

文章编号: 1673-3193(2024)03-0296-05

广义齿轮图的PI指数

弓文慧, 邵燕灵

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

摘要: 设 G 是简单连通图, $e = uv$ 是 G 中连接点 u 和点 v 的一条边, 图 G 的PI指数定义为 $PI(G) = [n_{eu}(e|G) + n_{ev}(e|G)]$ 。一个顶点到一条边的距离就是该点与该边的两个端点之间的最小距离。广义齿轮图是通过在圆锥图的圈上的每对相邻顶点之间添加一个顶点而得到的图, 其具有优美的对称性。记广义齿轮图 C^* 的PI指数为 $PI(C^*)$, 本文根据广义齿轮图的性质, 得到了一种计算与一条边的两个端点距离相等的边的方法, 并将其边进行分类, 利用此方法找到对 $PI(C^*)$ 没有贡献的边, 从而计算出广义齿轮图的PI指数, 为研究一些特殊图的PI指数问题提供了线索。

关键词: PI指数; 广义齿轮图; 偶圈; 对称性

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1673-3193.2024.03.006

引用格式: 弓文慧, 邵燕灵. 广义齿轮图的PI指数[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2024, 45(3): 296-300.

GONG Wenhui, SHAO Yanling. PI index of generalized gear graph[J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2024, 45(3): 296-300.

PI Index of Generalized Gear Graph

GONG Wenhui, SHAO Yanling

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: Let G be a simple connected graph, $e = uv$ is an edge of the connecting u and v in G , the PI index is defined as $PI(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} [n_{eu}(e|G) + n_{ev}(e|G)]$. The distance from a vertex to an edge is taken as the minimum distance between the given point and the two endpoints of that edge. The generalized gear graph is a graph obtained from the conical graph with a vertex added between each pair adjacent vertices of the cycles, which has a graceful symmetry. Let $PI(C^*)$ be the PI index of generalized gear graph C^* . In this paper, the symmetry of generalized gear graph was used to obtain a method to calculate the number of edges that is equidistant from two ends of an edge and classifies its edges. By using this method, we found the edges that did not contribute to $PI(C^*)$, and then estimated the PI index of the generalized gear graph, which provided a clue for the study of the PI index of some special graphs.

Key words: PI index; generalized gear graph; even cycle; symmetry

收稿日期: 2023-06-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(61774137); 山西省回国留学人员科研项目(2022-149); 山西省自然科学基金项目(20210302124212)

作者简介: 弓文慧(1996-), 女, 硕士生, 主要从事图论与组合数学研究。

通信作者: 邵燕灵(1963-), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事组合矩阵理论、图论及其在相关学科中的应用。E-mail: ylshao@nuc.edu.cn.

0 引言

图的拓扑指数是一种度量图结构的特征数值,由分子图衍生而来,通过图的顶点和边的数量、距离、度数等性质计算得到。设 G 为简单连通图, $V(G)$ 表示其顶点集, $E(G)$ 表示其边集。用 $e = uv$ 表示 G 中连接点 u 和点 v 的一条边。设 $e = uv$, 用 $n_{eu}(e|G)$ 表示 G 中到点 u 的距离比到点 v 的距离更近的边的数目, $n_{ev}(e|G)$ 表示 G 中到点 v 的距离比到点 u 的距离更近的边的数目。

图 G 的 Padamkar-Ivan 指数(简称为 PI 指数)定义为

$$PI(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} [n_{eu}(e|G) + n_{ev}(e|G)]. \quad (1)$$

图 G 的 PI 指数是 Padamkar V. Khadikar 在 2000 年提出的一个拓扑指数^[1-2], 其中,“P”来自“Padmakar”,“I”来自“Ivan”,因此,PI 指数有时被称为“Padmakar-Ivan 指数”。PI 指数只有在非二部图的分子图中才能产生作用,因为当二部图的基础图结构发生任何变化,PI 指数的值都不改变。尽管 PI 指数只能在特定结构的分子图中发挥作用,但它并没有被抛弃,并继续在当代化学图论中发挥着有限的作用^[3]。PI 指数是一种能够用来反映有机分子特定结构特征的拓扑指数,它对刻画分子图以及建立分子结构与特征之间的关系具有重要作用,同时被广泛应用于预测化合物的物理化学性质及生物活性。Vukićević 等^[4]、Ma 等^[5-6]陆续得到了双圈图和三圈图的 PI 极值, Ma 等^[7]又给出了仙人掌图的加权顶点 PI 指数的上界和下界, Ma 等^[8]还给出了直径为 d 的 (n, m) 图的加权顶点 PI 指数的上界, Kandan 等^[9]得到了计算圆锥图和广义齿轮图的 Mostar 指数的精确公式, Vujosević 等^[10]计算出了仙人掌链图的边 PI 指数和顶点 PI 指数的精确值。

本文将研究一类特殊图的 PI 指数,期望得到其 PI 指数的精确公式。

1 准备工作

设 G 为简单连通图,用 $d(u, e)$ 表示顶点 u 到边 e 的距离。对于 G 中两条边 $e = (u, v)$ 和 e' 定义

$$\delta_{e=(u,v)}^{e'} = \begin{cases} 1, & d(u, e') = d(v, e'), \\ 0, & d(u, e') \neq d(v, e'), \end{cases} \quad (2)$$

则 $\sum_{e \in E} \delta_e^{e'}$ 是 G 中到顶点 u 和 v 距离相等的边数。

定义 1^[11] 设图 G 是一个连通的简单图,对任意的边 $e = uv \in E(G)$, 定义 $n_e(G)$ 为 G 中与点 u 和点 v 距离不相等的边数。

由图 G 的 PI 指数的定义可知, G 中每条边 $e = (u, v)$ 对 $PI(G)$ 的贡献是与其端点 u 和 v 不等距的边的数目^[12], 故由式(1)和式(2)得到

$$PI(G) = \sum_{e \in E(G)} n_e(G) = \sum_{e \in E(G)} \left(|E(G)| - \sum_{e' \in E(G)} \delta_e^{e'} \right). \quad (3)$$

定义 2^[13] 给定两个图 G 和 H , 它们的笛卡尔积 $G \square H$ 是顶点集为 $V(G) \times V(H)$ 的图, 其中两个顶点 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 相邻当且仅当 $u_1 = u_2$ 且 $v_1 v_2 \in E(H)$, 或 $v_1 = v_2$ 且 $u_1 u_2 \in E(G)$ 。

定义 3^[14] 圆锥图是通过一个中心点 O 与圈图 C_k 和路图 P_l 的笛卡尔积图的第一层相连接而得到的图, 其中 $l \geq 1, k \geq 2$ 。

定义 4^[15] 对于 $l \geq 1, k \geq 2$, 广义齿轮图 $C^*(l, 2k)$ 是通过在圆锥图的圈上每相邻两个顶点之间添加一个顶点而得到的图。记广义齿轮图的轮心为 u_0 , 在第 i 层圈上添加的点依次记为 $u_{i,2}, u_{i,3}, \dots, u_{i,k-1,k}, u_{i,k,1} (i = 1, \dots, l)$, 则 $C^*(l, 2k)$ 的顶点集可记为 $V(C^*) = \{u_0, u_i^j, u_{i,i+1}^j | i = 1, 2, \dots, k(\text{mod } k), j = 1, 2, \dots, l\}$, 如图 1 所示。

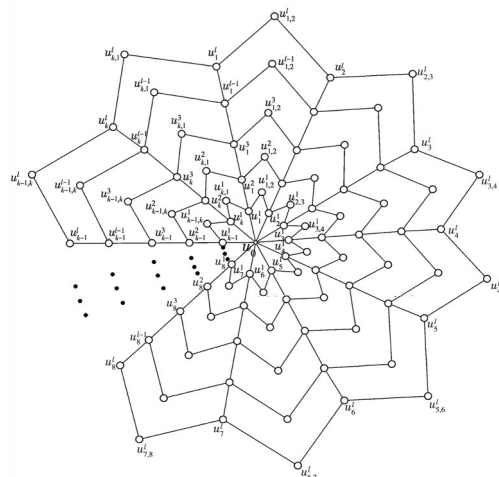


图 1 轮心为 u_0 的广义齿轮图 C^*

Fig. 1 The generalized gear graph C^* with the center u_0

定义 5^[16] 长为 k 的圈称为 k 圈, 按 k 是奇数还是偶数, 称 k 圈是奇圈或偶圈。

2 主要结果

引理 1 设 G 是广义齿轮图, $e = (u, v) \in E(G)$

是G中的任意一条边,若在图G中能找一条到e的两个端点u和v距离相等的边e',则在包含e'(不包含e)的新的偶圈中必有到边e的两个端点u和v距离相等的边。

证明 如图1所示,设 $e = u_0 u_k^1$,容易验证边 $u_{k-1}^1 u_{k-1,k}^1$ 和边 $u_1^1 u_{k,1}^1$ 到e的两个端点 u_0 和 u_k^1 的距离相等,记偶圈 C_1 的顶点集 $V(C_1) = \{u_{k-1}^1, u_{k-1,k}^1, u_k^1, u_k^2, u_{k-1,k}^2, u_{k-1}^2\}$,偶圈 C_2 的顶点集 $V(C_2) = \{u_1^1, u_{k,1}^1, u_{k,1}^2, u_k^2, u_{k,1}^2, u_1^2\}$,容易验证边 $u_{k-1}^2 u_{k-1,k}^2$ 和边 $u_1^2 u_{k,1}^2$ 到e的两个端点距离相等,依次按照这种规律做下去,可以找到 $2l$ 条这样的边。证毕。

定理1 设 $l \geq 1, k \geq 2, C^*(l, 2k)$ 为如图1所示的广义齿轮图,则

$$PI(C^*) = \begin{cases} 18, & l=1, k=2, \\ 3k(3k-3), & l=1, k>2, \\ 22l^2 - 38l - 6, & l>1, k=2, \\ 3k^2l^2 - 7k^2l - 8kl + k^2 - 11k, & l>1, k>2. \end{cases}$$

证明 考虑以下4种情形。

情形1 当 $l=1, k=2$ 时,广义齿轮图的顶点集 $V(C^*) = \{u_0, u_1, u_{1,2}, u_2, u_{2,1}\}$,边集 $E(C^*) = \{u_0 u_1, u_0 u_2, u_1 u_{1,2}, u_1 u_{2,1}, u_2 u_{1,2}, u_2 u_{2,1}\}$,容易验证其顶点数为5,边数为6。

先设 $e = u_0 u_1$,从图中可以发现 $\delta_{e=(u_0, u_1)}^e = 3$,则 $n_e = 6 - 3 = 3$,由图的对称性可知 $n_{u_0 u_2} = 3$ 。

再设 $e = u_1 u_{1,2}$,从图中可以发现 $\delta_{e=(u_1, u_{1,2})}^e = 3$,则 $n_e = 3$,由图的对称性可知, $n_{u_1 u_{2,1}} = n_{u_2 u_{1,2}} = n_{u_2 u_{2,1}} = n_e = 3$ 。

综上所述, $PI(C^*) = 18$ 。

情形2 当 $l=1, k>2$ 时,广义齿轮图的顶点集 $V(C^*) = \{u_0, u_i, u_i u_{i+1} | i=1, 2, \dots, k(\text{mod } k)\}$,边集 $E(C^*) = \{u_0 u_i, u_i u_{i+1}, u_{i+1} u_{i+1} | i=1, 2, \dots, k(\text{mod } k)\}$,容易验证其顶点数为 $2k+1$,边数为 $3k$ 。记 $E_1(C^*) = \{u_0 u_i | i=1, 2, \dots, k\}$, $E_2(C^*) = \{u_i u_{i+1} | i=1, 2, \dots, k(\text{mod } k)\}$, $E_3(C^*) = \{u_i u_{i+1} | i=1, 2, \dots, k(\text{mod } k)\}$,并设 $PI_i(C^*) = \sum_{e \in E_i(C^*)} n_e(C^*) =$

$$\sum_{e \in E_i(C^*)} \left(|E(C^*)| - \sum_{e' \in E(C^*)} \delta_{e'}^e \right), \text{其中 } i=1, 2, 3.$$

先设 $e = u_0 u_1 \in E_1(C^*)$,易证 $\delta_{e=(u_0, u_1)}^e = 3$,则 $n_e = 3k - 3$,易知 $|E_1(C^*)| = k$,由式(3)可得

$$PI_1(C^*) = k(3k - 3).$$

再设 $e = u_1 u_{1,2} \in E_2(C^*)$,易证 $\delta_{e=(u_1, u_{1,2})}^e = 3$,则 $n_e = 3k - 3$,易知 $|E_2(C^*)| = k$,由式(3)可得 $PI_2 = k(3k - 3)$ 。

最后,设 $e = u_{1,2} u_2 \in E_3(C^*)$,易证 $\delta_{e=(u_{1,2}, u_2)}^e = 3$,则 $n_e = 3k - 3$,易知 $|E_3(C^*)| = k$,由式(3)可得 $PI_3 = k(3k - 3)$ 。

综上所述,

$$PI(C^*) = PI_1(C^*) + PI_2(C^*) + PI_3(C^*) = 3k(3k - 3).$$

情形3 当 $l>1, k=2$ 时,广义齿轮图的顶点集 $V(C^*) = \{u_0, u_i^j, u_{i,i+1}^j | i=1, 2(\text{mod } 2), j=1, 2, \dots, l\}$,边集 $E(C^*) = \{u_0 u_i^j, u_i^j u_{i,i+1}^j, u_{i,i+1}^j u_{i+1}^j | i=1, 2(\text{mod } 2), j=1, 2, \dots, l\}$ 。容易验证其顶点数为 $2k+1$,边数为 $6l$ 。下面将其边分类进行讨论:

1) 设 $e = u_0 u_i^j (i=1, 2)$,易证 $\sum_{e' \in E(C^*)} \delta_{e=(u_0, u_i^j)}^{e'} = 2l+1$,则 $n_e = 2(6l - 2l - 1) = 8l - 2$;

2) 设 $e = u_{i,i+1}^j u_{i+1}^j (i=1, 2)$,易证 $\sum_{e' \in E(C^*)} \delta_{e=(u_{i,i+1}^j, u_{i+1}^j)}^{e'} = 2$,则 $n_e = 2(6l - 2) = 12l - 4$;

3) 设 $e = u_i^j u_{i+1}^j (i=1, 2 \text{ 且 } j=1, 2, \dots, l-1)$,易证 $\sum_{e' \in E(C^*)} \delta_{e=(u_i^j, u_{i+1}^j)}^{e'} = 2$,则 $n_e = (l-2)(6l-2) = 6l^2 - 14l + 4$;

4) 设 $e = u_i^1 u_{i,i+1}^1$ 或者 $e = u_{i,i+1}^1 u_{i+1}^1$,其中 $i=1, 2(\text{mod } 2)$,易证 $\sum_{e' \in E(C^*)} \delta_{e=(u_i^1, u_{i,i+1}^1)}^{e'} = l+2$,则 $n_e = 4 \times [6l - l - 2] = 20l - 8$;

5) 设 $e = u_i^j u_{i,i+1}^j$ 或者 $e = u_{i,i+1}^j u_{i+1}^j$,其中, $i=1, 2(\text{mod } 2)$ 且 $j=2, 3, \dots, l-1$,易证 $\sum_{e' \in E(C^*)} \delta_{e=(u_i^j, u_{i,i+1}^j)}^{e'} 2(l-1) + 1 + 1 + 1 = 2l+1$,则 $n_e = 4(l-2)[6l - (2l+1)] = 16l^2 - 36l + 8$;

6) 设 $e = u_i^l u_{i,i+1}^l$ 或者 $e = u_{i,i+1}^l u_{i+1}^l$,其中 $i=1, 2(\text{mod } 2)$,易证 $\sum_{e' \in E(C^*)} \delta_{e=(u_i^l, u_{i,i+1}^l)}^{e'} 2(l-1) + 1 + 1 = 2l+1$,则 $n_e = 4 \times [6l - (2l+1)] = 6l - 4$ 。

综上所述,

$$PI(C^*) = 8l - 2 + 12l - 4 + 6l^2 - 14l + 4 + 20l - 8 + 16l^2 - 36l + 8 + 16l - 4 = 22l^2 - 38l - 6.$$

情形4 当 $l>1, k>2$ 时,广义齿轮图 C^* 的顶点集 $V(C^*) = \{u_0, u_i^j, u_{i,i+1}^j | i=1, 2, \dots, k \text{ 且 } j=1, 2, \dots, l\}$,边集 $E(C^*) = \{u_0 u_i^1, u_i^j u_{i+1}^j, u_i^j u_{i,i+1}^j,$

$u_{i,i+1}^j u_{i+1}^j | i=1, 2, \dots, k$ 且 $j=1, 2, \dots, l \pmod{l}$ 。容易验证其顶点数为 $2kl+1$, 边数为 $3n$ 。

$$E_1(C^*) = \{u_0 u_1^1, u_0 u_2^1, \dots, u_0 u_k^1\},$$

$$E_2(C^*) = \{u_1^{l-1} u_1^1, u_2^{l-1} u_2^1, \dots, u_k^{l-1} u_k^1\},$$

$$E_3(C^*) = \{u_1^1 u_{1,2}^1, u_{1,2}^1 u_2^1, \dots, u_k^1 u_{k,1}^1, u_{k,1}^1 u_1^1\},$$

$$E_4(C^*) = \{u_1^1 u_{1,2}^1, u_{1,2}^1 u_2^1, \dots, u_{k-1,k}^1 u_k^1, u_k^1 u_{k,1}^1, u_{k,1}^1 u_1^1\},$$

$$E_5(C^*) = \{u_1^1 u_{1,2}^1, u_k^1 u_{k,1}^1, u_{k,1}^1 u_j^1 | j=2, 3, \dots, l-1\},$$

$$E_6(C^*) = \{u_1^1 u_{i+1}^1, u_2^1 u_{i+1}^1, \dots, u_k^1 u_{i+1}^1 | j=1, 2, \dots, l-2\}$$

并设

$$PI_i(C^*) = \sum_{e \in E_i(C^*)} n_e(C^*) =$$

$$\sum_{e \in E_i(C^*)} \left(|E(C^*)| - \sum_{e' \in E(C^*)} \delta_{e'}^{e'} \right),$$

其中, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 。

1) $e \in E_1(C^*)$ 。设 $e = u_0 u_1^1$, 易证 $\sum_{e' \in E_1(C^*)} \delta_{e'}^{e'} = 2l+1$, 则 $n_e = 3kl - 2l - 1$, 由图

的对称性可以推广到当 $e = u_0 u_i^1 (i=1, 2, \dots, k)$ 时, 由式(3)可得 $PI_1(C^*) = \sum_{e \in E_1(C^*)} n_e = k(3kl -$

$$2l - 1) = 3k^2 l - 2kl - k。$$

2) $e \in E_2(C^*)$ 。设 $e = u_2^{l-1} u_2^1$, 易证 $\delta_{e'}^{e'} = k-1+1=k$, 则 $n_e = 3kl - k$, 由图的对称性可以推广到当 $e = u_i^{l-1} u_i^1 (i=1, 2, \dots, k)$ 时, 由式(3)可得 $PI_2(C^*) = \sum_{e \in E_2(C^*)} n_e = k[3kl - k] = 3k^2 l - k^2。$

3) 记 $E_3(C^*) = E_3^a(C^*) \cup E_3^b(C^*)$, 其中, $E_3^a(C^*) = \{u_1^1 u_{1,2}^1, u_{1,2}^1 u_2^1, \dots, u_k^1 u_{k,1}^1\}$ 且 $E_3^b(C^*) = \{u_{1,2}^1 u_2^1, u_{2,3}^1 u_3^1, \dots, u_{k,1}^1 u_1^1\}$ 。

先设 $e = u_3^1 u_{3,4}^1$, 易证 $\delta_{e'}^{e'} = l-1+1=l$, 则 $n_e = 3kl - l$, 由图的对称性可以推广到当 $e = u_i^1 u_{i,i+1}^1 \in E_3^a(C^*) (i=1, 2, \dots, k \pmod{k})$ 时, 由式(3)可得 $\sum_{e \in E_3^a(C^*)} n_e = k(3kl - l) = 3k^2 l - kl。$

再设 $e = u_{3,4}^1 u_4^1$, 易证 $\delta_{e'}^{e'} = l-1+1=l$, 则 $n_e = 3kl - l$, 由图的对称性可以推广到 $e = u_{i,i+1}^1 u_{i+1}^1 \in E_3^b(C^*) (i=1, 2, \dots, k \pmod{k})$ 时, 由式(3)可得 $\sum_{e \in E_3^b(C^*)} n_e = k(3kl - l) = 3k^2 l - kl。$

故

$$PI_3(C^*) = \sum_{e \in E_3(C^*)} n_e = \sum_{e \in E_3^a(C^*)} n_e + \sum_{e \in E_3^b(C^*)} n_e = 6k^2 l - 2kl。$$

4) 记 $E_4(C^*) = E_4^a(C^*) \cup E_4^b(C^*)$, 其中, $E_4^a(C^*) = \{u_1^1 u_{1,2}^1, u_2^1 u_{2,3}^1, \dots, u_k^1 u_{k,1}^1\}$ 且 $E_4^b(C^*) = \{u_{1,2}^1 u_2^1, u_{2,3}^1 u_3^1, \dots, u_{k,1}^1 u_1^1\}$ 。

设 $e = u_i^1 u_{i,i+1}^1$ 或者 $e = u_{i,i+1}^1 u_{i+1}^1 (i=1, 2, \dots, k \pmod{k})$, 易证 $\delta_{e'}^{e'} = l+2$, 利用3)的方法可知, $PI_4(C^*) = \sum_{e \in E_4(C^*)} n_e = 2k[3kl - (l+1) - 1] = 6k^2 l - 2kl - 4k。$

5) 记 $E_5(C^*) = E_5^a(C^*) \cup E_5^b(C^*)$, 其中, $E_5^a(C^*) = \{u_1^1 u_{1,2}^1, u_2^1 u_{2,3}^1, \dots, u_k^1 u_{k,1}^1 | j=2, 3, \dots, l-1\}$ 且 $E_5^b(C^*) = \{u_{1,2}^1 u_2^1, u_{2,3}^1 u_3^1, \dots, u_{k,1}^1 u_1^1 | j=2, 3, \dots, l-1\}$ 。

设 $e = u_i^1 u_{i,i+1}^1$ 或者 $e = u_{i,i+1}^1 u_{i+1}^1 (i=1, 2, \dots, k \pmod{k}, j=2, 3, \dots, l-1)$, 易证 $\delta_{e'}^{e'} = l+1$, 利用3)的方法可知, $PI_5(C^*) = \sum_{e \in E_5(C^*)} n_e = 2k[3kl - l - 1] = 6k^2 l - 2kl - 2k。$

6) $e \in E_6(C^*)$ 。设 $e = u_5^6 u_5^7$, 易证 $\delta_{e'}^{e'} = k-1+1=k$, 则 $n_e = 3kl - (k-1) - 1 = 3kl - k$, 由图的对称性推广到当 $e = u_i^j u_{i+1}^{j+1} (i=1, 2, \dots, k \pmod{k}, j=1, 2, \dots, l-2)$ 时, $PI_6(C^*) = \sum_{e \in E_6(C^*)} n_e = (l-2)k(3kl - k) = 3k^2 l^2 - 7k^2 l + 2k^2。$

综上所述,

$$PI(C^*) = \sum_{i=1}^6 \sum_{e \in E_i(C^*)} n_e(C^*) =$$

$$\sum_{e \in E_i(C^*)} \left(|E(C^*)| - \sum_{e' \in E(C^*)} \delta_{e'}^{e'} \right) =$$

$$3k^2 l - 2kl - k + 3k^2 l - k^2 + 6k^2 l - 2kl + 6k^2 l - 2kl - 2k + 3k^2 l^2 - 7k^2 l + 2k^2 = 3k^2 l^2 - 7k^2 l - 8kl + k^2 - 11k。$$

证毕。

参考文献:

[1] KHADIKAR P V. On a novel structural descriptor PI [J]. National Academy Science Letters, 2000, 23(7/8): 113-118.

[2] KHADIKAR P V, KARMARKAR S, AGRAWAL V K. A novel PI index and its applications to QSPR/QSAR studies [J]. Journal of Chemical Information and Computer Sciences, 2001, 41(4): 934-949.

[3] INDULAL G, ALEX L, GUTMAN I. On graphs preserving PI index upon edge removal [J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2021, 59(7): 1603-1609.

[4] VUKIĆEVIĆ Ž K, STEVANOVIĆ D. Bicyclic

- graphs with extremal values of PI index [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2013, 161(3): 395-403.
- [5] MA G, BIAN Q J, JI S J, et al. Tricyclic graphs with maximum PI index [J]. *Ars Combinatoria*, 2021, 155: 157-168.
- [6] MA G, WANG J F. Disproving a conjecture on PI-index of graphs [J]. *Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 2022, 88(1): 199-203.
- [7] MA G, BIAN Q J, WANG J F. Bounds on the weighted vertex PI index of cacti graphs [J]. *Filomat*, 2019, 33(18): 5977-5989.
- [8] MA G, BIAN Q J, WANG J F. The weighted vertex PI index of (n, m) -graphs with given diameter [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 354: 329-337.
- [9] KANDAN P, SUBRAMANIAN S. Mostar index of conical and generalized gear graph [J]. *Communications in Combinatorics, Cryptography & Computer Science*, 2021, 2021(2): 163-171.
- [10] VUJOŠEVIĆ S. Computation of edge PI index, vertex PI index and szeged index of some cactus chains [J]. *Mathematica Montisnigri*, 2022, 54: 14-24.
- [11] HAO J X. The PI index of gated amalgam [J]. *Ars Combinatoria*, 2009, 91: 135-145.
- [12] MA G, BIAN Q J, JI S J, et al. Tricyclic graphs with minimum values of PI index [J]. *Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 2016, 76: 43-60.
- [13] CHARMAINE S, JOSEPH G. The game chromatic number of some families of Cartesian product graphs [J]. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 2009, 6(2): 315-327.
- [14] AYACHE A, ALAMERI A, GHALLAB A, et al. Wiener polynomial and Wiener index of conical graphs [J]. *Sylwan*, 2020, 11(3): 107-116.
- [15] KANDAN P, SUBRAMANIAN S. Weighted PI and szeged indices of generalized gear graph [J]. *International Journal of Natural Sciences*, 2022, 72(13): 41816-41823.
- [16] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. New York: American Elsevier Publishing Co., 1976.