文章编号： 1673-3193(2025)05-0667-08　　J. North Univ. China, Nat. Sci. Ed., 2025,46(5):667-674.

四阶 Schrödinger 方程耦合系统的全局适定性

李艮艮，明　森，阎金芳

(中北大学 数学学院，山西 太原 030051)

摘　要： 本文研究了四阶非线性Schrödinger方程耦合系统Cauchy问题的全局适定性。通过建立质量守恒律和能量守恒律，对问题运用I方法可以得到修正能量的增量被时空积分的求和所控制的结论。对空间频率进行二进制局部化，分类讨论了其与参数N的依赖关系。利用Parseval等式及Holder不等式，分别计算得到不同求和项的界，从而在低正则性空间$H^s(R^4)(1/2<s<2)$中证明该耦合系统修正能量的几乎守恒律。运用Sobolev嵌入定理得到尺度变换能量的上界估计，选取参数λ充分大，使得该能量充分小。根据尺度不变性，建立初始能量与尺度变换能量之间的关系并且得到修正能量的多项式增长估计，即解的空间$H^s(R^4)$范数关于时间变量呈多项式增长。最后在低正则性空间$H^s(R^4)(1\leqslant s<2)$中建立了耦合系统Cauchy问题的全局适定性。该耦合系统存在唯一解并且解的$H^s(R^4)$范数连续依赖于初值的$H^s(R^4)$范数。

关键词： 耦合Schrödinger方程；I方法；几乎守恒律；全局适定性

中图分类号： O175.29　　**文献标识码：** A　　**doi:** 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2024.10.0007

引用格式： 李艮艮，明森，阎金芳．四阶Schrödinger方程耦合系统的全局适定性[J]．中北大学学报(自然科学版)，2025，46(5)：667-674.

LI Gengen, MING Sen, YAN Jinfang. Global well-posedness of the coupled fourth order Schrödinger equations [J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2025, 46(5): 667-674.

Global Well-Posedness of the Coupled Fourth Order Schrödinger Equations

LI Gengen, MING Sen, YAN Jinfang

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: Global well-posedness of the Cauchy problem for coupled system of fourth order nonlinear Schrödinger equations was studied. By establishing conservation laws of mass as well as energy and applying I method to the problem, we obtained that increment of modified energy was controlled by the sum of space time integrals. Spatial frequencies were dyadically localized and their dependence relationships with the parameter N were discussed in each case. Using Parseval's identity and Holder's inequality, the bounds of different summation terms were derived to prove the almost conservation law of modified energy of coupled system in low regularity space $H^s(R^4)(1/2<s<2)$. Applying Sobolev's embedding theorem, we obtained an upper bound estimate for the scale transformed energy. The parameter λ was chosen to be sufficiently large so that the energy was sufficiently small. Based on the scale invariance, a relation between the initial energy and scale transformed energy was established. A polynomial growth

收稿日期： 2024-10-12

基金项目： 山西省基础研究计划资助项目(20210302123045)

作者简介： 李艮艮(2000－)，女，硕士生，主要从事偏微分方程的研究。

通信作者： 明　森(1987－)，男，副教授，博士，主要从事偏微分方程的研究。E-mail：senming1987@163.com。

estimate of modified energy was obtained. Namely, the spatial $H^s(R^4)$ norm of solution grows polynomially with respect to the time variable. Thus, global well-posedness of the Cauchy problem for coupled system is established in low regularity space $H^s(R^4)(1\leqslant s<2)$. The solution of coupled system exists uniquely and its norm depends continuously on the $H^s(R^4)$ norm of initial values.

Key words: coupled Schrödinger equations; I method; almost conservation laws; global well-posedness

0 引 言

近年来，非线性Schrödinger方程初值问题的整体适定性被广泛关注。光在非线性光学介质中传播时，会出现诸如光孤子、自聚焦、自相位调制等现象。非线性Schrödinger方程能够很好地描述光脉冲在光纤等非线性介质中的传输过程，并解释光孤子的形成和稳定传播机制。耦合非线性Schrödinger方程可以体现不同光场之间的相互作用，从而准确刻画非线性光学现象的产生与演化过程。不同频率或不同偏振方向的光场之间通过非线性相互作用耦合，其耦合强度取决于光场的强度以及介质的非线性特征。通过对耦合非线性Schrödinger方程进行求解，探究光孤子的传播特性及相互作用规律等，可以为开发新型的光学器件提供理论基础，从而推动相关领域的技术创新和发展。Bourgain[1]利用Fourier截断方法与Strichartz不等式研究了具有临界非线性项的二维Schrödinger方程Cauchy问题的全局适定性。Colliande等[2]利用I方法分别在空间$H^s(R^2)(s>4/7)$和$H^s(R^3)(s>5/6)$中研究了非聚焦的三次Schrödinger方程$i\partial_t u+\Delta u=|u|^2u$的Cauchy问题修正能量的几乎守恒律及整体适定性。Colliander等[3]还研究了三次聚焦的Schrödinger方程$iu_t+\Delta u=-|u|^2u(n=2)$的初值问题，当$s_Q<s<1(s_Q=1/(5(1+\sqrt{11})))$时，得到粗糙解会在有限时间内破裂。Cazenave等[4]研究了非聚焦的Schrödinger方程$iu_t+\Delta u=|u|^{p-1}u$的初值问题，当$s\geqslant\max(s_{\mathrm{crit}},0)(s_{\mathrm{crit}}=n/2-2/(p-1))$时，利用压缩映射原理和Strichartz估计，得到问题的局部适定性。Ginibre等[5]研究了质量临界聚焦的Schrödinger方程$iu_t+\Delta u=-|u|^{4/n}u$，在$H^1(R^n)$空间中得到问题的局部适定性。Duyckaerts等[6]利用Profile分解研究了二阶非线性Schrödinger方程初值问题的全局适定性。Miao等[7]研究了能量临界非聚焦的四阶Schrödinger方程$iu_t+\Delta^2u=-|u|^{8/(n-4)}u(n\geqslant 9)$初值问题的全局适定性及散射性质。Miao等[8]又研究了聚焦的四阶非线性Schrödinger方程$iu_t+\Delta^2u=|u|^{8/(n-4)}u$，当$u_0\in\dot{H}^2(R^n)(n\geqslant 5)$时，得到了问题的全局适定性。Ben-artzi等[9]研究了四阶非线性Schrödinger方程$iu_t-\Delta^2u=-|u|^{p-1}u$的初值问题，当$1<p<(2n/(n-4))+$时，在$H^2(R^n)$空间中建立了问题的局部适定性。Ilan等[10]在$H^2(R^n)$空间中得到了四阶聚焦Schrödinger方程初值问题的全局适定性的结果。Zhu等[11]研究了四阶Schrödinger方程$iu_t-\Delta^2u=-|u|^2u$的初值问题，当$u_0\in H^s(R^4)(s>s_0(s_0\leqslant(9+\sqrt{721})/20))$时，证明粗糙解会在有限时间内破裂。Chen等[12]在乘积空间中利用ℓ^2-解耦不等式建立了Schrödinger方程初值问题局部解的光滑性估计。Guo等[13]证明了具有能量临界的三维非线性Schrödinger方程解的衰减性质。Shen等[14]在三维空间中研究了非聚焦的三次Schrödinger方程初值问题的全局适定性及散射性质。Bai等[15]证明了能量次临界非聚集的Schrödinger方程初值问题的全局适定性。Shen等[16]研究了三维非线性Schrödinger方程的初值问题，当初值$u_0\in H^s(R^3)(17/40<s<1/2)$时，得到了问题的全局适定性。其它相关的研究见文献[17-18]。而关于四阶耦合Schrödinger方程Cauchy问题(1)的全局适定性尚无研究结果。

本文拟利用I方法研究如下非线性Schrödinger方程耦合系统(1)的Cauchy问题。

$$\begin{cases} i\partial_t u_1-\Delta^2u_1=\alpha|u_2|^2u_1, & (x,t)\in R^4\times(0,+\infty),\\ i\partial_t u_2-\Delta^2u_2=\alpha|u_1|^2u_2, & (x,t)\in R^4\times(0,+\infty),\\ u_1(0,x)=u_{10}(x),\ u_2(0,x)=u_{20}(x), & x\in R^4,\end{cases}\tag{1}$$

式中：$i=\sqrt{-1}$；$\Delta=\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$为Laplace算子；$\Delta^2=\Delta\Delta$为$R^4$上的双调和算子；常数$\alpha<0$；初值$(u_{10}(x),u_{20}(x))\in H^s(R^4)\times H^s(R^4)$ $(s>0)$；$u_i(x,t)(i=1,2)$是复值函数。

首先给出耦合系统(1)在$H^2(R^n)$空间中的相关结论。问题(1)的质量守恒律为

$$\|u_1(t)\|_{L^2(R^4)}+\|u_2(t)\|_{L^2(R^4)}\equiv\|u_{10}\|_{L^2(R^4)}+$$

$\|u_{20}\|_{L^2(R^4)}$，

能量守恒律为

$$E(u_1,u_2)(t)=\int_{R^4}(|\Delta u_1|^2+|\Delta u_2|^2)/2\,\mathrm{d}x+\alpha\int_{R^4}(|u_1|^2|u_2|^2)/2\,\mathrm{d}x\equiv E(u_1,u_2)(0)。$$

假设 $0<s<2$，参数 $N>1$。定义乘子 $\widehat{I_N u}(\xi)=m_N(\xi)\hat{u}(\xi)$，其中，$m_N(\xi)\in C_c^\infty(R^4)$ 是径向对称且关于 $|\xi|$ 递减的函数，其表达式为

$$m_N(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|\leqslant N,\\ N^{2-s}|\xi|^{s-2}, & |\xi|\geqslant 2N,\end{cases}$$

所以 I_N 为 $H^s\to H^1$ 的有界线性算子。通过计算可知

$$E(I_Nu_1,I_Nu_2)(t)\leqslant N^{4-2s}(\|u_1(\cdot,t)\|^2_{\dot{H}^s(R^4)}+\|u_2(\cdot,t)\|^2_{\dot{H}^s(R^4)})+2|\alpha|\|u_1(\cdot,t)u_2(\cdot,t)\|^2_{L^2(R^4)},$$

$$\|u_1(\cdot,t)\|^2_{\dot{H}^s(R^4)}+\|u_2(\cdot,t)\|^2_{\dot{H}^s(R^4)}\leqslant CE(I_Nu_1,I_Nu_2)(t)+C\|u_{10}\|^2_{L^2(R^4)}+C\|u_{20}\|^2_{L^2(R^4)}。$$

下面给出本文的主要结果。

定理 1　设 $(u_{10},u_{20})\in H^s(R^4)\times H^s(R^4)(1\leqslant s<2)$，则问题(1)是全局适定的，即对于 $\forall T>0$，解 $u_i(x,t)\in C([0,T];H^s(R^4))(i=1,2)$，且满足估计 $\|u_i(\cdot,t)\|_{H^s(R^4)}\leqslant C_1t^M+C_2(i=1,2)$，其中，$C_1,C_2,M$ 依赖于 $\|u_{10}\|_{H^s(R^4)}$ 和 $\|u_{20}\|_{H^s(R^4)}$。

注 1　本文利用 I 方法，通过建立问题(1)的质量守恒律与能量守恒律，在低正则性空间 $H^s(R^4)$ 中研究问题(1)。对耦合系统(1)运用 I 算子并结合能量表达式来估计系统的修正能量。通过建立初始能量与尺度变换能量之间的关系，给出系统修正能量的几乎守恒律并建立解的空间 $H^s(R^4)$ 范数关于时间的多项式增长估计，从而得到该耦合系统的全局适定性。本文将文献[11]中研究的单个四阶Schrödinger方程的初值问题的全局适定性与解的范数增长估计结果推广为耦合系统情形，并且将非线性项系数 $(\alpha=-1)$ 推广到一般情形 $(\alpha<0)$。同时，将文献[2]中研究的单个二阶Schrödinger方程的初值问题推广为四阶耦合方程组情形。

1　预备知识

$L^r=L_x^r(R^4)$ 为复值函数的Lebesgue空间，其范数为 $\|f\|_{L^r}=\|f\|_{L_x^r}=\left(\int_{R^4}|f|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}$。定义时空范数

$$\|f\|_{L_t^qL_x^r}=\|f\|_{L_t^qL_x^r(R\times R^4)}=\left(\int_R\left(\int_{R^4}|f|^r\mathrm{d}x\right)^{q/r}\mathrm{d}t\right)^{1/q}。$$

当 $q=r$ 时，将 $L_t^qL_x^r$ 记为 $L_{t,x}^q$。$Ff=\hat{f}$ 为 f 的Fourier变换，其中，$f\in L^1(R^4)$，$Ff=\hat{f}(\xi)=1/(2\pi)^2\int_{R^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x$，$\forall\xi\in R^4$。$\hat{f}(\xi)$ 的Fourier逆变换 $F^{-1}(\hat{f})$ 为 $F^{-1}\hat{f}(x)=1/(2\pi)^2\int_{R^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$，$\forall x\in R^4$。对于 $\forall s\in\mathbf{R}$，定义分数阶微分算子 $|\nabla|^s$ 满足 $\widehat{|\nabla|^sf}(\xi)=|\xi|^s\hat{f}(\xi)$，$<\nabla>^s$ 满足 $\widehat{<\nabla>^sf}(\xi)=<\xi>^s\hat{f}(\xi)$，其中 $<a>=\sqrt{1+|a|^2}$。

齐次Sobolev空间 $\dot{H}^s(R^4)(s\geqslant0)$ 为 $\dot{H}^s(R^4)=\{f\in S'(R^4)\,|\,|\xi|^s\hat{f}(\xi)\in L^2(R^4)\}$，其中，范数 $\|f\|_{\dot{H}^s}=\left\||\nabla|^sf\right\|_{L^2}$。非齐次Sobolev空间 $H^s(R^4)$ 为

$$H^s(R^4)=\{f\in S'(R^4)\,|<\xi>^s\hat{f}(\xi)\in L^2(R^4)\},$$

其中，范数 $\|f\|_{H^s}=\|<\nabla>^s\|f\|_{L^2}$。

令 $\varphi(\xi)\in C_c^\infty(R^4)$，$\operatorname{supp}\varphi(\xi)=\{\xi|\ |\xi|\leqslant2\}$。当 $|\xi|\leqslant1$ 时，$\varphi(\xi)=1$。对于二进制数 $N\in2^k(k\in\mathbf{Z})$，定义投影算子

$$\widehat{P_{\leqslant N}f}(\xi)=\varphi(\xi/N)\hat{f}(\xi),\ \widehat{P_{>N}f}(\xi)=(1-\varphi(\xi/N))\hat{f}(\xi),$$

$$\widehat{P_Nf}(\xi)=(\varphi(\xi/N)-\varphi(2\xi/N))\hat{f}(\xi)。$$

定义 $P_{<N}=P_{\leqslant N}-P_N$，$P_{\geqslant N}=P_{>N}+P_N$。若 $2\leqslant q,r\leqslant+\infty$，$(q,r,n)\neq(2,\infty,4)$ 且 $4/q=n(1/2-1/r)$，则称指数对 (q,r) 为 R^n 上的 B-容许对。记函数 f 的Strichartz范数为 $\|f\|_{B^0(I)}=\sup\limits_{(q,r)}\|f\|_{L_t^qL_x^r(I\times R^n)}$。

引理 1[11]　对于 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant+\infty$ 及 $s>0$，则有

$$\|P_{\geqslant N}f\|_{L^p}\leqslant N^{-s}\left\||\nabla|^sP_{\geqslant N}f\right\|_{L^p},$$

$$\left\||\nabla|^sP_{\leqslant N}f\right\|_{L^p}\leqslant N^s\|P_{\leqslant N}f\|_{L^p},$$

$$\left\||\nabla|^{\pm s}P_Nf\right\|_{L^p}\sim N^{\pm s}\|P_Nf\|_{L^p},$$

$$\|P_{\leqslant N}f\|_{L^q}\leqslant N^{n(1/p-1/q)}\|P_{\leqslant N}f\|_{L^p},$$

$$\|P_Nf\|_{L^q}\leqslant N^{n(1/p-1/q)}\|P_Nf\|_{L^p}。$$

引理 2[11] 设$1<p<+\infty$及$0\leqslant s<2$, 则以下不等式成立

$$\|I_N f\|_{L^p}\leqslant\|f\|_{L^p},\ \left\||\nabla|^s P_{>N}f\right\|_{L^p}\leqslant N^{s-2}\|\Delta I_N f\|_{L^p},$$

$$\|f\|_{H^s}\leqslant\|I_N f\|_{H^2}\leqslant N^{2-s}\|f\|_{H^s}。$$

引理 3[11] 设$\psi\in L^2(R^4)$, 记$\psi_1=P_{N_1}\psi$及$\psi_2=P_{N_2}\psi$。对于$N_1\leqslant N_2$, 则有

$$\|\mathrm{e}^{it\Delta^2}\psi_1\cdot\mathrm{e}^{it\Delta^2}\psi_2\|_{L^2_{t,x}(R\times R^4)}\leqslant C(N_1/N_2)^{(1/2)-}\|\psi_1\|_{L^2_x}\|\psi_2\|_{L^2_x}。$$

设u是问题(1)在区间$[0,T]$上的解。记$u_j=P_{N_j}u(j=1,2)$, 对于$N_1\leqslant N_2$, 则有

$$\|u_1u_2\|_{L^2_{T_{\mathrm{lwp}}}L^2_x}\leqslant C(N_1/N_2)^{(1/2)-}\|u\|^2_{B^0([0,T])}\tag{2}$$

及

$$\|\mathrm{e}^{it\Delta^2}\psi_1\cdot\mathrm{e}^{it\Delta^2}\psi_2\|_{L^2_{t,x}(R\times R^4)}\leqslant C2^{3(N_1-N_2)/2}\|\psi_1\|_{L^2_x}\|\psi_2\|_{L^2_x}。\tag{3}$$

引理 4[11] 如下估计成立:

$$\|P_{123}I_N(\bar u_{N_1}u_{N_2}\bar u_{N_3})\|_{L^2_{T_{\mathrm{lwp}}}L^2_x}\leqslant <N_1>^{-1}\prod_{j=1}^{3}\|I_N<\nabla>^2u_{N_j}\|_{B^0([0,T_{\mathrm{lwp}}])}。\tag{4}$$

引理 5[11] 设$u_0\in H^s(R^4)(0<s<2)$, 则问题(1)在区间$[0,T_{\mathrm{lwp}}]$上是适定的, 其中, $T_{\mathrm{lwp}}=C_0\|I_N<\nabla>^2u_0\|_{L^2_x}^{-4/s}$, 并且满足

$$\|I_N<\nabla>^2u\|_{B^0([0,T_{\mathrm{lwp}}])}\leqslant 2\|I_N<\nabla>^2u_0\|_{L^2_x},\tag{5}$$

并且$\int_{R^4}|u(x,t)|^2\mathrm{d}x=\int_{R^4}|u_0|^2\mathrm{d}x$, $\forall t\in[0,T_{\mathrm{lwp}}]$。

2 修正能量的几乎守恒律

下面给出问题(1)修正能量的几乎守恒律, 即如下引理6。

引理 6 令$1/2<s<2$。设$u_{10}(x)$, $u_{20}(x)\in C_0^\infty(R^4)$且$E(Iu_{10},Iu_{20})\leqslant 1$, 则存在$\delta=\delta(\|u_{10}\|_{L^2(R^4)},\|u_{20}\|_{L^2(R^4)})$使得问题(1)的解$(u_1,u_2)\in(C([0,\delta],H^s(R^4)))^2$, 并且

$$\sup_{t\in[0,T_{\mathrm{lwp}}]}|E(I_Nu_1,I_Nu_2)|\leqslant|E(I_Nu_{10},I_Nu_{20})|+CN^{-1-}\|I_N<\nabla>^2u_{10}\|^2_{L^2_x}\|I_N<\nabla>^2u_{20}\|^2_{L^2_x}+CN^{-3-}(\|I_N<\nabla>^2u_{10}\|^4_{L^2_x}\|I_N<\nabla>^2u_{20}\|^2_{L^2_x}+\|I_N<\nabla>^2u_{10}\|^2_{L^2_x}\|I_N<\nabla>^2u_{20}\|^4_{L^2_x}),$$

对于$\forall t\in[0,\delta]$成立。

证明 下面将I_N记为I。对问题(1)运用I算子, 得到

$$\partial_tE(Iu_1,Iu_2)=\mathrm{Re}\int_{R^4}(\Delta Iu_1\overline{\Delta I\partial_tu_1}+\Delta Iu_2\overline{\Delta I\partial_tu_2})\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{R^4}\alpha(|Iu_2|^2Iu_1\overline{I\partial_tu_1}+|Iu_1|^2Iu_2\overline{I\partial_tu_2})\mathrm{d}x=$$
$$\mathrm{Re}\int_{R^4}(-\alpha)\overline{I\partial_tu_1}(I(|u_2|^2u_1)-|Iu_2|^2Iu_1)\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{R^4}(-\alpha)\overline{I\partial_tu_2}(I(|u_1|^2u_2)-|Iu_1|^2Iu_2)\mathrm{d}x。$$

由此可得

$$E(Iu_1,Iu_2)(t)-E(Iu_1,Iu_2)(0)=\int_0^t\int_{\sum_{j=1}^4\xi_j=0}\left(1-\frac{m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}\right)\cdot(\alpha\widehat{\overline{I\partial_tu_1}})(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_2}}(\xi_3)\widehat{Iu_1}(\xi_4)+$$
$$\int_0^t\int_{\sum_{j=1}^4\eta_j=0}\left(1-\frac{m(\eta_2+\eta_3+\eta_4)}{m(\eta_2)m(\eta_3)m(\eta_4)}\right)\cdot(\alpha\widehat{\overline{I\partial_tu_2}})(\eta_1)\widehat{Iu_1}(\eta_2)\widehat{\overline{Iu_1}}(\eta_3)\widehat{Iu_2}(\eta_4)。\tag{6}$$

定 义 $L_1(\xi)=1-\dfrac{m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}$, $L_2(\eta)=1-\dfrac{m(\eta_2+\eta_3+\eta_4)}{m(\eta_2)m(\eta_3)m(\eta_4)}$。

$$I_1=\left|\alpha\int_0^t\int_{\sum_{j=1}^4\xi_j=0}L_1(\xi)\widehat{\overline{\Delta^2Iu_1}}(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_2}}(\xi_3)\widehat{Iu_1}(\xi_4)\right|,$$

$$I_2=\left|\alpha^2\int_0^t\int_{\sum_{j=1}^4\xi_j=0}L_1(\xi)\widehat{\overline{I(|u_2|^2u_1)}}(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{\overline{Iu_2}}(\xi_3)\widehat{Iu_1}(\xi_4)\right|,$$

$$I_3=\left|\alpha\int_0^t\int_{\sum_{j=1}^4\eta_j=0}L_2(\eta)\widehat{\overline{\Delta^2Iu_2}}(\eta_1)\widehat{Iu_1}(\eta_2)\widehat{\overline{Iu_1}}(\eta_3)\widehat{Iu_2}(\eta_4)\right|,$$

$$I_4=\left|\alpha^2\int_0^t\int_{\sum_{j=1}^4\eta_j=0}L_2(\eta)\widehat{\overline{I(|u_1|^2u_2)}}(\eta_1)\widehat{Iu_1}(\eta_2)\widehat{\overline{Iu_1}}(\eta_3)\widehat{Iu_2}(\eta_4)\right|。$$

令$m_j=m(\xi_j)$。假设$N_2\geqslant N_3\geqslant N_4$。首先估计$I_1$，分三种情形讨论。

情形1 $N\gg N_2$。

$\sum_{j=1}^{4}\xi_j=0$，则$N_1\ll N$，$\dfrac{m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}=1$，则$L_1(\xi)=0$，故$I_1$有界。

情形2 $N_2\geqslant N\gg N_3\geqslant N_4$。

由于$\sum_{j=1}^{4}\xi_j=0$，所以$N_1\sim N_2$。应用中值定理，则有

$$\left|1-\frac{m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}\right|\leqslant$$
$$\left|\frac{\nabla m(\xi_2)(\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)}\right|\leqslant\frac{N_3}{N_2}。$$

利用Holder不等式以及式(3)可得

$$I_1\leqslant|\alpha|\frac{N_3}{N_2}\left|\int_0^t\int_{\sum_{j=1}^{4}\xi_j=0}\widehat{\Delta^2 Iu_1}(\xi_1)\widehat{Iu_2}(\xi_2)\widehat{Iu_2}(\xi_3)\widehat{Iu_1}(\xi_4)\right|\leqslant$$
$$|\alpha|\frac{N_3}{N_2}\frac{<N_1>^2}{<N_2>^2<N_3>^2<N_4>^2}\|I<\nabla>^2u_{1N_1}I<\nabla>^2u_{2N_3}\|_{L^2_{T_{lwp}}L^2_x}\times$$
$$\|I<\nabla>^2u_{2N_2}I<\nabla>^2u_{1N_4}\|_{L^2_{T_{lwp}}L^2_x}\leqslant$$
$$|\alpha|\frac{1}{N_2}\frac{1+N_1^2}{1+N_2^2}\frac{N_3}{1+N_3^2}\frac{1}{1+N_4^2}\|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\leqslant$$
$$|\alpha|N^{-1-}(N_1N_2<N_3><N_4>)^{0-}\|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}。\tag{7}$$

情形3 $N_2\geqslant N_3\geqslant N$。

$$\left|1-\frac{m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}\right|\leqslant\frac{m(\xi_1)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}。$$

1） $N_1\sim N_2\geqslant N_3\geqslant N$。

由式(2)及式(3)可知

$$I_1\leqslant|\alpha|\frac{m_1}{m_2m_3m_4}(N_3/N_1)^{(1/2)-}2^{3(N_4-N_2)/2}\cdot$$
$$\frac{<N_1>^2}{<N_2>^2<N_3>^2<N_4>^2}\times$$
$$\|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\leqslant$$
$$|\alpha|\frac{m_1}{m_2N_2m_3N_3m_4N_4}\cdot$$
$$\frac{1+N_1^2}{1+N_2^2}\frac{N_2N_3^{1/2}}{N_1^{1/2}N_3}\frac{N_3^2}{1+N_3^2}\frac{1}{1+N_4^2}N_4\times$$
$$\|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])},\tag{8}$$

其中

$$\frac{m_1}{m_2N_2m_3N_3m_4N_4}\frac{1+N_1^2}{1+N_2^2}\frac{N_2N_3^{1/2}}{N_1^{1/2}N_3}\frac{N_3^2}{1+N_3^2}\frac{1}{1+N_4^2}\cdot$$
$$N_4\leqslant\frac{1}{N^{2-s}N_3^{s-1/2}N_1^{1/2}}\frac{1}{1+N_4^2}\leqslant N^{-1-}。$$

2） $N_2\sim N_3\geqslant N$。

结合式(2)及式(3)，可以得到

$$I_1\leqslant|\alpha|\frac{m_1}{m_2m_3m_4}(N_1/N_2)^{(1/2)-}2^{3(N_4-N_3)/2}\cdot$$
$$\frac{<N_1>^2}{<N_2>^2<N_3>^2<N_4>^2}\times$$
$$\|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\leqslant$$
$$|\alpha|\frac{m_1}{m_2N_2m_3N_3m_4N_4}\cdot$$
$$\frac{1+N_1^2}{1+N_2^2}\frac{N_2N_1^{1/2}}{N_2^{1/2}N_3}\frac{N_3^2}{1+N_3^2}\frac{1}{1+N_4^2}N_4\times$$
$$\|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}。\tag{9}$$

其中

$$\frac{m_1}{m_2N_2m_3N_3m_4N_4}\frac{1+N_1^2}{1+N_2^2}\frac{N_2N_1^{1/2}}{N_2^{1/2}N_3}\frac{N_3^2}{1+N_3^2}\frac{1}{1+N_4^2}\cdot$$
$$N_4\leqslant\frac{1}{N^{2-s}N_3^{s}}\frac{1}{1+N_4^2}\leqslant N^{-1-}。$$

下面估计I_3，分三种情形讨论。

情形1 $N\gg N_2$。

因为$N_1\ll N$，所以$\dfrac{m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}=1$，则$I_3$有界。

情形2 $N_2\geqslant N\gg N_3\geqslant N_4$。

因为$\sum_{j=1}^{4}\xi_j=0$，所以$N_1\sim N_2$。结合中值定理，可知

$$\left|1-\frac{m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}\right|\leqslant$$
$$\left|\frac{\nabla m(\xi_2)(\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)}\right|\leqslant\frac{N_3}{N_2}。$$

运用Holder不等式以及式(3)可以得到

$$I_3\leqslant|\alpha|\frac{N_3}{N_2}\frac{<N_1>^2}{<N_2>^2<N_3>^2<N_4>^2}\cdot 2^{3(N_3-N_1)/2}2^{3(N_4-N_2)/2}\times \|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\leqslant |\alpha|N^{-1-}(N_1N_2<N_3><N_4>)^{0-}\times \|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}。\tag{10}$$

情形3 $N_2\geqslant N_3\geqslant N$。

$$\left|1-\frac{m(\xi_2+\xi_3+\xi_4)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}\right|\leqslant\frac{m(\xi_1)}{m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}。$$

1) $N_1\sim N_2\geqslant N_3\geqslant N$。

$$I_3\leqslant|\alpha|\frac{m_1}{m_2m_3m_4}(N_3/N_1)^{(1/2)-}2^{3(N_4-N_2)/2}\cdot \frac{<N_1>^2}{<N_2>^2<N_3>^2<N_4>^2}\times \|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\leqslant |\alpha|\frac{m_1}{m_2N_2m_3N_3m_4N_4}\cdot \frac{1+N_1^2}{1+N_2^2}\frac{N_2N_3^{1/2}}{N_1^{1/2}N_3}\frac{N_3^2}{1+N_3^2}\frac{1}{1+N_4^2}N_4\times \|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])},\tag{11}$$

其中

$$\frac{m_1}{m_2N_2m_3N_3m_4N_4}\frac{1+N_1^2}{1+N_2^2}\frac{N_2N_3^{1/2}}{N_1^{1/2}N_3}\frac{N_3^2}{1+N_3^2}\frac{1}{1+N_4^2}\cdot N_4\leqslant\frac{1}{N^{2-s}N_3^{s-1/2}N_1^{1/2}}\frac{1}{1+N_4^2}\leqslant N^{-1-}。$$

2) $N_2\sim N_3\geqslant N$。

$$I_3\leqslant|\alpha|\frac{m_1N}{m_2N_2m_3N_3m_4N_4}\cdot \|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\leqslant |\alpha|N^{-1-}(N_1N_2N_3<N_4>)^{0-}\cdot \|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}。\tag{12}$$

故有

$$I_1+I_3\leqslant CN^{-1-}(\|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\cdot \|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])})。\tag{13}$$

下面估计I_2。令$\xi_1'=\xi_1+\xi_2+\xi_3$，$m_{123}=m(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$，$N_{123}=|\xi_1+\xi_2+\xi_3|$，假设$N_4\geqslant N_5\geqslant N_6$。分三种情形讨论。

情形1 $N\gg N_4$。

因为$\xi_1'+\xi_4+\xi_5+\xi_6=0$，所以$N_{123}\sim N_4$，$\frac{m(\xi_1')}{m(\xi_4)m(\xi_5)m(\xi_6)}=1$，则$L_2(\eta)=0$，故$I_2$有界。

情形2 $N_4\geqslant N\geqslant N_5$。

由于$\xi_1'+\xi_4+\xi_5+\xi_6=0$，所以$N_{123}\sim N_4$。由中值定理可知

$$|1-m_{123}(m_4m_5m_6)^{-1}|=|(m_4-m_{456})m_4^{-1}|\leqslant N_5N_4^{-1}。$$

利用式(3)可以得到

$$I_2\leqslant\alpha^2\frac{N_5}{N_4}\frac{1}{<N_4>^2<N_5>^2}\cdot \|P_{123}I(\overline{u_{2N_1}}u_{2N_2}\overline{u_{1N_3}})Iu_{1N_6}\|_{L^2_{T_{\text{lwp}}}L^2_x}\times \|I<\nabla>^2u_{2N_4}I<\nabla>^2u_{2N_5}\|_{L^2_{T_{\text{lwp}}}L^2_x}\leqslant \alpha^2\frac{N_5}{N_4}\frac{1}{<N_4>^2<N_5>^2}\cdot \|P_{123}I(\overline{u_{2N_1}}u_{2N_2}\overline{u_{1N_3}})\|_{L^2_{T_{\text{lwp}}}L^2_x}\times \|Iu_{1N_6}\|_{L^\infty_{T_{\text{lwp}}}L^\infty_x}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}。$$

应用Sobolev不等式，则有

$$\|Iu_{1N_6}\|_{L^\infty_{T_{\text{lwp}}}L^\infty_x}\leqslant N_6^2\|Iu_{1N_6}\|_{L^\infty_{T_{\text{lwp}}}L^2_x}\leqslant \|I<\nabla>^2u_1\|_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}。$$

根据式(4)可以得到

$$I_2\leqslant\alpha^2\frac{N_5}{N_4}\frac{1}{<N_4>^2<N_5>^2}\cdot \|P_{123}I(\overline{u_{2N_1}}u_{2N_2}\overline{u_{1N_3}})\|_{L^2_{T_{\text{lwp}}}L^2_x}\times \|Iu_{1N_6}\|_{L^\infty_{T_{\text{lwp}}}L^\infty_x}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\leqslant \alpha^2N^{-3-}\left(\prod_{j=1}^{6}<N_j>\right)^{0-}\|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\cdot \|I<\nabla>^2u_2\|^4_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}。\tag{14}$$

情形3 $N_4\geqslant N_5\geqslant N$。

$|1-m_{123}(m_4m_5m_6)^{-1}|\leqslant m_{123}(m_4m_5m_6)^{-1}$，结合式(3)和式(4)可知

$$I_2\leqslant\alpha^2\frac{m_{123}}{m_4<N_4>^2m_5<N_5>^2}\cdot 2^{3(N_5-N_4)/2}\times\|P_{123}I(\overline{u_{2N_1}}u_{2N_2}\overline{u_{1N_3}})Iu_{1N_6}\|_{L^2_{T_{\text{lwp}}}L^2_x} \|I<\nabla>^2u_2\|^2_{L^2_x}\leqslant\alpha^2N^{-3-}\left(\prod_{j=1}^{6}<N_j>\right)^{0-}\cdot \|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}\cdot \|I<\nabla>^2u_2\|^4_{B^0([0,T_{\text{lwp}}])}。\tag{15}$$

下面估计I_4，分三种情形讨论。

情形1 $N \gg N_4$。

因为$N_{123} \sim N_4$，所以$\dfrac{m(\xi_1')}{m(\xi_4)m(\xi_5)m(\xi_6)}=1$，则$I_4$有界。

情形2 $N_4 \geqslant N \geqslant N_5$。

由于$\xi_1'+\xi_4+\xi_5+\xi_6=0$，所以$N_{123} \sim N_4$，则有

$$|1-m_{123}(m_4m_5m_6)^{-1}|=|(m_4-m_{456})m_4^{-1}| \leqslant N_5N_4^{-1}。$$

根据式(3)可以得到

$$I_4 \leqslant \alpha^2 \frac{N_5}{N_4}\frac{1}{<N_4>^2<N_5>^2}\cdot \|P_{123}I(\overline{u_{1N_1}}u_{1N_2}\overline{u_{2N_3}})\|_{L^2_{T_{lwp}}L^2_x} \times \|Iu_{2N_6}\|_{L^\infty_{T_{lwp}}L^\infty_x}\|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}。$$

结合Sobolev不等式可知

$$\|Iu_{2N_6}\|_{L^\infty_{T_{lwp}}L^\infty_x} \leqslant N_6^2\|Iu_{2N_6}\|_{L^\infty_{T_{lwp}}L^2_x} \leqslant \|I<\nabla>^2u_2\|_{B^0([0,T_{lwp}])}。$$

由此可得

$$I_4 \leqslant \alpha^2N^{-3-}\left(\prod_{j=1}^6<N_j>\right)^{0-}\cdot \|I<\nabla>^2u_1\|^4_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}。\tag{16}$$

情形3 $N_4 \geqslant N_5 \geqslant N$。

$|1-m_{123}(m_4m_5m_6)^{-1}| \leqslant m_{123}(m_4m_5m_6)^{-1}$，结合式(3)和式(4)可以得到

$$I_4 \leqslant \alpha^2N^{-3-}\left(\prod_{j=1}^6<N_j>\right)^{0-}\cdot \|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^4_{B^0([0,T_{lwp}])}。\tag{17}$$

故有

$$I_2+I_4 \leqslant CN^{-3-}(\|I<\nabla>^2u_1\|^4_{B^0([0,T_{lwp}])}\cdot \|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}+ \|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^4_{B^0([0,T_{lwp}])})。\tag{18}$$

利用式(5)、式(13)及式(18)可得

$$I_1+I_2+I_3+I_4 \leqslant CN^{-1-}\cdot (\|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])})+ CN^{-3-}(\|I<\nabla>^2u_1\|^4_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}+ \|I<\nabla>^2u_1\|^2_{B^0([0,T_{lwp}])}\|I<\nabla>^2u_2\|^4_{B^0([0,T_{lwp}])}) \leqslant CN^{-1-}\|I<\nabla>^2u_{10}\|^2_{L^2_x}\|I<\nabla>^2u_{20}\|^2_{L^2_x}+ CN^{-3-}(\|I<\nabla>^2u_{10}\|^4_{L^2_x}\|I<\nabla>^2u_{20}\|^2_{L^2_x}+ \|I<\nabla>^2u_{10}\|^2_{L^2_x}\|I<\nabla>^2u_{20}\|^4_{L^2_x})。$$

因此可以得到问题(1)修正能量的几乎守恒律。引理6证毕。

3 定理1的证明

根据尺度不变性，若(u_1,u_2)是问题(1)的解，则

$$(u_1^{(\lambda)}(x,t),\ u_2^{(\lambda)}(x,t))= (\lambda^{-2}u_1(\lambda^{-1}x,\lambda^{-4}t),\ \lambda^{-2}u_2(\lambda^{-1}x,\lambda^{-4}t))$$

亦为问题(1)的解。对于$\forall\lambda>0$及$1 \leqslant s<2$，当λ充分大时，则有以下估计

$$E(I_Nu_{10}^{(\lambda)},I_Nu_{20}^{(\lambda)})=\int_{R^4}(|\Delta I_Nu_{10}^{(\lambda)}|^2+|\Delta I_Nu_{20}^{(\lambda)}|^2)/2\ \mathrm{d}x+ \alpha\int_{R^4}(|I_Nu_{10}^{(\lambda)}|^2|I_Nu_{20}^{(\lambda)}|^2)/2\,\mathrm{d}x \leqslant N^{4-2s}\lambda^{-2s}(\|u_{10}\|^2_{H^s}+\|u_{20}\|^2_{H^s})+ 2|\alpha|\lambda^{-4}(\|u_{10}\|^4_{L^4}+\|u_{20}\|^4_{L^4}) \leqslant C(N^{4-2s}\lambda^{-2s}+\lambda^{-4})(1+\|u_{10}\|_{H^s}+\|u_{20}\|_{H^s})^4。$$

假定$N \gg 1$，选取尺度变换参数

$$\lambda=\max\{1/N,\ N^{2-s/s}/((2C)^{-1/(2s)})\cdot (1+\|u_{10}\|_{H^s(R^4)}+\|u_{20}\|_{H^s(R^4)})^{2/s}\},\tag{19}$$

使得$E(I_Nu_{10}^{(\lambda)},I_Nu_{20}^{(\lambda)}) \leqslant 1/2$。运用引理6至少$C_2N^{3+}\delta$次，可得

$$E(I_Nu_1^{(\lambda)},I_Nu_2^{(\lambda)})(C_1N^{1+}\delta+C_2N^{3+}\delta)\sim E(I_Nu_1^{(\lambda)},I_Nu_2^{(\lambda)})(C_2N^{3+}\delta)\sim 1。\tag{20}$$

对于$\forall T_0 \gg 1$，利用式(19)得到

$$T_0 \sim C_2\delta N^{3+}/\lambda^4 \sim N^{((7s-8)/s)+}。\tag{21}$$

计算可得

$$E(I_Nu_1^{(\lambda)},I_Nu_2^{(\lambda)})(\lambda^{-4}t)= \int_{R^4}(|\Delta I_Nu_1^{(\lambda)}|^2+|\Delta I_Nu_2^{(\lambda)}|^2)/2\ \mathrm{d}x+ \alpha\int_{R^4}(|I_Nu_1^{(\lambda)}|^2|I_Nu_2^{(\lambda)}|^2)/2\,\mathrm{d}x= \lambda^{-4}\int_{R^4}(|\Delta I_Nu_1|^2+|\Delta I_Nu_2|^2)/2\ \mathrm{d}x+ \alpha\lambda^{-4}\int_{R^4}(|I_Nu_1|^2|I_Nu_2|^2)/2\,\mathrm{d}x= \lambda^{-4}E(I_Nu_1,I_Nu_2)(t)。$$

结合式(19)、式(20)及式(21)可知

$$E(I_Nu_1,I_Nu_2)(T_0)= \lambda^4E(I_Nu_1^{(\lambda)},I_Nu_2^{(\lambda)})(\lambda^{-4}T_0) \leqslant \lambda^4 \leqslant C(1+T_0)^{4((2-s)/(7s-8))-}。$$

结合引理6中给出的修正能量的几乎守恒

律，从而完成了定理1的证明。

参考文献：

[1] BOURGAIN J. Refinements of Strichartz inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity [J]. International Mathematics Research Notices, 1998(5): 253-283.

[2] COLLIANDER J, KEEL M, STAFFILANI G, et al. Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation[J]. Mathematical Research Letters, 2002, 9(5): 659-682.

[3] COLLIANDER J, RAYNOR S, SULEM C, et al. Ground state mass concentration in the L^2-critical nonlinear Schrödinger equation below H^1[J]. Mathematical Research Letters, 2005, 12(3): 357-375.

[4] CAZENAVE T, WEISSLER F B. Some remarks on the nonlinear Schrödinger equation in the critical case [M]. Berlin: Springer, 1989.

[5] GINIBRE J, VELO G. On a class of nonlinear Schrödinger equations I. The Cauchy problem, general case[J]. Journal of Functional Analysis, 1979, 32 (1): 1-32.

[6] DUYCKAERTS T, VAN T P. Profile decomposition and scattering for general nonlinear Schrödinger equations[J]. Journal of Differential Equations, 2024, 410: 113-170.

[7] MIAO C X, XU G X, ZHAO L F. Global well-posedness and scattering for the defocusing energy critical nonlinear Schrödinger equations of fourth order in dimensions $d \geqslant 9$ [J]. Journal of Differential Equations, 2011, 251(12): 3381-3402.

[8] MIAO C X, XU G X, ZHAO L F. Global well-posedness and scattering for the focusing energy-critical nonlinear Schrödinger equations of fourth order in the radial case[J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246(9): 3715-3749.

[9] BEN-ARTZI M, KOCH H, SAUT J C. Dispersion estimates for fourth order Schrödinger equations [J]. Comptes Rendus de L'Academie Des Sciences-Series I-Mathematics, 2000, 330(2): 87-92.

[10] ILAN B, FIBICH G, PAPANICOLAOU G. Self-focusing with fourth order dispersion[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2002, 62 (4): 1437-1462.

[11] ZHU S H, YANG H, ZHANG J. Blow-up of rough solutions to the fourth order nonlinear Schrödinger equation [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2011, 74(17): 6186-6201.

[12] CHEN X H, GUO Z H, SHEN M X, et al. On smoothing estimates for Schrödinger equations on product spaces $T^m \times R^n$[J]. Journal of Functional Analysis, 2024, 286(4): 1-17.

[13] GUO Z H, HUANG C Y, SONG L. Pointwise decay of solutions to the energy critical nonlinear Schrödinger equations[J]. Journal of Differential Equations, 2023, 366: 71-84.

[14] SHEN J, WU Y F. Global well-posedness and scattering of 3D defocusing, cubic Schrödinger equation [J]. Mathematical Research Letters, 2023, 30 (6): 1931-1961.

[15] BAI R B, SHEN J, WU Y F. Large global solutions for the energy critical nonlinear Schrödinger equation [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2023, 55(5): 4193-4218.

[16] SHEN J, SOFFER A, WU Y F. Almost sure well-posedness and scattering of the 3D cubic nonlinear Schrödinger equation [J]. Communications in Mathematical Physics, 2023, 397(2): 547-605.

[17] MERLE F, RAPHAEL P. The blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation [J]. Annals of Mathematics, 2005, 161(1): 157-222.

[18] GUSTAFSON S, INUI T. Scattering and blow-up for threshold even solutions to the nonlinear Schrödinger equation with repulsive delta potential at low frequencies[J]. Journal of Differential Equations, 2024, 412: 758-796.