  $E(6, 6)$ ,  $E(6, 3n + 2)$ ,  $E(3n, 3n)$ ,  $E(3n + 2, 3n + 2)$ ,  $E(3n, 3n + 2)$ ,  $E(3n - 1, 3n + 2)$ ,  $E(3n - 1, 3n)$  和  $E(3n - 1, 3n - 1)$  等 11 种类型的边, 各类型边的个数如表 11 所示。

表 11  $L(Sf_n)$  边的分布情况

Tab. 11 Edge partition of  $L(Sf_n)$

边的类型	边的个数
$E(4, 6)$	$2n$
$E(4, 3n)$	$n$
$E(4, 3n + 2)$	$n$
$E(6, 6)$	$n$
$E(6, 3n + 2)$	$2n$
$E(3n, 3n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$E(3n + 2, 3n + 2)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$E(3n, 3n + 2)$	$n^2$
$E(3n - 1, 3n + 2)$	$n^2$
$E(3n - 1, 3n)$	$n^2$
$E(3n - 1, 3n - 1)$	$\frac{n(n-1)}{2}$

那么,

图的定义, 找到了这些图的线图和细分图的 Sombor 指数的一般表达式。后续还可以对这些图形的其他拓扑指数, 或者其他图形的 Sombor 指数进行研究。

#### 参考文献:

[1] ZHANG G P, MUSHTAQ A, ASLAM A, et al. Studying some networks using topological descriptors and multi-criterion decision making [J]. Molecular Physics, 2023, 121(16): e2222345.  
 [2] KASHIF A, AFTAB S, JAVAID M, et al. M-polynomial-based topological indices of metal-organic networks[J]. Main Group Metal Chemistry, 2021, 44

- (1): 129-140.
- [ 3 ] ZHANG X J, SAIF M J, IDREES N, et al. QSPR analysis of drugs for treatment of schizophrenia using topological indices[J]. ACS Omega, 2023, 8(44): 41417-41426.
- [ 4 ] 杜建伟. 图论在通信网中的应用及分子拓扑指数研究[D]. 太原: 中北大学, 2018.
- [ 5 ] ZAMAN S, KAMBOH A, ULLAH A, et al. Development of some novel resistance distance based topological indices for certain special types of graph networks[J]. Physica Scripta, 2023, 98(12): 125250
- [ 6 ] RAI S, DEB B, RAZA Z, et al. Extremal topological indices of some nanostructures[J]. Heliyon, 2023, 9(11): e21223.
- [ 7 ] 霍英杰, 高玉斌. 线图、全图和细分图的第一几何-算数指数的上下界[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2018, 39(1): 38-41.  
HUO Yingjie, GAO Yubin. The tight upper and lower bounds on first geometric-arithmetic indices of line, total and subdivision graphs[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2018, 39(1): 38-41. (in Chinese)
- [ 8 ] CHALUVARAJU B, DIWAKAR S A. Computation of augmented zagreb index and their polynomial of certain class of windmill graphs[J]. Arya Bhatta Journal of Mathematics and Informatics, 2018, 10(1): 89-94.
- [ 9 ] HAYAT S, IMRAN M. Computation of topological indices of certain networks[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 240: 213-228.
- [10] IQBAL H, JABEEN Z S, MUFTI M O. On topological indices of subdivided and line graph of subdivided friendship graph[J]. International Journal of Discrete Mathematics, 2019, 4(1): 57-61.
- [11] SU G F, XU L L. Topological indices of the line graph of subdivision graphs and their Schur-bounds[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 253: 395-401.
- [12] ALI M A, SARDAR M S, SIDDIQUE I, et al. Vertex-based topological indices of double and strong double graph of dutch windmill graph[J]. Journal of Chemistry, 2021: 7057412.
- [13] GUTMAN I. Geometric approach to degree-based topological indices: Sombor indices[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2021, 86(1): 11-16.
- [14] MOHAMMADI M, BARZEGAR H, ASHRAFI A R. Comparisons of the sombor index of alkane, alkyl, and annulene series with their molecular mass[J]. Journal of Chemistry, 2022: 8348525.
- [15] LIU H C, CHEN H L, XIAO Q Q, et al. More on Sombor indices of chemical graphs and their applications to the boiling point of benzenoid hydrocarbons[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2021, 121(17): 26689.
- [16] CRUZ R, RADA J. Extremal values of the Sombor index in unicyclic and bicyclic graphs[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2021, 59(4): 1098-1116.
- [17] WANG Z, MAO Y, LI Y, et al. On relations between Sombor and other degree-based indices[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2022, 68(1): 1-17.
- [18] AIGNER M. On the linegraph of a directed graph[J]. Mathematische Zeitschrift, 1967, 102(1): 56-61.
- [19] AKHTER S, IMRAN M. Computing the forgotten topological index of four operations on graphs[J]. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 2017, 14(1): 70-79.
- [20] GUTMAN I, DAS K C. The first Zagreb index 30 years after[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2004, 50(1): 83-92.
- [21] NAZ K, AHMAD S, BASHIER E. On computing techniques for sombor index of some graphs[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2022: 1329653.
- [22] CAHYABUDI A N, KUSMAYADI T A. On the local metric dimension of a lollipop graph, a web graph, and a friendship graph[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2017, 909: 012039.