文章编号：1673-3193(2024)06-0791-07

具有间接信号项扩散的捕食者-食饵模型解的整体有界性

王梦琴，吴赛楠
(南京邮电大学 理学院，江苏 南京 210023)

摘　要：在空间捕食的活动中，除了捕食者和食饵的随机运动外，还存在着趋化现象。依据生物对化学信号的靠近和远离，可将趋化分为吸引趋化和排斥趋化。本文以捕食者-食饵系统和趋化现象为背景，将食饵分为未受伤食饵和受伤食饵，考虑了一个带有间接信号项扩散的捕食-食饵趋化模型，该模型描述了受伤食饵排出的化学信号物质间接促进了捕食者和未受伤食饵运动的现象，在捕食的过程中，捕食者被受伤的食饵排出的化学信号物质所吸引，而受伤的食饵排出的化学信号物质排斥着未受伤的食饵。通过半群理论以及Moser迭代的方法证明了系统在Neumann边界条件下的有界区域上解的全局存在性和一致有界性。该结果适用于任意趋化敏感系数下的空间维数$n\leqslant 3$的系统。

关键词：捕食者-食饵模型；趋化模型；间接信号；全局有界性
中图分类号：O141　　**文献标识码**：A　　**doi:** 10.3969/j.issn.1673-3193.2024.06.008
引用格式：王梦琴，吴赛楠．具有间接信号项扩散的捕食者-食饵模型解的整体有界性[J]．中北大学学报(自然科学版)，2024，45(6)：791-797.
WANG Mengqin，WU Sainan. Global boundedness of a diffusive predator-prey model with indirect signal production[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition)，2024，45(6)：791-797.

Global Boundedness of a Diffusive Predator-Prey Model with Indirect Signal Production

WANG Mengqin，WU Sainan
(School of Science，Nanjing University of Posts and Telecommunications，Nanjing 210023，China)

Abstract：In spatial predator-prey models，in addition to the random diffusion of predator and prey，there is also chemotaxis phenomenon. The cell movement is directed towards the increasing chemical signal concentration，which is called the attractive chemotaxis. And another type chemotaxis model is called repulsive chemotaxis，which indicates that cells move away from the increasing signal concentration. Based on the predator-prey system and chemotaxis system，we considered a diffusive predator-prey model with indirect signal production，where the prey was divided into the uninjured prey and injured prey. This model showed the predator-prey behavior involving the advection effect induced by the chemical signals released by the injured prey，in which the predator was attracted to the chemical excreted by injured prey during the capturing，and which repelled the uninjured prey. The global existence and boundedness of solutions

收稿日期：2023-04-01
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11901310)
作者简介：王梦琴(1998－)，女，硕士生，主要从事非线性偏微分方程及其应用的研究。
通信作者：吴赛楠(1988－)，女，副教授，博士，主要从事偏微分方程及动力系统的研究。E-mail：wusn@njupt.edu.cn。

of the system on bounded domains with no-flux boundary condition of Neumann is proved by using the semigroup arguments and Moser-Alikakos iteration, when the arbitrary spatial dimension holds $n\leqslant 3$ and chemotaxis sensitivity coefficients are arbitrary.

Key words: predator-prey model; chemotaxis model; indirect signal; global boundedness

0 引言

捕食者-食饵的相互作用是一个复杂生态系统的基本组成模块之一，已经在各种形式和背景下被广泛研究。带扩散项的捕食者-食饵系统描述了捕食者和食饵的随机扩散和相互作用。同时，在空间捕食的互动中，除了捕食者和食饵的随机扩散，捕食者会朝着食饵密度较高的区域运动，而食饵则远离捕食者密度较高的区域，这里的运动是定向的，这个现象被称为食饵趋化和捕食者趋化。随着研究的深入，一些学者也发现，捕食者或食饵释放的化学信号物质，如特定气味、排泄物等也会间接影响捕食者和食饵的运动，被称作间接食饵趋化和间接捕食者趋化，或被称作间接信号趋化。

本文考虑带有间接信号项扩散的Rosenzweig-MacArthur捕食者-食饵模型

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla w) + a\dfrac{Euv}{b+v} - cu, & x\in\Omega,\ t>0, \\ v_t = \Delta v + \xi\nabla\cdot(v\nabla w) + Bv\left(1-\dfrac{v}{N}\right) - \dfrac{Euv}{b+v}, & x\in\Omega,\ t>0, \\ w_t = \Delta w + \alpha z - \beta w, & x\in\Omega,\ t>0, \\ z_t = rv - \delta z, & x\in\Omega,\ t>0, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial n} = \dfrac{\partial w(x,t)}{\partial n} = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), w(x,0)=w_0(x), z(x,0)=z_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

式中：u为捕食者的密度；v，z分别为未受伤和受伤食饵的密度；w为受伤食饵所释放的化学信号物质；Ω为一个带着光滑边界$\partial\Omega$的$R^n(n\leqslant 3)$上的有界区域；边界条件为齐次Neumann边界条件；d为扩散系数；B，N分别为食饵的增长率和环境容纳量；c为捕食者的死亡率；E是内部的捕食率；b为半饱和常数；正参数$a, \alpha, \beta, r, \delta$分别为捕食者的转换率、化学信号物质的生产率和衰减率、受伤食饵的转换率和死亡率；趋化项$-\chi\nabla\cdot(u\nabla w)$和$\xi\nabla\cdot(v\nabla w)$表示了捕食者与食饵、食饵与食饵之间的相互运动；以上参数均为正。

系统(1)描述了分布在有界区域Ω上捕食者和食饵之间的相互作用。在捕获过程中，受伤的食饵排出的化学信号物质吸引着捕食者，而这种化学物质又会排斥未受伤的食饵。受带有趋化项捕食者-食饵系统的启发，本文研究了带有间接趋化项的系统(1)。

1987年，Kareiva等[1]首次在捕食者-食饵模型中加入了食饵趋化项，以此来描述实验中受区域限制的瓢虫和蚜虫相互互动而产生的聚集现象，模型为

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla v) + c\phi(u,v) - g(u), & x\in\Omega,\ t>0, \\ v_t = \Delta v + \xi\nabla\cdot(v\nabla u) + f(v) - \phi(u,v), & x\in\Omega,\ t>0。 \end{cases} \tag{2}$$

近年来，学者们在此基础上进行深入研究。Ainseba等[2]研究了$\chi>0$，$\xi=0$时系统(2)的全局弱解的存在性。Tao[3]获得了空间维数$n\leqslant 3$的全局解的存在性。Lee等[4]对系统(2)的斑图的形成进行了研究，结果表明食饵趋化项更有利于系统的稳定。Wu等[5]证明了在趋化敏感系数足够小、任意空间维度下的全局解存在性和有界性。Jin等[6]证明了在二维空间中的有界区域上全局解的存在性以及稳态解的全局吸引性。Wu等[7]研究了$\chi=0$，$\xi>0$时系统在任意的空间维数n以及任意趋化敏感系数ξ下的全局有界解的存在性，并且还证明了正稳态解的稳定性和食饵趋化更不利于斑图的形成。Wang等[8]讨论了$\chi>0$，$\xi>0$时由趋化所产生的斑图。

2016年，Tello等[9]提出了带有间接食饵趋化项的捕食者-食饵模型，用来描述捕食者朝着由食饵释放化学信号物质浓度高的方向运动。带有间接趋化项的捕食者-食饵模型为

$$\begin{cases} u_t = d_1\Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla m) + g(u,v), & x\in\Omega, t>0,\\ v_t = d_2\Delta v + \xi\nabla\cdot(v\nabla w) + f(u,v), & x\in\Omega, t>0,\\ \tau_1 w_t = \tau_2(d_3\Delta w + \beta u - \gamma w), & x\in\Omega, t>0,\\ \tau_3 m_t = \tau_4(d_4\Delta m + \delta v - \rho m), & x\in\Omega, t>0。\end{cases} \quad (3)$$

Wang 等[10]研究了 $\chi>0,\xi=0,\tau_1=\tau_2=0,\tau_3=\tau_4=1$时有关解的全局存在性和有界性，并获得了此模型的全局稳定性。Ahn 等[11]研究了$\chi=0,\xi>0,\tau_1=\tau_2=1,\tau_3=\tau_4=0$时带有间接捕食者趋化项的模型，描述了食饵的运动受捕食者释放的化学信号的影响。此外，Li 等[12]讨论了$\chi>0,\xi>0,\tau_1=\tau_3=0,\tau_2=\tau_4=1$时带有间接追捕-躲避的捕食-食饵趋化系统，证明了解的全局有界性和稳态解的渐近稳定性。这类具有间接趋化项的捕食者-食饵系统已经被广泛研究，更多相关工作可参考文献[13-15]。

模型(1)使用$-\chi\nabla\cdot(u\nabla w)$和$\xi\nabla\cdot(v\nabla w)$描述了受伤食饵分泌的化学信号物质间接吸引捕食者并排斥未受伤的食饵的现象。本文将利用L^∞估计法和半群理论来研究空间维数$n\leqslant 3$和任意趋化敏感系数χ，ξ下系统(1)解的全局有界性，结果如下：

定理1 设Ω是光滑边界$\partial\Omega$的$R^n(n\leqslant 3)$上的有界区域，对于任何$(u_0,v_0,w_0,z_0)\in(C^0(\overline{\Omega})\times C^0(\bar{\Omega})\times W^{1,\infty}(\overline{\Omega})\times W^{1,\infty}(\overline{\Omega}))$，且$x\in\overline{\Omega}$，$u_0(x)\geqslant 0$，$v_0(x)\geqslant 0$，$w_0(x)\geqslant 0$，$z_0(x)\geqslant 0$，则系统(1)在$\Omega\times(0,\infty)$上有唯一全局古典解$(u,v,w,z)\in(C^0(\overline{\Omega}\times[0,\infty))\cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,\infty)))^4$。

本文只考虑了包含Holling-II型功能反应的Rosenzweig-MacArthur捕食者-食饵模型。但是，获得的结果适用于一般的捕食者-食饵模型，即未受伤的食饵的增长率函数可以是logistic函数或Allee效应函数；捕食者死亡率函数可以是线性的或二次的；捕食者的功能性反应函数可以表现为Holling-I型、Holling-II型、Holling-III型和lvlev型[5]。本文中，$\|\cdot\|_p$表示$L^p(\Omega)$范数，$1\leqslant p\leqslant\infty$；$\|\cdot\|_{m,p}$表示$W^{m,p}(\Omega)$范数，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$m=1,2$；$c_i$，$A_i$为正常数。

1 局部存在性

首先给出系统(1)解的局部存在性的证明。

引理1 设Ω是带有光滑边界$\partial\Omega$的$R^n(n\leqslant 3)$的有界区域，非负初值$(u_0,v_0,w_0,z_0)\in(C^0(\overline{\Omega})\times C^0(\overline{\Omega})\times W^{1,\infty}(\overline{\Omega})\times W^{1,\infty}(\overline{\Omega}))$，则存在一个正常数$T_{\max}$(最大存在时间)，对于所有的$t\in(0,T_{\max})$，使得系统(1)存在唯一的非负古典解$(u,v,w,z)\in(C^0(\overline{\Omega})\times[0,T_{\max}))\cap C^{2.1}(\overline{\Omega}\times(0,T_{\max})))^4$。此外，如果$T_{\max}<\infty$，那么

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty+\|v(\cdot,t)\|_\infty+\|w(\cdot,t)\|_\infty+\|z(\cdot,t)\|_\infty\to\infty,\ t\to T_{\max}。\quad (4)$$

证明 利用压缩映射原理和最大值原理可以得到局部存在性的结果。具体证明可以参看文献[16]。

引理2与齐次Neumann边界条件下的扩散半群[17]有关。

引理2 设$m\in\{0,1\}$，$p\in[1,\infty]$和$q\in(1,\infty)$，则存在正常数c_1使得对于任何$u\in D((-\Delta+\beta)^\theta)$，$\theta\in(0,1)$，有

$$\|u\|_{m,p}\leqslant c_1\|(-\Delta+\beta)^\theta u\|_q, \quad (5)$$

其中，$m-\frac{n}{p}<2\theta-\frac{n}{q}$。

如果除此之外$q\geqslant p$，则存在$c_2>0$和$\rho>0$使得对于任何$u\in L^p(\Omega)$，有

$$\|(-\Delta+\beta)^\theta e^{-t(-\Delta+\beta)}u\|_q\leqslant c_2 t^{-\theta-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}e^{-\rho t}\|u\|_p, \quad (6)$$

式中：扩散半群$\{e^{-t(-\Delta+\beta)}\}_{t\geqslant 0}$将$L^p(\Omega)$映射到$D((-\Delta+\beta)^\theta)$。此外，对于任何$p\in(1,\infty)$和$\varepsilon>0$，存在$c_3>0$和$\rho>0$使得对于所有的$u\in L^p(\Omega)$，有

$$\|(-\Delta+\beta)^\theta e^{t\Delta}\nabla\cdot u\|_p\leqslant c_3 t^{-\theta-\frac{1}{2}-\varepsilon}e^{-\rho t}\|u\|_p。\quad (7)$$

引理3[18] 设$\phi\in W^{1,2}(\Omega)$，对于任意的$\alpha>0$，则存在一个常数$c_4>0$满足

$$\|\phi\|_2^2\leqslant\alpha\|\nabla\phi\|_2^2+c_4(1+\alpha^{-\frac{n}{2}})\|\phi\|_1^2, \quad (8)$$

式中：c_4只依赖于n和Ω。

引理4[19] 设$T>0$，$c_5>0$，$c_6>0$和$\tau\in(0,T)$，函数$y:[0,T)\to[0,\infty)$是绝对连续的，满足

$$y'(t)+c_5 y(t)\leqslant c(t),\ \text{a.e. } t\in(0,\mathrm{T}), \quad (9)$$

其中，$c\in L^1_{loc}([0,T))$是非负函数且对于所有$t\in[0,T-\tau)$，$\int_t^{t+\tau}c(s)\mathrm{d}s\leqslant c_6$成立，则对于所有$t\in(0,T)$，有

$$y(t)\leqslant\max\left\{y(0)+c_6,\ \frac{c_6}{c_5\tau}+2c_6\right\}。\quad (10)$$

2 全局存在性和有界性

本节研究系统(1)解的全局存在性和有界性。参考文献[20]，首先建立u,v,w,z的L^1有界。

引理5 设(u,v,w,z)是系统(1)的解，则存在正常数$A_i(i=0,1,2,3,4)$，使得对于所有$t\in(0,T_{\max})$，有

$$\|u(\cdot,t)\|_1\leqslant A_0,\|v(\cdot,t)\|_1\leqslant A_1, \tag{11}$$

$$\|w(\cdot,t)\|_1\leqslant A_2,\|z(\cdot,t)\|_1\leqslant A_3。 \tag{12}$$

对于所有$t\in(0,T_{\max}-\tau)$，有

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega v^2\leqslant A_4, \tag{13}$$

式中：$\tau=\min\left\{1,\ \frac{1}{2}T_{\max}\right\}$。

证明 将系统(1)的前两个方程在Ω上积分并求和，获得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega u+a\int_\Omega v\right)&=a\int_\Omega Bv\left(1-\frac{v}{N}\right)-\int_\Omega cu\leqslant\\ aB\int_\Omega v-c\int_\Omega u&=-c\left(\int_\Omega u+a\int_\Omega v\right)+\\ a(B+c)\int_\Omega v。\end{aligned} \tag{14}$$

将系统(1)的第2个方程在Ω上积分，并且用Hölder不等式获得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega v\right)&\leqslant\int_\Omega Bv\left(1-\frac{v}{N}\right)=\int_\Omega\left(Bv-\frac{B}{N}v^2\right)\leqslant\\ &\int_\Omega Bv-\frac{B}{|\Omega|N}\left(\int_\Omega v\right)^2。\end{aligned} \tag{15}$$

可以得到

$$\int_\Omega v\leqslant A_1, \tag{16}$$

式中：$A_1=\max\left\{\|v_0\|_\infty,\ N|\Omega|\right\}>0$。将式(16)代入式(14)可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u<\int_\Omega u+a\int_\Omega v\leqslant\\ &\max\left\{\frac{(B+c)a}{c}A_1,\ \int_\Omega(u_0+av_0)\right\}=A_0。\end{aligned} \tag{17}$$

将系统(1)的第4个方程在Ω上积分，结合式(16)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega z=-\delta\int_\Omega z+r\int_\Omega v。 \tag{18}$$

则

$$\|z(\cdot,t)\|_1\leqslant A_3, \tag{19}$$

式中：$A_3=\max\left\{\|z_0\|_\infty,\ \frac{rA_1}{\delta}\right\}$。

利用系统(1)的第3个方程和式(19)可得$\|w(\cdot,\ t)\|_1\leqslant A_2$，其中，$A_2=\max\left\{\|w_0\|_\infty,\ \frac{\alpha A_3}{\beta}\right\}$。

对式(15)积分，对于所有$t\in(0,\ T_{\max}-\tau)$可得

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega v^2\leqslant A_1\tau+\frac{A_1N}{B}=A_4。 \tag{20}$$

下面将得到$\|z(\cdot,\ t)\|_2$和$\|\nabla w(\cdot,\ t)\|_k$的有界性，这是证明定理1关键的一步。

引理6 设$(u,\ v,\ w,\ z)$是系统(1)的解，则对于任意$p>2$，$k\in\left(1,\ \frac{2n}{(n-2)_+}\right)$，存在正常数$A_5$和$A_6$，使得对于所有$t\in(0,\ T_{\max})$，有

$$\|z(\cdot,t)\|_2\leqslant A_5,\|\nabla w(\cdot,t)\|_k\leqslant A_6。 \tag{21}$$

证明 将系统(1)中的第4个方程乘以z，并在Ω上对其进行积分，利用Young不等式可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega z^2=\int_\Omega z(rv-\delta z)=\int_\Omega rzv-\delta\int_\Omega z^2\leqslant\\ &\frac{\delta}{2}\int_\Omega z^2+\frac{r^2}{2\delta}\int_\Omega v^2-\delta\int_\Omega z^2=-\frac{\delta}{2}\int_\Omega z^2+\frac{r^2}{2\delta}\int_\Omega v^2。\end{aligned} \tag{22}$$

设 $y(t)=\int_\Omega z^2(\cdot,t)$，$t\in(0,T_{\max})$ 和 $c(t)=\frac{r^2}{\delta}\int_\Omega v^2(\cdot,t),t\in(0,T_{\max})$,则对于所有$t\in(0,T_{\max})$，可得

$$y'(t)+c_5y(t)\leqslant c(t)。 \tag{23}$$

从引理5可以看出，对于任意的$t\in(0,\ T_{\max}-\tau)$，有

$$\int_t^{t+\tau}c(s)\mathrm{d}s\leqslant A_7, \tag{24}$$

式中：$A_7>0$。

结合式(24)和引理4，可以得到

$$\|z(\cdot,t)\|_2\leqslant A_5。 \tag{25}$$

由式(25)和文献[17]中的定理4.1可以得到，对于$k\in\left(1,\ \frac{2n}{(n-2)_+}\right)$，获得$\|\nabla w(\cdot,\ t)\|_k$是有界的，这里$t\in(0,\ T_{\max})$。

下面利用半群理论[17]来获得v的L^∞有界。

引理7 设(u,v,w,z)是系统(1)的解，则存在正常数$A_8>0$，使得对所有的$t\in(0,T_{\max})$，有

$$\|v(\cdot,t)\|_\infty\leqslant A_8。 \tag{26}$$

证明 首先固定$T\in(0,T_{\max})$，并对$t\in(0,T)$使

用常数变易公式，由于$\frac{Euv}{b+v}\geqslant 0$，可得

$$v(\cdot,t)\leqslant \mathrm{e}^{(t-t_0)\Delta}v_0+\xi\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v(\cdot,s)\nabla w(\cdot,s))\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}Bv(\cdot,s)\left(1-\frac{v(\cdot,s)}{N}\right)\mathrm{d}s=V_1+V_2+V_3,\tag{27}$$

式中：$t_0=(t-1)_+$。下面证明每个V_1，V_2和V_3是L^∞有界。

对于V_1,如果$t_0=(0,1]$,由最大值原理，可得

$$\|V_1(\cdot,t)\|_\infty\leqslant\|v_0\|_\infty。\tag{28}$$

如果$t\in(1,\infty)$,根据引理2和引理5可知，存在常数$A_9>0$使得

$$\|V_1(\cdot,\ t)\|_\infty\leqslant A_9(t-t_0)^{-\frac{n}{2}}\|v(\cdot,\ t_0)\|_1=A_9\|v(\cdot,t_0)\|_1\leqslant A_9A_1。\tag{29}$$

对于V_2，由于$n\leqslant 3$，在引理2中，当$m=0$，$n<q<k$，$n<k<\frac{2n}{(n-2)_+}$和$p=\infty$，选择$\theta\in\left(\frac{n}{2q},\ \frac{1}{2}\right)$。在这个条件下，当$\varepsilon\in(0,\ \frac{1}{2}-\theta)$，存在正常数$A_{10}$，使得

$$\|V_2(\cdot,t)\|_\infty\leqslant c_1\|(-\Delta+1)^\theta V_2(\cdot,t)\|_q\leqslant \varepsilon c_1c_3\int_{t_0}^{t}\|(-\Delta+1)^\theta\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v(\cdot,s)\nabla w(\cdot,s))\|_q\mathrm{d}s\leqslant A_{10}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\theta-\frac{1}{2}-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}\|(v(\cdot,s)\nabla w(\cdot,s))\|_q\mathrm{d}s。\tag{30}$$

通过引理5，引理6和Hölder不等式，可得

$$\|v(\cdot,t)\nabla w(\cdot,t)\|_q\leqslant\|v(\cdot,t)\|_{\frac{qk}{k-q}}\|\nabla w(\cdot,t)\|_k\leqslant \|v(\cdot,t)\|_\infty^i\|v(\cdot,t)\|_1^{1-i}\|\nabla w(\cdot,t)\|_k\leqslant A_6A_0^{1-i}\|v(\cdot,t)\|_\infty^i,\tag{31}$$

式中：$i=\frac{(k+1)q-k}{qk}\in(0,\ 1)$。

将式(31)代入式(30)可得，对于所有$t\in(0,T)$，有

$$\|V_2(\cdot,\ t)\|_\infty\leqslant A_{10}A_6A_0^{1-i}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\theta-\frac{1}{2}-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}\|v(\cdot,\ s)\|_\infty^i\mathrm{d}s\leqslant A_{10}A_6A_0^{1-i}\left(\int_0^1\sigma^{-\theta-\frac{1}{2}-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\rho\sigma}\mathrm{d}\sigma\right)\sup_{t\in(0,\ T)}\|v(\cdot,\ t)\|_\infty^i\leqslant A_{11}\sup_{t\in(0,T)}\|v(\cdot,t)\|_\infty^i,\tag{32}$$

式中：$A_{11}=A_{10}A_6A_0^{1-i}\int_0^1\sigma^{-\theta-\frac{1}{2}-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\rho\sigma}\mathrm{d}\sigma$。

最后，由$g(v)=Bv\left(1-\frac{v}{N}\right)\leqslant\frac{BN}{4}$可得

$$V_3(\cdot,t)\leqslant\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\frac{BN}{4}\mathrm{d}s=(t-t_0)\frac{BN}{4}\leqslant\frac{BN}{4}。\tag{33}$$

结合式(27)，(29)，(32)和(33)可得，存在一个正常数A_{12}，对于所有$T\in(0,\ T_{\max})$，有

$$\sup_{t\in(0,T)}\|v(\cdot,t)\|_\infty\leqslant A_{12}+A_{12}(\sup_{t\in(o,T)}\|v(\cdot,t)\|_\infty)^i。\tag{34}$$

式中：$i\in(0,1)$。因此，$v(\cdot,t)$在$\Omega\times(0,T_{\max})$是有界的。

下面将通过半群理论[5]和著名的Moser-Alikakos迭代来获得u在L^∞上的有界。

引理8 设(u,v,w,z)是系统(1)的解，则存在正常数A_{13}使得

对于所有的$t\in(0,T_{\max})$, 有

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty\leqslant A_{13}。\tag{35}$$

证明 由于$v(\cdot,t)$在$\Omega\times(0,T_{\max})$是有界的，借助系统(1)的第3个和第4个方程，很容易得到w的L^∞有界和z的L^∞有界。

令$\tau\in(0,T_{\max})$且满足$\tau<1$，在引理1中选择$m=1$，$p=\infty$，$q=n+2$，并结合常数变易公式，则对于所有$t\in(\tau,T_{\max})$, 有

$$\|w(\cdot,\ t)\|_{1,\ \infty}\leqslant c_1\|(-\Delta+\beta)^\theta w(\cdot,\ t)\|_q\leqslant c_1\int_0^t(t-s)^{-\theta}\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}\|z(\cdot,\ s)\|_q\mathrm{d}s+c_1t^{-\theta}\mathrm{e}^{-\rho t}\|w_0\|_q\leqslant c_1\int_0^t(t-s)^{-\theta}\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}\|z(\cdot,s)\|_\infty\mathrm{d}s+c_1t^{-\theta}\mathrm{e}^{-\rho t}\|w_0\|_q\leqslant c_1t^{-\theta}+c_1\int_0^t(t-s)^{-\theta}\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}\mathrm{d}s\leqslant c_1t^{-\theta}+c_1\int_0^\infty\sigma^{-\theta}\mathrm{e}^{-\rho\sigma}\mathrm{d}\sigma\leqslant c_1(\tau^{-\theta}+1)=A_{14},\tag{36}$$

式中：c_1在不同的行表示不同的常数，且$\rho>0$。

对于任意$k\geqslant 2$，由式(1)，式(36)和Young不等式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^k=k\int_\Omega u^{k-1}u_t\leqslant$$

$$kd\int_\Omega u^{k-1}\Delta u-k\chi\int_\Omega u^{k-1}\nabla\cdot(u\nabla w)+$$
$$ka\int_\Omega u^{k-1}\frac{Euv}{b+v}=-k(k-1)\int_\Omega u^{k-2}|\nabla u|^2+$$
$$kaE\int_\Omega u^k\frac{v}{b+v}+k(k-1)\chi\int_\Omega u^{k-1}\nabla u\cdot\nabla w=$$
$$-k(k-1)\int_\Omega\left\{u^{\frac{k}{2}-1}\frac{2}{k}u^{1-\frac{k}{2}}\left|\nabla u^{\frac{k}{2}}\right|\right\}^2+$$
$$kaE\int_\Omega u^k\frac{v}{b+v}+k(k-1)\chi\int_\Omega u^{k-1}\nabla u\cdot\nabla w\leqslant$$
$$\frac{-4(k-1)}{k}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{k}{2}}\right|^2+kaE\int_\Omega u^k+$$
$$A_{14}k(k-1)\chi\int_\Omega u^{k-1}|\nabla u|\leqslant$$
$$\frac{-4(k-1)}{k}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{k}{2}}\right|^2+kaE\int_\Omega u^k+$$
$$A_{14}(k-1)\chi\left(\frac{2}{A_{14}\chi k}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{k}{2}}\right|^2+\frac{A_{14}\chi k}{2}\int_\Omega u^k\right)\leqslant$$
$$\frac{-2(k-1)}{k}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{k}{2}}\right|^2+$$
$$\left(\frac{{A_{14}}^2\chi^2k(k-1)}{2}+kaE\right)\int_\Omega u^k。\tag{37}$$

整理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^k+k(k-1)\int_\Omega u^k\leqslant$$
$$\frac{-2(k-1)}{k}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{k}{2}}\right|^2+A_{15}k(k-1)\int_\Omega u^k,\tag{38}$$

式中：$A_{15}=\frac{{A_{14}}^2\chi^2}{2}+\frac{aE}{k-1}+1$。由引理3和引理5可得

$$A_{15}k(k-1)\int_\Omega u^k\leqslant\frac{2(k-1)}{k}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{k}{2}}\right|^2+$$
$$A_{16}k(k-1)(1+k^n)\left(\int_\Omega u^{\frac{k}{2}}\right)^2。\tag{39}$$

式中：$A_{16}=A_{15}\max\left\{1,\left(\frac{A_{15}}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$。将式(39)代入式(38)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^k+k(k-1)\int_\Omega u^k\leqslant$$
$$A_{16}k(k-1)(1+k^n)\left(\int_\Omega u^{\frac{k}{2}}\right)^2\leqslant$$
$$A_{16}k(k-1)(1+k)^n\left(\int_\Omega u^{\frac{k}{2}}\right)^2。\tag{40}$$

对式(40)在时间区间[0，t]上积分，其中$t\in(0,T_{\max})$，可得

$$\int_\Omega u^k\leqslant\int_\Omega {u_0}^k+A_{16}(1+k)^n\sup_{0\leqslant t\leqslant T_{\max}}\left(\int_\Omega u^{\frac{k}{2}}\right)^2,\tag{41}$$

$$I(k)=\max\left\{\|u_0\|_\infty,\sup_{0\leqslant t\leqslant T_{\max}}\left(\int_\Omega u^k\right)^{\frac{1}{k}}\right\}。\tag{42}$$

并且结合

$$I(k)\leqslant(A_{17}(1+k)^n)^{\frac{1}{k}}I\left(\frac{k}{2}\right),\tag{43}$$

式中：$A_{17}=|\Omega|+A_{16}>0$。对于式(43)，使$k=2^p$，$p=1$，2，…，可以得出

$$I(2^p)\leqslant {A_{17}}^{2^{-p}}(1+2^p)^{2^{-p}n}I(2^{p-1})\leqslant\cdots\leqslant$$
$${A_{17}}^{2^{-p}+\cdots+2^{-1}}(1+2^p)^{2^{-p}n}\cdots(1+2)^{2^{-1}n}I(1)\leqslant\cdots\leqslant$$
$$A_{17}2^{3n}I(1),\tag{44}$$

式中：$p\to+\infty$。

因此，根据式(11)，(42)和(44)可得

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty\leqslant A_{17}2^{3n}I(1)\leqslant$$
$$A_{17}2^{3n}\max\{A_0,\|u_0\|_\infty\}=A_{13}。\tag{45}$$

至此，完成了引理8的证明。

最后来证明定理1。

证明 由引理1及引理8中的爆破准则，可得定理1的结论。

3 结 论

本文研究了带有间接信号项的扩散的Rosenzweig-MacArthur捕食者-食饵趋化模型。证明了Neumann边界条件下系统在有界区域上其解是全局一致有界的。该结果适用于空间维数$n\leqslant3$以及任意的趋化敏感系数下的系统，且得到的结果对于一般的捕食-食饵趋化模型也同样适用，即未受伤的食饵的增长率函数可以是logistic函数或Allee效应函数，捕食者死亡率函数可以是线性的或二次的，捕食者的功能性反应函数可以为Holling-I型、Holling-II型、Holling-III型和lvlev型。

参考文献：

[1] KAREIVA P，ODELL G T. Swarms of predators exhibit “prey taxis” if individual predators use area-restricted search[J]. The American Naturalist，1987，130（2）：233-270.

[2] AINSEBA B E，BENDAHMANE M，NOUSSAIR A. A reaction-diffusion system modeling predator-prey with prey-taxis[J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2008，9(5)：2086-2105.

[3] TAO Y S. Global existence of classical solutions to a predator-prey model with nonlinear prey-taxis [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2010，11(3)：2056-2064.

[4] LEE J M，HILLEN T，LEWIS M A. Pattern formation in prey-taxis systems [J]. Journal of Biological Dynamics，2009，3(6)：551-573.

[5] WU S N，SHI J P，WU B Y. Global existence of solutions and uniform persistence of a diffusive predator-prey model with prey-taxis[J]. Journal of Differential Equations，2016，260(7)：5847-5874.

[6] JIN H Y，WANG Z A. Global stability of prey-taxis systems[J]. Journal of Differential Equations，2017，262(3)：1257-1290.

[7] WU S N，WANG J F，SHI J P. Dynamics and pattern formation of a diffusive predator-prey model with predator-taxis[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences，2018，28(11)：2275-2312.

[8] WANG J F，WU S N，SHI J P. Pattern formation in diffusive predator-prey systems with predator-taxis and prey-taxis [J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B，2021，26(3)：1273-1289.

[9] TELLO J I，WRZOSEK D. Predator-prey model with diffusion and indirect prey-taxis[J]. Math. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences，2016，26(11)：2129-2162.

[10] WANG J P，WANG M X. The dynamics of a predator-prey model with diffusion and indirect prey-taxis[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations，2020，32 (3)：1291-1310.

[11] AHN I，YOON C. Global solvability of prey - predator models with indirect predator-taxis[J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik，2021，72：1-20.

[12] LI G L，Tao Y S，WINKLER M. Large time behavior in a predator-prey system with indirect pursuit-evasion interaction [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B，2020，25(11)：4383-4396.

[13] AMORIM P，TELCH B，VILLADA L M. A reaction-diffusion predator-prey model with pursuit，evasion，and nonlocal sensing[J]. Mathematical Biosciences and Engineering，2019，16(5)：5114-5145.

[14] GOUDON T，URRUTIA L. Analysis of kinetic and macroscopic models of pursuit-evasion dynamics[J]. Communications in Mathematical Sciences，2016，14 (8)：2253-2286.

[15] TELCH B. Global boundedness in a chemotaxis quasilinear parabolic predator-prey system with pursuit-evasion[J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2021，59：103269.

[16] WINKLER M. Absence of collapse in a parabolic chemotaxis system with signal-dependent sensitivity[J]. Mathematische Nachrichten，2010，283(11)：1664-1673.

[17] HORSTMANN D，WINKLER M. Boundedness vs. blow-up in a chemotaxis system[J]. Journal of Differential Equations，2005，215(1)：52-107.

[18] WINKLER M，DJIE K C. Boundedness and finite-time collapse in a chemotaxis system with volume-filling effect[J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2010，72(2)：1044-1064.

[19] STINNER C，TELLO J I，WINKLER M. Competitive exclusion in a two-species chemotaxis model[J]. Journal of Mathematical Biology，2014，68 (7)：1607-1626.

[20] HU B，TAO Y. To the exclusion of blow-up in a three-dimensional chemotaxis-growth model with indirect attractant production [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences，2016，26 (11)：2111-2128.