

文章编号: 1673-3193(2024)06-0798-16

## 两种群趋化-排斥竞争模型中的全局动力学

潘飞, 李燕

(南京邮电大学理学院, 江苏南京 210023)

**摘要:** 本文研究了二维光滑有界区域中两种群趋化排斥竞争模型的 Neumann 初边值问题, 相比已有研究工作, 本文考虑了带有更一般形式的信号产生函数。首先, 利用经典的  $L^p$  估计和抛物方程相关正则性理论证明了当初值具有一定正则性时, 任意大于零的排斥系数问题存在全局有界的古典解, 即  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \|w\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}, \|z\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$  都小于等于一个常数; 其次, 通过构造 Lyapunov 泛函, 研究了不同参数条件下常数平衡态  $(u^*, v^*, w^*, z^*)$  在  $L^\infty$  范数意义下的全局渐近稳定性, 即  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \|w\|_{L^\infty(\Omega)}, \|z\|_{L^\infty(\Omega)}$  都趋向于一个定值; 最后, 对具有不同信号产生函数的模型的非零边界常数稳态进行了线性稳定性分析及数值模拟。仿真结果表明, 在趋化-排斥竞争系统中不同的信号产生函数和排斥系数可以导致常数平衡态周围产生各种复杂的时空斑图。

**关键词:** 两种群; 趋化-排斥; 竞争; 全局动力学; Lyapunov 泛函

**中图分类号:** O141

**文献标识码:** A

**doi:** 10.3969/j.issn.1673-3193.2024.06.009

**引用格式:** 潘飞, 李燕. 两种群趋化-排斥竞争模型中的全局动力学[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2024, 45(6): 798-813.

PAN Fei, LI Yan. Global dynamics in chemotaxis-exclusion competition models of two-species[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2024, 45(6): 798-813.

## Global Dynamics in Chemotaxis-Exclusion Competition Models of Two-Species

PAN Fei, LI Yan

(School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** The Neumann initial edge value problem of two group chemotaxis exclusion competition models in two-dimensional smooth bounded regions was studied, and compared with the existing research work, we considered the signal generation function with a more general form. First, we obtained a globally bounded classical solution for any exclusion coefficient problem greater than zero with initial values of certain regularity through classical  $L^p$  estimation and parabolic equation related regularity theory, that is,  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \|w\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}, \|z\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$  were less than or equal to a constant. Second, the global asymptotic stability of the constant equilibrium state  $(u^*, v^*, w^*, z^*)$  under different parameter conditions in the norm sense of the  $L^\infty$  was studied by building Lyapunov functionals, that is,  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \|w\|_{L^\infty(\Omega)}, \|z\|_{L^\infty(\Omega)}$  all tended to be a fixed value. Finally, we performed linear stability analysis of the non-zero boundary constant steady state of the model with different signal generation functions, and performed numerical simulation. The results show that different signal generation functions, different repulsion coefficients in chemotaxis-competitive systems can lead to various

**收稿日期:** 2023-06-27

**基金项目:** 国家自然科学基金青年基金资助项目(11701290); 江苏省自然科学基金青年基金资助项目(BK20170896); 江苏省自然科学研究面上项目(21KJB110031, 17KJB110012)

**作者简介:** 潘飞(1998-), 男, 硕士生, 主要从事偏微分方程及其应用的研究。

**通信作者:** 李燕(1987-), 女, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程及其应用的研究。E-mail: yanli@njupt.edu.cn。

complex space-time spots around the constant equilibrium state.

**Key words:** two-species; chemotaxis-repulsion; competition; global dynamics; Lyapunov functionals

### 0 引言

生物趋化性描述了细胞沿细胞产生的化学信号的浓度梯度方向的定向运动。经典的生物趋化模型由 Keller 等<sup>[1]</sup>提出, 并得到了广泛研究<sup>[2-8]</sup>。

$$\begin{cases}
u_t = d_1 \Delta u - \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) + \xi_1 \nabla \cdot (u \nabla z) + \mu_1 u (a_1 - a_2 u - a_3 v), & x \in \Omega, t > 0, \\
v_t = d_2 \Delta v - \chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w) + \xi_2 \nabla \cdot (v \nabla z) + \mu_2 v (b_1 - b_2 v - b_3 u), & x \in \Omega, t > 0, \\
w_t = d_3 \Delta w - w + f_1(u) + f_2(v), & x \in \Omega, t > 0, \\
z_t = d_4 \Delta z - z + f_3(u) + f_4(v), & x \in \Omega, t > 0, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\
u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), w(x, 0) = w_0(x), z(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega, t > 0,
\end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\Omega$  为二维空间中有界光滑区域;  $d_1, d_2, d_3, d_4, \chi_1, \chi_2, \xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2$  和  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  是正常数;  $u$  和  $v$  分别为两个种群的密度;  $w$  和  $z$  为两种不同化学信号的密度, 由  $u, v$  共同产生;  $d_1$  和  $d_2$  分别代表  $u$  和  $v$  的扩散;  $-\chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w), -\chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w)$  为  $u, v$  的吸引趋化项, 系数为  $\chi_1, \chi_2$ ;  $\xi_1 \nabla \cdot (u \nabla z), \xi_2 \nabla \cdot (v \nabla z)$  分别为  $u, v$  的排斥趋化项, 系数为  $\xi_1, \xi_2$ ;  $f_1(u), f_2(v), f_3(u), f_4(v)$  代表信号  $w$  和  $z$  的产生机制;  $\nu$  是  $\partial\Omega$  的外法向量。该模型描述了两个物种被不同的化学物质吸引与排斥的演变<sup>[13-14]</sup>。更具体地说, 除了  $u$  和  $v$  之间的竞争之外, 物种  $u$  或  $v$  还允许化学物质  $w$  的趋化运动并且远离化学物质  $z$ , 两种化学物质由物种  $u$  和  $v$  共同产生。这种相互作用已在文献<sup>[15]</sup>中提出, 并且在巨噬细胞与肿瘤的相互作用中被发现<sup>[16]</sup>。

关于两物种模型的研究可以简化为具有随机种群扩散的模型

$$\begin{cases}
u_t = \Delta u - \nabla \cdot (\chi_1(v) u \nabla v) + \mu_1 u (1 - u - a_2 w), \\
v_t = \Delta v - v + f_1(w), \\
w_t = \Delta w - \nabla \cdot (\chi_2(z) w \nabla z) + \mu_2 w (1 - w - b_2 u), \\
z_t = \Delta z - z + f_2(u).
\end{cases} \quad (2)$$

当  $\chi_1(v) = \chi_1 > 0, \chi_2(z) = \chi_2 > 0, \mu_1 = \mu_2 = 0, f_i(s) = s (i = 1, 2)$  时, Li 等<sup>[17]</sup>得出初值较小时式(2)在二维空间中存在一个全局有界古典解; 当  $\chi_1(v) = \chi_1 > 0, \chi_2(z) = \chi_2 > 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, f_i(s) = s (i = 1, 2)$  时, Black<sup>[18]</sup>得出式(2)在二维空间中存在一个全局有界解, 且常数稳态的渐近稳定

理论上, 在有限的时间内解的爆破是细胞聚集体自发形成的, 但在许多生物趋化过程中, 细胞经常与排斥和吸引的信号化学物质相互作用而产生了各种有趣的生物模式<sup>[9-12]</sup>。本文主要考虑全抛物双物种吸引与排斥趋化的系统

性依赖于  $\mu_1/\chi_1^2, \mu_2/\chi_2^2$  的取值; 当  $\chi_1(v) = \chi_1 > 0, \chi_2(z) = \chi_2 > 0, f_i(s) = s (i = 1, 2), 0 < f'(s) < L$  时, Qiu 等<sup>[19]</sup>研究了当空间维数  $n \geq 1$  时,  $L$  对式(2)解的全局存在性和长时间行为的影响; Wang 等<sup>[20]</sup>研究了在二维空间中, 当  $|\chi'_i| (i = 1, 2)$  有界时, 式(2)有一个全局有界古典解, 当  $n \leq 3$  时, 对于较大的  $\mu_i (i = 1, 2)$ , 式(2)有一个全局有界古典解, 此外, 还证明了当  $0 < a_2, b_2 < 1$  且  $\mu_i (i = 1, 2)$  足够大时, 式(2)的解收敛到常数稳态; 当  $0 < a_2 < 1 < b_2$  且  $\mu_2$  足够大时, 会发生竞争排斥; Gao 等<sup>[14]</sup>研究了二维空间中信号产生机制  $f_i$  对解的全局有界性和长时间行为的影响。

更多关于两种群趋化系统的研究可以参考文献<sup>[21-26]</sup>。Hu 等<sup>[25]</sup>研究了具有自由边界的双物种 Keller-Seger 竞争系统也有古典解的存在。Zheng 等<sup>[26]</sup>研究了两种竞争反应-扩散-趋化性系统的行波解问题, 研究表明在波速足够大的情况下存在行波解; 反之, 当波速很小时没有行波解。

基于已有工作, 对式(1)做以下假设:

H<sub>1</sub>)  $f_i(s)$  满足  $f_i(0) = 0, f_i(s) \geq 0$  对所有  $s > 0, f_i(s) \in C^1([0, +\infty))$  和  $|f'_i(s)| \leq l_i$ , 其中,  $l_i = \sup_{s \geq 0} |f'_i(s)| < +\infty (i = 1, 2, 3, 4)$ 。

基于文献<sup>[19-20]</sup>, 给出信号产生函数  $f_i$  的一些典型形式

$$f_i(s) = k_1 s, f_i(s) = \frac{k_2 s}{k_3 + k_4 s},$$

$$f_i(s) = \frac{k_5 s}{k_6 + k_7 s^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

式中:  $k_1, k_2, \dots, k_7$  都是正常数。第1种和第2种形式的  $f_i$  代表单调递增信号的产生, 这意味着信号的密度随着相应的生产者的增加而增加, 而第3种形式的  $f_i$  代表非单调情况, 这意味着虽然单调递增产生过程可以在低生产密度下发生, 但进一步增加种群密度将降低其产生信号的能力。

Liu等<sup>[27]</sup>最先提出了两物种吸引-排斥竞争效应, 并研究了其解的全局存在和有界古典解。Wang等<sup>[28]</sup>研究了当  $f_i(s) = k_1 s$  时, 系统具有全局有界经典解。在此基础上, Wang等<sup>[29]</sup>又证明了在合适的参数条件下, 式(1)在任意维度上都拥有唯一的全局经典有界解。基于已有两物种吸引-排斥竞争效应<sup>[30]</sup>研究的信号产生函数  $f_i$  都是线性函数, 而本文将考虑非线性函数信号产生函数, 并研究解的全局有界性和长时间行为(定理1和定理2), 此外, 本文考虑了式(1)中一些特殊信号产生函数  $f_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的时空模式(定理3), 并进行了数值模拟。相比已有研究工作, 本文丰富了信号产生函数的形式, 对双物种吸引-排斥趋化竞争模型有了更深入的研究。

关于式(1)的非负解的全局存在性和有界性, 有以下定理:

**定理1** 令  $n = 2$ , 并且  $d_1, d_2, d_3, d_4, \chi_1, \chi_2, \xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2$  和  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  是任意的正常

$$\Gamma_2 = \frac{\chi_1^2 u^*}{4d_1 d_3} + \frac{\mu_1 a_3 \chi_2^2 v^*}{4\mu_2 b_3 d_2 d_3} < \frac{4b_2 a_3 a_2 \mu_1 - 4b_3 a_3^2 \mu_1}{b_3 a_2 l_2^2 + b_2 a_3 l_1^2 - 2b_3 a_3 l_1 l_2} = \Gamma_1,$$

$$\Theta_2 = \frac{\Gamma_2 \mu_2 b_3 (\xi_2^2 v^* d_1 d_3 \mu_1 a_3 + d_2 d_3 \xi_1^2 u^*)}{4\Gamma_2 \mu_2 b_3 d_1 d_2 d_3 d_4 - (\mu_2 b_3 \chi_1^2 u^* d_2 d_4 + \mu_1 a_3 d_1 d_4 \chi_2^2 v^*)} <$$

$$\frac{\Gamma_1 (2a_3 b_3 l_1 l_2 - b_2 a_3 l_1^2 - a_2 b_3 l_2^2) + (4a_2 a_3 b_2 \mu_1 - 4a_3^2 b_3 \mu_1)}{a_2 b_3 l_4^2 + b_2 a_3 l_3^2 - 2l_3 l_4 a_3 b_3} = \Theta_{10}.$$

$$H_3) \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_3}{a_2} < \frac{b_2}{a_3} \text{ 和}$$

$$\Gamma_4 = \frac{\mu_2 b_3 \chi_1^2 u_1^*}{4\mu_1 a_3 d_1 d_3} < \frac{4a_2 b_3 b_2 \mu_2 - 4a_3 b_3^2 \mu_2}{a_3 b_2 l_1^2 + a_2 b_3 l_2^2 - 2a_3 b_3 l_1 l_2} = \Gamma_3,$$

$$\Theta_4 = \frac{\Gamma_4 \mu_2 b_3 \xi_1^2 u_1^* d_3}{4\Gamma_4 \mu_1 a_3 d_1 d_3 d_4 - b_3 \mu_2 \chi_1^2 u_1^* d_4} < \frac{\Gamma_3 (a_3 b_2 l_1^2 + a_2 b_3 l_2^2 - 2a_3 b_3 l_1 l_2) - (4a_2 b_3 b_2 \mu_2 - 4b_3^2 a_3 \mu_2)}{2l_3 l_4 a_3 b_3 - a_3 b_2 l_3^2 - a_2 b_3 l_4^2} = \Theta_{30}.$$

$$H_4) \frac{b_3}{a_2} < \frac{b_2}{a_3} < \frac{b_1}{a_1} \text{ 和}$$

$$\Gamma_6 = \frac{\mu_1 a_3 \chi_2^2 v_2^*}{4\mu_2 b_3 d_2 d_3} < \frac{4b_2 a_3 a_2 \mu_1 - 4b_3 a_3^2 \mu_1}{b_3 a_2 l_2^2 + b_2 a_3 l_1^2 - 2a_3 b_3 l_1 l_2} = \Gamma_5,$$

$$\Theta_6 = \frac{\Gamma_6 \mu_1 a_3 \xi_2^2 v_2^* d_3}{4\Gamma_6 \mu_2 b_3 d_2 d_3 d_4 - a_3 \mu_1 \chi_2^2 v_2^* d_4} < \frac{\Gamma_5 (b_3 a_2 l_2^2 + b_2 a_3 l_1^2 - 2b_3 a_3 l_1 l_2) - (4a_2 a_3 b_2 \mu_1 - 4a_3^2 b_3 \mu_1)}{2l_3 l_4 a_3 b_3 - b_3 a_2 l_4^2 - b_2 a_3 l_3^2} = \Theta_{50}.$$

数。假设  $H_1$ ) 成立, 对每个非负初值  $(u_0, v_0, w_0, z_0) \in [W^{(1, \infty)}]^4 > 0$ , 则式(1)有唯一全局解

$$(u, v, w, z) \in [C^0(\bar{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty)) \cap L_{Loc}^\infty([0, \infty); W^{1, \infty}(\Omega))]^4,$$

满足

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\bar{w}(\cdot, t)\|_{W^{1, \infty}(\Omega)} + \|z(\cdot, t)\|_{W^{1, \infty}(\Omega)} \leq C, t > 0, \quad (3)$$

式中:  $C > 0$  是与时间  $t$  无关的常数。

基于假设  $H_1$ ) 来研究式(1)解的长时间行为, 不难看出, 式(1)有3个常数平衡态

$$e_0 = (0, 0, 0, 0), \quad e_1 = (u_1^*, 0, w_1^*, z_1^*), \\ e_2 = (0, v_2^*, w_2^*, z_2^*),$$

式中:  $u_1^* = \frac{a_1}{a_2}, w_1^* = f_1(u_1^*), z_1^* = f_3(u_1^*)$  和  $v_2^* = \frac{b_1}{b_2}, w_2^* = f_2(v_2^*), z_2^* = f_4(v_2^*)$ 。若  $\frac{b_3}{a_2} < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_3}$  (弱竞争情况即种内竞争强于种间竞争) 或  $\frac{b_2}{a_3} < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_3}{a_2}$  (强竞争情况即种间竞争强于种内竞争), 可以得

到唯一的共存稳态  $e_3 = (u^*, v^*, w^*, z^*)$ , 其中,

$$u^* = \frac{a_3 b_1 - b_2 a_1}{a_3 b_3 - a_2 b_2}, \quad v^* = \frac{b_3 a_1 - a_2 b_1}{b_3 a_3 - a_2 b_2}, \\ w^* = f_1(u^*) + f_2(v^*), \quad z^* = f_3(u^*) + f_4(v^*).$$

基于假设

$$H_2) \frac{b_3}{a_2} < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_3} \text{ 和}$$

关于式(1)的长时间行为, 有如下定理:

**定理 2** 在定理 1 和假设  $H_1$ ) 成立的条件下, 设  $(u, v, w, z)$  为式(1)的全局古典解。

1) 若假设  $H_2$ ) 成立, 当  $t \rightarrow \infty$  时,

$$\|u(\cdot, t) - u^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t) - v^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\omega(\cdot, t) - \omega^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z(\cdot, t) - z^*\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0.$$

2) 若假设  $H_3$ ) 成立, 当  $t \rightarrow \infty$  时,

$$\|u(\cdot, t) - u_1^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t) - v_1^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\omega(\cdot, t) - \omega_1^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z(\cdot, t) - z_1^*\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0.$$

3) 若假设  $H_4$ ) 成立, 当  $t \rightarrow \infty$  时,

$$\|u(\cdot, t) - u_2^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t) - v_2^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\omega(\cdot, t) - \omega_2^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z(\cdot, t) - z_2^*\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0.$$

最后进行线性稳定性分析以获得式(1)的常数稳态的特性:  $e_0$  总是不稳定的; 如果  $\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_3}{a_2}$ ,  $e_1$  局部渐近稳定, 如果  $\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_3}$ ,  $e_2$  是局部渐近稳定的。在强竞争的情况下,  $e_3$  总是不稳定的, 在弱竞争的情形下, 给出了正常数解  $e_3$  在特殊  $f_i$  的条件下的稳定特性。更准确地说, 对于特殊函数  $f_1, f_2$  满足  $f_1'(u^*)=0, f_2'(v^*)=0$ , 如果  $f_3'(u^*)=0, f_4'(v^*)=0$ ,  $e_3$  是局部渐近稳定的; 如果  $f_3'(u^*) \neq 0, f_4'(v^*) \neq 0$ ,  $e_3$  可能失去稳定性并且对于不同的  $\xi_2$ ,  $e_3$  附近会出现斑图, 这将在后面章节进行数值模拟。

### 1 全局存在和有界性(定理 1 的证明)

首先证明式(1)古典解的局部存在性和唯一性。

**引理 1** 在假设  $H_1$ ) 下, 对每个非负初值  $(u_0, v_0, w_0, z_0 \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^4) > 0$ , 存在  $T_{\max} \in (0, +\infty]$  允许唯一的解  $(u, v, w, z)$  对所有  $t > 0$  满足

$$(u, v, w, z) \in [C^0(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max})) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max})) \cap L^\infty_{\text{Loc}}([0, T_{\max}); W^{1,\infty}(\Omega))]^4,$$

和

$$u(\cdot, t) > 0, v(\cdot, t) > 0, w(\cdot, t) > 0, z(\cdot, t) > 0,$$

此外, 当  $t \rightarrow T_{\max} < +\infty$  时, 有

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\omega(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|z(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

**证明** 可参考文献[14]。

为了方便后面的计算, 给出以下一些基本引理。

**引理 2** 在引理 1 的假设下, 存在一个常数  $c_1 > 0$ , 使得

$$\int_\Omega u(x, t) dx \leq c_1, \int_\Omega v(x, t) dx \leq c_1, t \in (0, T_{\max}), \quad (5)$$

和

$$\int_t^{t+r} \int_\Omega u^2 \leq c_1, \int_t^{t+r} \int_\Omega v^2 \leq c_1, t \in (0, T_{\max}^*), \quad (6)$$

其中,

$$r = \min\left\{1, \frac{T_{\max}}{2}\right\}, T_{\max}^* = \begin{cases} T_{\max} - r, & T_{\max} < \infty, \\ \infty, & T_{\max} = \infty. \end{cases}$$

**证明** 可参考文献[31]。

**引理 3** 假设引理 1 中的假设成立, 设  $(u, v, w, z)$  是式(1)的解, 则存在一个常数  $c_2$ , 使得

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \leq c_2, \int_\Omega |\nabla z|^2 \leq c_2, t \in (0, T_{\max}), \quad (7)$$

和

$$\int_t^{t+r} \int_\Omega |\Delta w|^2 \leq c_2, \int_t^{t+r} \int_\Omega |\Delta z|^2 \leq c_2, t \in [0, T_{\max}^*), \quad (8)$$

式中:  $T_{\max}^*$  和  $r$  由引理 2 给定。

**证明** 由文献[20]中相似论述可证明。

为了得到式(1)的解的全局一致有界性, 首先可证明:

**引理 4** 若引理 1 中的假设成立, 令  $n=2$ , 则存在常数  $C > 0$ , 使得

$$\int_\Omega u^2(x, t) dx \leq C, \int_\Omega v^2(x, t) dx \leq C, t \in (0, T_{\max}). \quad (9)$$

**证明** 在式(1)的第 1 个方程的两边同时乘以  $u$ , 并在  $\Omega$  上积分可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega u^2 + d_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 = \chi_1 \int_\Omega u \nabla u \cdot \nabla w - \xi_1 \int_\Omega u \nabla u \cdot \nabla z + \mu_1 \int_\Omega u^2 (a_1 - a_2 u - a_3 v), t \in (0, T_{\max}), \quad (10)$$

其中, 使用不等式  $\omega^2(a_1 - a_2\omega) \leq \frac{4a_1^3}{27a_2^2} (\omega \geq 0)$ ,

可以得到

$$\mu_1 \int_\Omega u^2 (a_1 - a_2 u - a_3 v) \leq \mu_1 \frac{4a_1^3 |\Omega|}{27a_2^2}, t \in (0, T_{\max}). \quad (11)$$

对式(10)右边第 1 项和第 2 项使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可以得到

$$\chi_1 \int_{\Omega} u \nabla u \cdot \nabla w = -\frac{\chi_1}{2} \int_{\Omega} u^2 \Delta w \leq \frac{\chi_1}{2} \|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)}, \quad t \in (0, T_{\max}), \quad (12)$$

和

$$-\xi_1 \int_{\Omega} u \nabla u \cdot \nabla z = \frac{\xi_1}{2} \int_{\Omega} u^2 \Delta z \leq \frac{\xi_1}{2} \|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\Delta z\|_{L^2(\Omega)}, \quad t \in (0, T_{\max}). \quad (13)$$

进一步利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式和式(5)可以找到常数  $c_3 > 0$ , 使得

$$\|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq c_3 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + c_3 \|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq c_3 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + c_3 c_1^2, \quad t \in (0, T_{\max}). \quad (14)$$

通过 Young's 不等式, 式(12)估计为

$$\chi_1 \int_{\Omega} u \nabla u \cdot \nabla w \leq \frac{d_1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + c_4 \int_{\Omega} u^2 \cdot \int_{\Omega} |\Delta w|^2 + c_4 \left( \int_{\Omega} |\Delta w|^2 + 1 \right), \quad t \in (0, T_{\max}). \quad (15)$$

同样地, 式(13)估计为

$$-\xi_1 \int_{\Omega} u \nabla u \cdot \nabla z \leq \frac{d_1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + c_5 \int_{\Omega} u^2 \cdot \int_{\Omega} |\Delta z|^2 + c_5 \left( \int_{\Omega} |\Delta z|^2 + 1 \right), \quad t \in (0, T_{\max}). \quad (16)$$

结合式(10), 式(11), 式(15), 式(16), 则可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \leq \int_{\Omega} u^2 \cdot \left( 2c_4 \int_{\Omega} |\Delta w|^2 + 2c_5 \int_{\Omega} |\Delta z|^2 \right) + 2c_4 \int_{\Omega} |\Delta w|^2 + 2c_5 \int_{\Omega} |\Delta z|^2 + c_6, \quad (17)$$

式中:  $c_6 = \mu_1 \frac{8a_1^3 |\Omega|}{27a_2^2} + 2c_4 + 2c_5$ . 对任意  $t \in (0, T_{\max})$ , 选择  $t_0 = t_0(t)$  满足

$$\begin{cases} t_0 \in (0, t), & 0 < t < r, \\ t_0 \in (t-r, t), & r \leq t. \end{cases} \quad (18)$$

注意到对所有  $t < T_{\max}$  满足  $t-r < T_{\max}^*$ , 接着对每个  $t \in (0, T_{\max})$ , 选择  $t_0 \in (0, T_{\max}^*)$  使得  $t$  和  $t_0$  满足式(18), 根据式(6), 式(8)可以找到常数  $c_7, c_8 > 0$ , 使得

$$\|u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_7 \int_{t_0}^{t_0+r} \|\Delta w(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq c_8, \quad \int_{t_0}^{t_0+r} \|\Delta z(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq c_8. \quad (19)$$

因此, 当式(17)在  $(t_0, t)$  上积分时

$$\int_{\Omega} u^2(x, t) dx \leq \left( \int_{\Omega} u^2(x, t_0) dx \right) + e^{2c_4 \int_{t_0}^t \int_{\Omega} |\Delta w(x, s)|^2 dx ds + 2c_5 \int_{t_0}^t \int_{\Omega} |\Delta z(x, s)|^2 dx ds} +$$

$$\int_{t_0}^t e^{2c_4 \int_{t_0}^s \int_{\Omega} |\Delta w(x, \sigma)|^2 dx d\sigma + 2c_5 \int_{t_0}^s \int_{\Omega} |\Delta z(x, \sigma)|^2 dx d\sigma} \cdot \left( 2c_4 \int_{\Omega} |\Delta w|^2 + 2c_5 \int_{\Omega} |\Delta z|^2 + c_6 \right) ds. \quad (20)$$

利用式(19), 则式(9)可得证。

进一步可以得到以下引理来证明定理1。

**命题 1** 令  $n=2$ , 则存在  $p > 1$ , 使得

$$\sup_{t \in (0, T_{\max})} (\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}) < \infty, \quad (21)$$

则当  $T_{\max} \rightarrow +\infty$  时,

$$\sup_{t > 0} (\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}) < \infty. \quad (22)$$

**证明** 由于假设  $H_1$ ) 和  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2$  有界, 可以得出  $\|f_1(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1, \|f_2(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1, \|f_3(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1, \|f_4(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1$ , 所以对式(1)的第3个和第4个方程应用抛物半群理论, 可知存在常数  $c_2$ , 使得

$$\|\omega(\cdot, t)\|_{W^{1,4}(\Omega)} \leq c_2, \|z(\cdot, t)\|_{W^{1,4}(\Omega)} \leq c_2, \quad t \in (0, T_{\max}), \quad (23)$$

继而得到当  $t \in (0, T_{\max})$  时,  $\|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_3$

在式(1)的第1个方程两边同时乘以  $u^{p-1}$  ( $p \geq 2$ ), 并在  $\Omega$  上积分, 则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p + d_1 (p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 + \\ & \mu_1 a_2 \int_{\Omega} u^{p+1} \leq \chi_1 (p-1) \int_{\Omega} u^{p-1} \nabla u \cdot \nabla w - \\ & \xi_1 (p-1) \int_{\Omega} u^{p-1} \nabla u \cdot \nabla z + \mu_1 a_1 \int_{\Omega} u^p, \end{aligned} \quad t \in (0, T_{\max}). \quad (24)$$

对式(24)应用 Young's 不等式和 Holder 不等式, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p + \frac{d_1 (p-1)}{2} \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 + \\ & \mu_1 a_1 \int_{\Omega} u^p \leq \frac{4\chi_1^2 (p-1)}{d_1} \int_{\Omega} u^p |\nabla w|^2 + \\ & \frac{4\xi_1^2 (p-1)}{d_1} \int_{\Omega} u^p |\nabla z|^2 + c_4, \quad t \in (0, T_{\max}). \end{aligned} \quad (25)$$

应用 Holder 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 则有

$$\frac{4\chi_1^2(p-1)}{d_1} \int_{\Omega} u^p |\nabla w|^2 + \frac{4\xi_1^2(p-1)}{d_1} \int_{\Omega} u^p |\nabla z|^2 \leq \frac{2d_1(p-1)}{p^2} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 + c_{50} \quad (26)$$

注意到

$$\frac{d_1(p-1)}{2} \int_{\Omega} u^{p-2} |\nabla u|^2 = \frac{2d_1(p-1)}{p^2} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 \quad (27)$$

因此, 综合式(25)~式(27), 有

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p + c_6 \int_{\Omega} u^p \leq c_{70} \quad (28)$$

利用 Gronwall 不等式, 可以得到当  $t \in (0, T_{\max})$  时,  $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq c_8$ ; 同样地, 当  $t \in (0, T_{\max})$  时,  $\|v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq c_{90}$ . 通过对式(1)的第3和第4个方程使用抛物正则理论, 可以得到当  $t \in (0, T_{\max})$  时,  $\|\nabla w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{10}$ ,  $\|\nabla z(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{110}$ . 接着, 使用 Moser 迭代<sup>[30]</sup>, 可以得到当  $t \in (0, T_{\max})$  时,  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{120}$ . 最后利用了延拓准则, 则式(1)古典解的全局存在得到了证明。

## 2 长时间行为(定理 2 的证明)

情况 1  $\frac{b_3}{a_2} < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_3}$

在此情况下, 所有式(1)的古典解都将收敛到正常数稳态  $e_3$ . 定义

$$E_1(t) = \int_{\Omega} \left( u - u^* - u^* \ln \frac{u}{u^*} \right) + \frac{\mu_1 a_3}{\mu_2 b_3} \int_{\Omega} \left( v - v^* - v^* \ln \frac{v}{v^*} \right) + \frac{\eta_1}{2} \int_{\Omega} (\omega - \omega^*)^2 + \frac{\eta_2}{2} \int_{\Omega} (z - z^*)^2, \quad (29)$$

式中:  $\eta_1, \eta_2 > 0$ . 由文献[32]可知,  $E_1(t) \geq 0$  对所有  $t > 0$  成立。

引理 5 如果假设  $H_2$ ) 成立, 则

$$F_1(t) = \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^2 + \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla v}{v} \right|^2 + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \int_{\Omega} |\nabla z|^2 + \int_{\Omega} (u - u^*)^2 + \int_{\Omega} (v - v^*)^2 + \int_{\Omega} (\omega - \omega^*)^2 + \int_{\Omega} (z - z^*)^2 \quad (30)$$

满足  $E_1'(t) \leq -\kappa F_1(t)$  对所有  $t > 0$  成立。

证明 假设

$$A_1(t) = \int_{\Omega} \left( u - u^* - u^* \ln \frac{u}{u^*} \right),$$

$$A_2(t) = \int_{\Omega} \left( v - v^* - v^* \ln \frac{v}{v^*} \right),$$

$$A_3(t) = \frac{\eta_1}{2} \int_{\Omega} (\omega - \omega^*)^2, \quad A_4(t) = \frac{\eta_2}{2} \int_{\Omega} (z - z^*)^2,$$

则  $E_1'(t) = A_1'(t) + \frac{\mu_1 a_3}{\mu_2 b_3} A_2'(t) + A_3'(t) + A_4'(t)$ . 注

意到  $a_1 - a_2 u^* - a_3 v^* = 0$ , 则有

$$A_1'(t) = \int_{\Omega} \left( u_t - \frac{u^*}{u} u_t \right) = -a_2 \mu_1 \int_{\Omega} (u - u^*)^2 - a_3 \mu_1 \int_{\Omega} (u - u^*)(v - v^*) - u^* d_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^2 + \chi_1 u^* \int_{\Omega} \frac{\nabla u}{u} \cdot \nabla w - \xi_1 u^* \int_{\Omega} \frac{\nabla u}{u} \cdot \nabla z, t > 0, \quad (31)$$

和

$$A_2'(t) = -b_2 \mu_2 \int_{\Omega} (v - v^*)^2 - b_3 \mu_2 \int_{\Omega} (u - u^*)(v - v^*) - v^* d_2 \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla v}{v} \right|^2 + \chi_2 v^* \int_{\Omega} \frac{\nabla v}{v} \cdot \nabla w - \xi_2 v^* \int_{\Omega} \frac{\nabla v}{v} \cdot \nabla z, t > 0. \quad (32)$$

考虑到假设  $H_1$ ) 和  $\omega^* = f_1(u^*) + f_2(v^*)$ , 则有

$$A_3'(t) = \eta_1 \int_{\Omega} (\omega - \omega^*) \omega_t = -d_3 \eta_1 \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 - \eta_1 \int_{\Omega} (\omega - \omega^*) \omega + \eta_1 \int_{\Omega} (\omega - \omega^*) f_1(u) - \eta_1 \int_{\Omega} (\omega - \omega^*) f_2(v) \leq -d_3 \eta_1 \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 - \eta_1 \int_{\Omega} (\omega - \omega^*)^2 + l_1 \eta_1 \int_{\Omega} |\omega - \omega^*| |u - u^*| + l_2 \eta_1 \int_{\Omega} |\omega - \omega^*| |v - v^*|, t > 0. \quad (33)$$

同样地,

$$A_4'(t) \leq -d_4 \eta_2 \int_{\Omega} |\nabla z|^2 - \eta_2 \int_{\Omega} (z - z^*)^2 + l_3 \eta_2 \int_{\Omega} |z - z^*| |u - u^*| + l_4 \eta_2 \int_{\Omega} |z - z^*| |v - v^*|, t > 0. \quad (34)$$

结合式(31)~式(34), 得到

$$E_1'(t) \leq -a_2 \mu_1 \int_{\Omega} (u - u^*)^2 - a_3 \mu_1 \int_{\Omega} (u - u^*)(v - v^*) - u^* d_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^2 + \chi_1 u^* \int_{\Omega} \frac{\nabla u}{u} \cdot \nabla w - \xi_1 u^* \int_{\Omega} \frac{\nabla u}{u} \cdot \nabla z - \frac{b_2 \mu_1 a_3}{b_3} \int_{\Omega} (v - v^*)^2 - a_3 \mu_1 \int_{\Omega} (u - u^*)(v - v^*) - \frac{d_2 \mu_1 a_3 v^*}{\mu_2 b_3} \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla v}{v} \right|^2 + \frac{\mu_1 a_3 \chi_2 v^*}{\mu_2 b_3} \int_{\Omega} \frac{\nabla v}{v} \cdot \nabla w -$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_1 a_3 \xi_2 v^*}{\mu_2 b_3} \int_{\Omega} \frac{\nabla v}{v} \cdot \nabla z - d_3 \eta_1 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 - \\ & d_4 \eta_2 \int_{\Omega} |\nabla z|^2 - \eta_1 \int_{\Omega} (w - w^*)^2 + \\ & l_1 \eta_1 \int_{\Omega} |w - w^*| |u - u^*| + \\ & l_2 \eta_1 \int_{\Omega} |w - w^*| |v - v^*| - \eta_2 \int_{\Omega} (z - z^*)^2 + \\ & l_3 \eta_2 \int_{\Omega} |z - z^*| |u - u^*| + l_4 \eta_2 \int_{\Omega} |z - z^*| |v - v^*|. \end{aligned} \tag{35}$$

令  $X_1 = (|u - u^*|, |v - v^*|, |w - w^*|, |z - z^*|)$  和  $Y_1 = (\frac{\nabla u}{u}, \frac{\nabla v}{v}, \nabla w, \nabla z)$ , 可以得到不等式

$$E_1'(t) \leq - \int_{\Omega} X_1 M^1 X_1^T - \int_{\Omega} Y_1 N^1 Y_1^T, t > 0, \tag{36}$$

其中,

$$M^1 = \begin{bmatrix} a_2 \mu_1 & a_3 \mu_1 & -\frac{l_1 \eta_1}{2} & -\frac{l_3 \eta_1}{2} \\ a_3 \mu_1 & \frac{b_2 a_3 \mu_1}{b_3} & -\frac{l_2 \eta_2}{2} & -\frac{l_4 \eta_2}{2} \\ -\frac{l_1 \eta_1}{2} & -\frac{l_2 \eta_2}{2} & \eta_1 & 0 \\ -\frac{l_3 \eta_2}{2} & -\frac{l_4 \eta_2}{2} & 0 & \eta_2 \end{bmatrix},$$

$$|M_{33}^1| = \mu_1 \eta_1 \left( \frac{a_2 a_3 b_2 \mu_1}{b_3} + \frac{a_3 l_1 l_2 \eta_1}{2} - \frac{b_2 a_3 l_1^2 \eta_1}{4 b_3} - \frac{l_2^2 a_2 \eta_1}{4} - a_3^2 \mu_1 \right) > 0,$$

进一步选取

$$\eta_2 < \frac{\Gamma_1 (2a_3 b_3 l_1 l_2 - b_2 a_3 l_1^2 - a_2 b_3 l_2^2) + (4a_2 a_3 b_2 \mu_1 - 4a_3^2 b_3 \mu_1)}{(a_2 b_3 l_4^2 + b_2 a_3 l_3^2 - 2a_3 b_3 l_3 l_4)} = \Theta_1. \tag{38}$$

可以证明

$$\begin{aligned} & |M^1| = |M_{33}^1| \cdot \eta_2 + \\ & \frac{\eta_1 \eta_2^2}{2} \left( l_3 l_4 a_3 \mu_1 - \frac{l_1 l_2 l_3 l_4 \eta_1}{4} + \frac{l_1^2 l_4^2 \eta_1}{8} + \frac{l_2^2 l_3^2 \eta_1}{8} - \right. \\ & \left. \frac{a_2 \mu_1 l_4^2}{2} - \frac{b_2 a_3 \mu_1 l_3^2}{2 b_3} \right) > 0. \end{aligned}$$

事实上, 由于  $-\frac{l_1 l_2 l_3 l_4 \eta_1}{4} + \frac{l_1^2 l_4^2 \eta_1}{8} + \frac{l_2^2 l_3^2 \eta_1}{8} >$

0, 则  $|M^1| > 0$  等价于  $\left( \frac{a_2 a_3 b_2 \mu_1}{b_3} - a_3^2 \mu_1 \right) +$

$$|N_{33}^1| = \frac{d_1 u^* d_2 \mu_1 a_3 v^* d_3 \eta_1}{\mu_2 b_3} - \frac{\chi_1^2 u^* u^* d_2 \mu_1 a_3 v^*}{4 \mu_2 b_3} - \frac{\mu_1^2 a_3^2 \chi_2^2 v^* v^* d_1 u^*}{4 \mu_2^2 b_3^2} > 0.$$

进一步选取  $\eta_2$  满足

$$\eta_2 > \frac{\Gamma_2 \mu_2 b_3 (\xi_2^2 v^* d_1 d_3 \mu_1 a_3 + d_2 d_3 \xi_1^2 u^*)}{4 \Gamma_2 \mu_2 b_3 d_1 d_2 d_3 d_4 - (\mu_2 b_3 \chi_1^2 u^* d_2 d_4 + \mu_1 a_3 \chi_2^2 v^* d_1 d_4)} = \Theta_2. \tag{40}$$

可以证明

$$|N^1| = |N_{33}^1| \cdot d_4 \eta_2 + \frac{(u^* v^*)^2 \mu_1^2 a_3^2 (\chi_1 \xi_2 - \chi_2 \xi_1)^2}{16 \mu_2^2 b_3^2}$$

$$N^1 =$$

$$\begin{bmatrix} d_1 u^* & 0 & -\frac{\chi_1 u^*}{2} & \frac{\xi_1 u^*}{2} \\ 0 & \frac{d_2 \mu_1 a_3 v^*}{\mu_2 b_3} & -\frac{\mu_1 a_3 \chi_2 v^*}{2 \mu_2 b_3} & \frac{\mu_1 a_3 \xi_2 v^*}{2 \mu_2 b_3} \\ -\frac{\chi_1 u^*}{2} & -\frac{\mu_1 a_3 \chi_2 v^*}{2 \mu_2 b_3} & d_3 \eta_1 & 0 \\ \frac{\xi_1 u^*}{2} & \frac{\mu_1 a_3 \xi_2 v^*}{2 \mu_2 b_3} & 0 & d_4 \eta_2 \end{bmatrix}.$$

接着要找到合适的  $\eta_1, \eta_2 > 0$  使  $M^1, N^1$  是正定矩阵。由 Sylvester's 准则只需证  $M_{11}^1, M_{22}^1, M_{33}^1, M_{44}^1$  是正定的。

$$|M_{11}^1| = a_2 \mu_1 > 0,$$

$$|M_{22}^1| = \frac{b_2 a_3 a_2 \mu_1^2}{b_3} - a_3^2 \mu_1^2 > 0,$$

显然成立。选取  $\eta_1 > 0$  满足

$$\eta_1 < \frac{4b_2 a_2 a_3 \mu_1 - 4b_3 a_3^2 \mu_1}{b_3 a_2 l_2^2 + b_2 a_3 l_1^2 - 2b_3 a_3 l_1 l_2} = \Gamma_1, \tag{37}$$

则

$$\left( \frac{a_3 l_1 l_2}{2} - \frac{b_2 a_3 l_1^2}{4 b_3} - \frac{l_2^2 a_2}{4} \right) \eta_1 > \frac{\eta_2}{2} \left( \frac{a_2 l_4^2}{2} + \frac{b_2 a_3 l_3^2}{2 b_3} - l_3 l_4 a_3 \right),$$

即选取  $\eta_2$  满足式(38)即可保证  $|M^1| > 0$ 。

同样地, 考虑  $N^1$  是正定矩阵, 需要证明  $N_{11}^1, N_{22}^1, N_{33}^1, N_{44}^1$  是正定的。

$$|N_{11}^1| = d_1 u^* > 0, |N_{22}^1| = \frac{d_1 d_2 a_3 \mu_1 u^* v^*}{\mu_2 b_3} > 0$$

显然成立。对于  $|N_{33}^1|$ , 选取  $\eta_1 > 0$  满足

$$\eta_1 < \frac{\chi_1^2 u^*}{4 d_1 d_3} + \frac{\mu_1 a_3 \chi_2^2 v^*}{4 \mu_2 b_3 d_2 d_3} = \Gamma_2, \tag{39}$$

进一步选取  $\eta_2$  满足

$$\eta_2 > \frac{\Gamma_2 \mu_2 b_3 (\xi_2^2 v^* d_1 d_3 \mu_1 a_3 + d_2 d_3 \xi_1^2 u^*)}{4 \Gamma_2 \mu_2 b_3 d_1 d_2 d_3 d_4 - (\mu_2 b_3 \chi_1^2 u^* d_2 d_4 + \mu_1 a_3 \chi_2^2 v^* d_1 d_4)} = \Theta_2.$$

可以证明

$$|N^1| = |N_{33}^1| \cdot d_4 \eta_2 + \frac{(u^* v^*)^2 \mu_1^2 a_3^2 (\chi_1 \xi_2 - \chi_2 \xi_1)^2}{16 \mu_2^2 b_3^2}$$

$$\frac{\eta_1 u^* v^* \mu_1 a_3 (\xi_2^2 v^* d_1 d_3 \mu_1 a_3 + d_2 d_3 \xi_1^2 u^*)}{4\mu_2 b_3} > 0.$$

事实上, 由于  $\frac{(u^* v^*)^2 \mu_1^2 a_3^2 (\chi_1 \xi_2 - \chi_2 \xi_1)^2}{16\mu_2^2 b_3^2} > 0$ ,

则  $|N^1| > 0$  等价于

$$\left( 4d_1 d_2 d_3 \eta_1 - \chi_1^2 u^* d_2 - \frac{\mu_1 a_3 d_1 \chi_2^2 v^*}{\mu_2 b_3} \right) d_4 \eta_2 >$$

$$\eta_1 (\xi_2^2 v^* d_1 d_3 \mu_1 a_3 + d_2 d_3 \xi_1^2 u^*),$$

即选取  $\eta_2$  满足式(40)可保证  $|N^1| > 0$ .

在假设  $H_2$ ) 下可以选择合适的  $\eta_1, \eta_2 > 0$  使得  $\Gamma_2 < \eta_1 < \Gamma_1, \Theta_2 < \eta_2 < \Theta_1$ , 保证矩阵  $M^1, N^1$  是正定矩阵. 从而存在一些  $\kappa > 0$  使得

$$-X_1 M^1 X_1^T - Y_1 N^1 Y_1^T \leq -\kappa |X_1|^2 - \kappa |Y_1|^2$$

引理 5 得证.

**引理 6** 在假设  $\frac{b_3}{a_2} < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_3}$  的前提下, 当

$t \rightarrow \infty$  时,

$$\|u - u^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v - v^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\omega - \omega^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z - z^*\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (41)$$

**证明** 由于  $E_1(t)$  的非负性, 可以知道

$$\int_1^{+\infty} F_1(t) dt \leq \frac{E_1(1)}{k_1} < \infty.$$

另一方面, 使用与文献[1, 13]中相似论述, 可知存在常数  $C > 0, \alpha \in (0, 1)$  使得

$$\|u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [t, t+1])} + \|v\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [t, t+1])} + \|w\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [t, t+1])} + \|z\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [t, t+1])} < C.$$

对所有  $t > 1$ , 显示了  $u, v, \omega, z$  在  $t > 1$  时是  $W^{1, \infty}(\Omega)$  有界的且 Hölder 连续, 在  $\bar{\Omega} \times [t, t+1]$  ( $t > 1$ ) 一致有界. 因此, 根据文献[1], 可以有当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $\|u - u^*\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ . 注意到存在常数  $c_1$ , 使得

$$\|\varphi\|_{L^\infty} \leq c_1 \|\varphi\|_{W^{1, \infty}}^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \varphi \in W^{1, \infty}(\Omega). \quad (42)$$

将式(42)应用到  $u - u^*$ , 就可以得到  $\|u - u^*\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$  当  $t \rightarrow +\infty$ . 同样地,

$$\|v - v^*\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0, \|\omega - \omega^*\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0,$$

$$\|z - z^*\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty,$$

则式(41)得证.

**情况 2:**  $\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_3}{a_2} < \frac{b_2}{a_3}$ .

在此情况下, 所有式(1)的古典解都将收敛

到正常数稳态  $e_1$ . 定义

$$E_2(t) = \frac{\mu_2 b_3}{\mu_1 a_3} \int_{\Omega} (u - u_1^* - u_1^* \ln \frac{u}{u_1^*}) + \int_{\Omega} v^2 + \frac{\delta_1}{2} \int_{\Omega} (\omega - \omega_1^*)^2 + \frac{\delta_2}{2} \int_{\Omega} (z - z_1^*)^2, \quad (43)$$

式中:  $\delta_1, \delta_2 > 0$ . 与引理 5 讨论类似, 可知  $E_2(t) \geq 0$ . 此外, 有以下引理:

**引理 7** 若假设  $H_3$ ) 成立, 则存在常数  $\kappa_3 > 0$  使得

$$F_2(t) = \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 + \int_{\Omega} |\nabla z|^2 + \int_{\Omega} (u - u_1^*)^2 + \int_{\Omega} v^2 + \int_{\Omega} (\omega - \omega_1^*)^2 + \int_{\Omega} (z - z_1^*)^2 \quad (44)$$

满足  $E_2'(t) \leq -\epsilon F_2(t) - \delta_4 \int_{\Omega} v, t > 0$ , 其中,  $\delta_4 = \mu_2 (b_3 u_1^* - b_1) > 0$ .

**证明** 假设

$$B_1(t) = \int_{\Omega} \left( u - u_1^* - u_1^* \ln \frac{u}{u_1^*} \right), B_2(t) = \int_{\Omega} v,$$

$$B_3(t) = \frac{\delta_1}{2} \int_{\Omega} (\omega - \omega_1^*)^2, B_4(t) = \frac{\delta_2}{2} \int_{\Omega} (z - z_1^*)^2,$$

所以,  $E_2'(t) = \frac{\mu_2 b_3}{\mu_1 a_3} B_1'(t) + B_2'(t) + B_3'(t) + B_4'(t)$ ,

其中, 当  $t > 0$  时,

$$B_1'(t) = \int_{\Omega} \left( u_t - \frac{u_1^*}{u} u_t \right) =$$

$$-a_2 \mu_1 \int_{\Omega} (u - u_1^*)^2 - a_3 \mu_1 \int_{\Omega} (u - u_1^*) v -$$

$$u_1^* d_1 \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^2 + \chi_1 u_1^* \int_{\Omega} \frac{\nabla u}{u} \cdot \nabla \omega - \xi_1 u_1^* \int_{\Omega} \frac{\nabla u}{u} \cdot \nabla z,$$

$$B_2'(t) \leq \int_{\Omega} \mu_2 v (b_1 - b_2 v - b_3 u) \leq$$

$$-\mu_2 b_2 \int_{\Omega} v^2 - \mu_2 b_3 \int_{\Omega} (u - u_1^*) v + \delta_4 \int_{\Omega} v,$$

$$B_3'(t) = -d_3 \delta_1 \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 - \delta_1 \int_{\Omega} (\omega - \omega_1^*)^2 +$$

$$l_1 \delta_1 \int_{\Omega} |\omega - \omega_1^*| |u - u_1^*| + l_2 \delta_1 \int_{\Omega} |\omega - \omega_1^*| v,$$

$$B_4'(t) = -d_4 \delta_2 \int_{\Omega} |\nabla z|^2 - \delta_2 \int_{\Omega} (z - z_1^*)^2 +$$

$$l_3 \delta_2 \int_{\Omega} |z - z_1^*| |u - u_1^*| + l_4 \delta_2 \int_{\Omega} |z - z_1^*| v.$$

所以

$$E_2'(t) \leq -\frac{b_3 \mu_2 a_2}{a_3} \int_{\Omega} (u - u_1^*)^2 -$$

$$\frac{b_3 \mu_2 \chi_1 u_1^*}{a_3 \mu_1} \int_{\Omega} \frac{\nabla u}{u} \cdot \nabla \omega - \frac{b_3 \mu_2 \xi_1 u_1^*}{a_3 \mu_1} \int_{\Omega} \frac{\nabla u}{u} \cdot \nabla z.$$

$$\begin{aligned} & \nabla z - \mu_2 b_2 \int_{\Omega} v^2 - \mu_2 b_3 \int_{\Omega} (u - u_1^*) v + \\ & \delta_4 \int_{\Omega} v - d_3 \delta_1 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 - \delta_1 \int_{\Omega} (w - w_1^*)^2 + \\ & l_1 \delta_1 \int_{\Omega} |w - w_1^*| |u - u_1^*| + l_2 \delta_1 \int_{\Omega} |w - w_1^*| v - \\ & d_4 \delta_2 \int_{\Omega} |\nabla z|^2 - \delta_2 \int_{\Omega} (z - z_1^*)^2 + \\ & l_3 \delta_2 \int_{\Omega} |z - z_1^*| |u - u_1^*| + l_4 \delta_2 \int_{\Omega} |z - z_1^*| v, \end{aligned}$$

即  $E_2'(t) \leq -\int_{\Omega} X_2 M^2 X_2^T - \int_{\Omega} Y_2 N^2 Y_2^T - \delta_4 \int_{\Omega} v$ ,  
其中,

$$X_2 = (|u - u_1^*|, |v - v_1^*|, |w - w_1^*|, |z - z_1^*|),$$

$$Y_2 = \left( \frac{\nabla u}{u}, \nabla w, \nabla z \right),$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} \frac{a_2 b_3 \mu_2}{a_3} & b_3 \mu_2 & -\frac{l_1 \delta_1}{2} & -\frac{l_3 \delta_2}{2} \\ b_3 \mu_2 & b_2 \mu_2 & -\frac{l_2 \delta_1}{2} & -\frac{l_4 \delta_2}{2} \\ -\frac{l_1 \delta_1}{2} & -\frac{l_2 \delta_1}{2} & \delta_1 & 0 \\ -\frac{l_3 \delta_2}{2} & -\frac{l_4 \delta_2}{2} & 0 & \delta_2 \end{bmatrix},$$

$$\delta_2 < \frac{\Gamma_3 (a_3 b_2 l_1^2 + a_2 b_3 l_2^2 - 2b_3 a_3 l_1 l_2) - (4a_2 b_3 b_2 \mu_2 - 4b_3^2 a_3 \mu_2)}{(2a_3 b_3 l_3 l_4 - b_2 a_3 l_3^2 - a_2 b_3 l_4^2)} = \Theta_3, \quad (46)$$

则可证明

$$|M_{44}^2| = |M_{33}^2| \cdot \delta_2 + \frac{\delta_1 \delta_2^2}{2} \left( l_3 l_4 b_3 \mu_2 - \frac{l_1 l_2 l_3 l_4 \delta_1}{4} + \frac{l_1^2 l_4^2 \delta_1}{8} + \frac{l_2^2 l_3^2 \delta_1}{8} - \frac{b_2 \mu_2 l_3^2}{2} - \frac{a_2 b_3 \mu_2 l_4^2}{2a_3} \right) > 0.$$

$$\text{事实上, 由于 } -\frac{l_1 l_2 l_3 l_4 \eta_1}{4} + \frac{l_1^2 l_4^2 \eta_1}{8} + \frac{l_2^2 l_3^2 \eta_1}{8} >$$

0, 则  $|M_{44}^2| > 0$  等价于

$$\frac{\delta_2}{2} \left( l_3 l_4 b_3 - \frac{b_2 l_3^2}{2} - \frac{a_2 b_3 l_4^2}{2a_3} \right) > \left( b_3^2 \mu_2 - \frac{a_2 b_3 b_2 \mu_2}{a_3} \right) + \left( \frac{l_1^2 b_2}{4} - \frac{b_3 l_1 l_2}{2} + \frac{a_2 b_3 l_2^2}{4a_3} \right) \delta_1,$$

即选取  $\delta_2$  满足式(46)即可保证  $|M_{44}^2| > 0$ .

同样地, 为了证明  $N^2$  是正定矩阵, 需要证明  $N_{11}^2, N_{22}^2, N_{33}^2$  是正定的。

$$|N_{11}^2| = \frac{b_3 \mu_2 d_1 u_1^*}{a_3 \mu_1} > 0 \text{ 显然成立。对于 } |N_{22}^2|,$$

选取  $\delta_1 > 0$  满足

$$\delta_1 > \frac{b_3 \mu_2 \chi_1^2 u_1^*}{4a_3 \mu_1 d_1 d_3} = \Gamma_4, \quad (47)$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} \frac{b_3 \mu_2 u_1^* d_1}{a_3 \mu_1} & -\frac{b_3 \mu_2 \chi_1 u_1^*}{2a_3 \mu_1} & \frac{b_3 \mu_2 \xi_1 u_1^*}{2a_3 \mu_1} \\ -\frac{b_3 \mu_2 \chi_1 u_1^*}{2a_3 \mu_1} & d_3 \delta_1 & 0 \\ \frac{b_3 \mu_2 \xi_1 u_1^*}{2a_3 \mu_1} & 0 & d_4 \delta_2 \end{bmatrix}.$$

接着要找到合适的  $\delta_1, \delta_2$  使  $M^2, N^2$  是正定矩阵。由 Sylvester's 准则只需证明  $M_{11}^2, M_{22}^2, M_{33}^2, M_{44}^2$  是正定的。

$$|M_{11}^2| = \frac{a_2 b_3 \mu_2}{a_3} > 0, |M_{22}^2| = \frac{a_2 b_3 b_2 \mu_2^2}{a_3} - b_3^2 \mu_2^2 >$$

0 显然成立。对于  $|M_{33}^2|$ , 选取  $\delta_1 > 0$  满足

$$\delta_1 < \frac{4a_2 b_2 b_3 \mu_2 - 4a_3 b_3^2 \mu_2}{a_3 b_2 l_1^2 + a_2 b_3 l_2^2 - 2b_3 a_3 l_1 l_2} = \Gamma_3, \quad (45)$$

则

$$|M_{33}^2| = \frac{a_2 b_3 b_2 \mu_2^2 \delta_1}{a_3} + \frac{b_3 \mu_2 l_1 l_2 \delta_1^2}{2} - \frac{b_2 \mu_2 l_1^2 \delta_1^2}{4} - b_3^2 \mu_2^2 \delta_1 - \frac{l_2^2 a_2 b_3 \mu_2 \delta_1^2}{4a_3} > 0.$$

进一步选取  $\delta_2$  满足

$$\text{则 } |N_{22}^2| = \frac{d_1 u_1^* \mu_2 b_3 d_3 \delta_1}{\mu_1 a_3} - \frac{\chi_1^2 u_1^* b_3^2 \mu_2^2}{4\mu_1^2 a_3^2} > 0. \text{ 进一}$$

步选取  $\delta_2$  满足

$$\delta_2 > \frac{\Gamma_4 \mu_2 b_3 d_3 \xi_1^2 u_1^*}{4\Gamma_4 a_3 \mu_1 d_1 d_3 d_4 - \mu_2 b_3 \chi_1^2 u_1^* d_4} = \Theta_4, \quad (48)$$

则可证明

$$|N^2| = \frac{b_3 \mu_2 u_1^* d_1 d_3 d_4 \delta_1 \delta_2}{a_3 \mu_1} - \frac{(u_1^*)^2 \mu_2^2 b_3^2 \xi_1^2 d_3 d_1}{4\mu_1^2 a_3^2} - \frac{(u_1^*)^2 \mu_2^2 b_3^2 \chi_1^2 d_4 \delta_2}{4\mu_1^2 a_3^2} > 0.$$

事实上,  $|N^2| > 0$  等价于  $(4\delta_1 a_3 \mu_1 d_1 d_3 d_4 - b_3 \mu_2 \chi_1^2 u_1^* d_4) \delta_2 > b_3 \mu_2 \xi_1^2 u_1^* d_3 d_1$ , 即选取  $\delta_2$  满足式(48)即可保证  $|N^2| > 0$ .

在假设  $H_3$  前提下, 可以选择合适的  $\delta_1, \delta_2$  满足  $\Gamma_4 < \delta_1 < \Gamma_3, \Theta_4 < \delta_2 < \Theta_3$ , 使得  $M^2$  和  $N^2$  是正定矩阵, 则存在  $\epsilon > 0$ , 使得

$$-X_2 M^2 X_2^T - Y_2 N^2 Y_2^T \leq -\epsilon |X_2|^2 - \epsilon |Y_2|^2.$$

引理7得证。

引理8 在假设  $\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_3}{a_2} < \frac{b_2}{a_3}$  条件下, 当

$t \rightarrow \infty$  时,

$$\begin{aligned} & \|u - u_1^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w - w_1^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \\ & \|z - z_1^*\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{49}$$

证明 证明过程和定理 6 类似, 在此省略。

情况 3  $\frac{b_3}{a_2} < \frac{b_2}{a_3} < \frac{b_1}{a_1}$ 。

与情况 2 的过程相同, 可以得到式(1)的所有古典解都将收敛到常数稳态  $e_2$ , 讨论过程省略。

### 3 线性稳定性分析

本节将介绍围绕式(1)的恒定稳态点  $e =$

$$B(e) = \begin{bmatrix} \mu_1(a_1 - 2a_2\bar{u} - a_3\bar{v}) & -a_3\mu_1\bar{u} & 0 & 0 \\ -b_3\mu_2\bar{v} & \mu_2(b_1 - 2b_2\bar{v} - b_3\bar{u}) & 0 & 0 \\ f'_1(\bar{u}) & f'_2(\bar{v}) & -1 & 0 \\ f'_3(\bar{u}) & f'_4(\bar{v}) & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

则  $\Phi(x, t)$  的形式为

$$\Phi(x, t) = \sum_{k \geq 0} c_k e^{kt} W_k(x), \tag{51}$$

式中:  $k$  为波数;  $W_k(x)$  是以下特征值问题的特征函数。

$$\Delta W_k(x) + k^2 W_k(x) = 0, \quad \frac{\partial W_k(x)}{\partial n} = 0.$$

$\lambda$  是时间特征值, 系数  $c_k$  是以  $W_k(x)$  表示的特征值的傅里叶展开系数, 将式(51)代入式(50)得到  $M_k(e) = \lambda W_k(x)$ ,

$$\begin{aligned} & (\lambda + k^2 d_4 + 1)(\lambda + F)(\lambda + G)(\lambda + k^2 d_3 + 1) - a_3 b_3 \mu_1 \mu_2 \bar{u} \bar{v} (\lambda + k^2 d_4 + 1)(\lambda + k^2 d_3 + 1) + \\ & f'_3(\bar{u}) k^2 \xi_1 \bar{u} (\lambda + G)(\lambda + k^2 d_3 + 1) - f'_3(\bar{u}) k^2 \xi_2 a_3 \mu_1 \bar{u} \bar{v} (\lambda + k^2 d_3 + 1) + \\ & f'_4(\bar{v}) k^2 \xi_2 \bar{v} (\lambda + F)(\lambda + k^2 d_3 + 1) - f'_4(\bar{v}) k^2 \xi_1 b_3 \mu_2 \bar{u} \bar{v} (\lambda + k^2 d_3 + 1) + (f'_2(\bar{v}) k^2 b_3 \mu_2 \chi_1 \bar{u} \bar{v} + \\ & f'_1(\bar{u}) k^2 a_3 \mu_1 \chi_2 \bar{u} \bar{v} - f'_1(\bar{u}) k^2 \chi_1 \bar{u} (\lambda + G) - f'_2(\bar{v}) k^2 \chi_2 \bar{v} (\lambda + F)(\lambda + k^2 d_4 + 1) + \\ & (f'_3(\bar{u}) f'_2(\bar{v}) k^4 \chi_1 \xi_2 \bar{u} \bar{v} - f'_3(\bar{u}) f'_2(\bar{v}) k^4 \chi_2 \xi_1 \bar{u} \bar{v} - (f'_1(\bar{u}) f'_4(\bar{v}) k^4 \chi_1 \xi_2 \bar{u} \bar{v} + \\ & (f'_1(\bar{u}) f'_4(\bar{v}) k^4 \chi_2 \xi_1 \bar{u} \bar{v})) = 0. \end{aligned} \tag{52}$$

用  $e_3$  代替  $e$  来求解式(52)是一个很大的挑战。然而, 如果函数  $f_1, f_2$  满足  $f'_1(u^*) = f'_2(v^*) = 0$ , 则式(52)可以归结为

$$(\lambda + k^2 d_3 + 1)(\lambda^3 + H_2 \lambda^2 + H_1 \lambda + H_0) = 0, \tag{53}$$

其中,

$$\begin{aligned} H_2 &= (G + F + k^2 d_4 + 1), \\ H_1 &= (G + F)(k^2 d_4 + 1) + FG - \\ & a_3 b_3 \mu_1 \mu_2 u^* v^* + f'_3(u^*) k^2 \xi_1 u^* + f'_4(v^*) k^2 \xi_2 v^*, \\ H_0 &= (k^2 d_4 + 1)(FG - a_3 b_3 \mu_1 \mu_2 u^* v^*) - \\ & f'_3(u^*) k^2 a_3 \xi_2 \mu_1 u^* v^* - f'_4(v^*) k^2 b_3 \xi_1 \mu_2 u^* v^* + \end{aligned}$$

$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z})$  的局部动力学<sup>[33]</sup>分析, 并进行数值模拟。令  $\Phi = (u - \bar{u}, v - \bar{v}, w - \bar{w}, z - \bar{z})^T$ , 在  $e$  点给出式(1)的线性化

$$\Phi_t = A(e)\Delta\Phi + B(e)\Phi, \tag{50}$$

其中,

$$A(e) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -\chi_1 \bar{u} & \xi_1 \bar{u} \\ 0 & d_2 & -\chi_2 \bar{v} & \xi_2 \bar{v} \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

$$M_k(e) = \begin{bmatrix} -F & -a_3 \mu_1 \bar{u} & k^2 \chi_1 \bar{u} & -k^2 \xi_1 \bar{u} \\ -b_3 \mu_2 \bar{v} & -G & k^2 \chi_2 \bar{v} & -k^2 \xi_2 \bar{v} \\ f'_1(\bar{u}) & f'_2(\bar{v}) & -k^2 d_3 - 1 & 0 \\ f'_3(\bar{u}) & f'_4(\bar{v}) & 0 & -k^2 d_4 - 1 \end{bmatrix},$$

其中,

$$\begin{aligned} F &= k^2 d_1 - \mu_1(a_1 - 2a_2\bar{u} - a_3\bar{v}), \\ G &= k^2 d_2 - \mu_2(b_1 - 2b_2\bar{v} - b_3\bar{u}), \end{aligned}$$

式中:  $\lambda$  是  $M_k(e)$  的特征值, 则  $M_k(e)$  的特征方程为

$$\begin{aligned} & f'_3(u^*) k^2 \xi_1 u^* G + f'_4(v^*) k^2 \xi_2 v^* F, \\ & \text{及 } F = k^2 d_1 + \mu_1 a_2 u^*, G = k^2 d_2 + \mu_2 b_2 v^*. \end{aligned}$$

可以看出  $F > 0, G > 0$ , 并且很容易知道  $H_2 > 0$  总是正确的。根据 Routh-Hurwitz 稳定性准则,  $e_3$  局部渐近稳定当且仅当  $H_0(k) > 0, H_1(k) > 0, H_1(k)H_2(k) - H_0(k) > 0$ , 对于所有  $k$  都成立, 若该条件不满足时,  $e_3$  不稳定。弱竞争表明  $\frac{b_3}{a_2} < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_3}$ , 因此,  $FG - a_3 b_3 \mu_1 \mu_2 u^* v^* > 0$  对所有  $k$  成立, 则可以分为 5 种情况:

情况 1  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) < 0$ 。

$$h_1) f_3'(u^*)k^2 a_3 \mu_1 u^* v^* - f_4'(v^*)k^2 v^* F > 0,$$

$$h_2) a_3 k^2 f_3'(u^*) \mu_1 u^* v^* - G k^2 f_4'(v^*) v^* - k^2 f_4'(v^*) v^* (k^2 d_4 + 1) > 0,$$

$$h_3) (F + G)(k^2 d_4 + 1) + FG - a_3 b_3 \mu_1 \mu_2 u^* v^* + \xi_1^* f_3'(u^*) k^2 u^* > 0,$$

$$h_4) (k^2 d_4 + 1)(FG - a_3 b_3 \mu_1 \mu_2 u^* v^*) + \xi_1^* (k^2 f_3'(u^*) G u^* - k^2 f_4'(v^*) b_3 \mu_2 u^* v^*) > 0,$$

$$\xi_2^* < \frac{(F + G)(k^2 d_4 + 1) + FG - a_3 b_3 \mu_1 \mu_2 u^* v^* + \xi_1^* f_3'(u^*) k^2 u^*}{-f_4'(v^*) k^2 v^*} = H_{11}(k),$$

$$\xi_2^* < \frac{(k^2 d_4 + 1)(FG - a_3 b_3 \mu_1 \mu_2 u^* v^*) + \xi_1^* (k^2 f_3'(u^*) G u^* - k^2 f_4'(v^*) b_3 \mu_2 u^* v^*)}{f_3'(u^*) k^2 a_3 \mu_1 u^* v^* - f_4'(v^*) k^2 v^* F} = H_{12}(k),$$

$$\xi_2^* < \frac{(G + F)(k^2 d_4 + 1)(F + G + k^2 d_4 + 1) + (G + F)(GF - a_3 b_3 \mu_1 \mu_2 u^* v^*)}{f_3'(u^*) k^2 a_3 \mu_1 u^* v^* - G k^2 f_4'(v^*) v^* - f_4'(v^*) k^2 v^* (k^2 d_4 + 1)} + \frac{\xi_1^* (F k^2 f_3'(u^*) u^* + k^2 f_3'(u^*) u^* (k^2 d_4 + 1) - k^2 f_4'(v^*) b_3 \mu_2 u^* v^*)}{f_3'(u^*) k^2 a_3 \mu_1 u^* v^* - G k^2 f_4'(v^*) v^* - f_4'(v^*) k^2 v^* (k^2 d_4 + 1)} = H_{13}(k)。$$

因此,  $e_3$  局部渐近稳定的条件为  $\xi_2^* < \min\{H_{11}(k), H_{12}(k), H_{13}(k)\}$ , 否则, 不稳定。

情况 2  $f_3'(u^*) > 0, f_4'(v^*) > 0$ 。

$$h_6) f_3'(u^*)k^2 a_3 \mu_1 u^* v^* - f_4'(v^*)k^2 v^* F < 0,$$

$$h_7) a_3 k^2 f_3'(u^*) \mu_1 u^* v^* - G k^2 f_4'(v^*) v^* - k^2 f_4'(v^*) v^* (k^2 d_4 + 1) < 0。$$

在该情况下, 并且满足条件  $h_6), h_7)$ , 可以保证  $H_1(k) > 0$ , 并且  $H_2(k)H_1(k) - H_0(k) > 0$  对所有波数  $k$  成立, 通过简单的计算, 得到  $H_0(k) > 0$  总是成立, 因此,  $e_3$  对任意的  $\xi_2^*$  总是局部渐近稳定的。

情况 3  $f_3'(u^*) = 0, f_4'(v^*) = 0$ 。

在此情况下,  $H_1(k) > 0, H_0(k) > 0$  和  $H_2(k) \cdot H_1(k) - H_0(k) > 0$ , 所以  $e_3$  总是局部渐近稳定的。

情况 4  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) > 0$ 。

在此情况下, 为了得到  $H_1(k) > 0, H_0(k) > 0$  和  $H_2(k)H_1(k) - H_0(k) > 0$  对所有波数  $k$  成立, 固定  $\xi_1^*$ , 且需要有以下 3 个边界:

$$\xi_2^* > H_{11}(k), \xi_2^* > H_{12}(k), \xi_2^* > H_{13}(k),$$

因此,  $e_3$  局部渐近稳定的条件为  $\xi_2^* > \max\{H_{11}(k), H_{12}(k), H_{13}(k)\}$ 。

情况 5  $f_3'(u^*) > 0, f_4'(v^*) < 0$ 。

在该情况下, 为了得到  $H_1(k) > 0, H_0(k) >$

$$h_5) (G + F)(k^2 d_4 + 1)(F + G + k^2 d_4 + 1) + (G + F)(GF - a_3 \mu_1 b_3 \mu_2 u^* v^*) +$$

$$\xi_1^* (F k^2 f_3'(u^*) u^* + k^2 f_3'(u^*) u^* (k^2 d_4 + 1) - k^2 f_4'(v^*) b_3 \mu_2 u^* v^*) > 0。$$

在该情况下, 且  $f_3'(u^*), f_4'(v^*)$  取值满足条件  $h_1) \sim h_5)$ , 为了保证  $H_1(k) > 0, H_0(k) > 0$  和  $H_2(k)H_1(k) - H_0(k) > 0$  对所有的波数  $k$  成立, 同时, 为了便于讨论, 固定  $\xi_1^*$ , 则有以下 3 个边界:

0 和  $H_2(k)H_1(k) - H_0(k) > 0$  对所有波数  $k$  成立, 固定  $\xi_1^*$ , 且需要有以下 3 个边界:

$$\xi_2^* < H_{11}(k), \xi_2^* < H_{12}(k), \xi_2^* < H_{13}(k),$$

因此,  $e_3$  局部渐近稳定的条件为  $\xi_2^* < \min\{H_{11}(k), H_{12}(k), H_{13}(k)\}$ 。

由此可以获得以下定理:

**定理 3** 假设  $\frac{b_3}{a_2} < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_3}$  和  $f_1'(u^*) =$

$$f_2'(v^*) = 0,$$

1) 如果  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) < 0$ , 当  $\xi_2^* < \min\{H_{11}(k), H_{12}(k), H_{13}(k)\}$  时,  $e_3$  局部渐近稳定。

2) 如果  $f_3'(u^*) > 0, f_4'(v^*) > 0$ ,  $e_3$  总是局部渐近稳定。

3) 如果  $f_3'(u^*) = 0, f_4'(v^*) = 0$ ,  $e_3$  总是局部渐近稳定。

4) 如果  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) > 0$ , 当  $\xi_2^* > \max\{H_{11}(k), H_{12}(k), H_{13}(k)\}$  时,  $e_3$  局部渐近稳定。

5) 如果  $f_3'(u^*) > 0, f_4'(v^*) < 0$ , 当  $\xi_2^* < \min\{H_{11}(k), H_{12}(k), H_{13}(k)\}$  时,  $e_3$  局部渐近稳定。

下面将利用数值模拟来说明定理 3 不均匀分布的稳态模式。

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) + \xi_1 \nabla \cdot (u \nabla z) + u(1 - 2u - v), & (0, 40) \times \mathbf{R}_+, \\ v_t = \Delta v - \chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w) + \xi_2 \nabla \cdot (v \nabla z) + v(1 - 2v - 3u), & (0, 40) \times \mathbf{R}_+, \\ w_t = \Delta w - w + 9u/(1 + 9u^2) + 9v/(1 + 9v^2), & (0, 40) \times \mathbf{R}_+, \\ z_t = \Delta z - z + f_3(u) + f_4(v), & (0, 40) \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), w(x, 0) = w_0(x), z(x, 0) = z_0(x) & (0, 40), \\ u'(0, t) = u'(40, t) = 0, v'(0, t) = v'(40, t) = 0, & t \in \mathbf{R}_+, \\ w'(0, t) = w'(40, t) = 0, z'(0, t) = z'(40, t) = 0, & t \in \mathbf{R}_+, \end{cases} \quad (54)$$

所以  $u^* = v^* = \frac{1}{3}$ 。对于这个模型，波数  $k = \frac{n\pi}{40}$ ，

其中， $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

首先，选择  $f_3(u) = \frac{20u}{1 + 18u^2}, f_4(v) = \frac{20v}{1 + 18v^2}$ ，

在这种情况下， $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) < 0$ ，并选择

$\chi_1 = \chi_2 = 10$ ，固定  $\xi_1 = 2$ ，则

$$H_{11}\left(\frac{n\pi}{40}\right) = \frac{3\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{86}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{5}{3}}{\frac{20}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2},$$

$$H_{12}\left(\frac{n\pi}{40}\right) = \frac{\left(\frac{n\pi}{40}\right)^6 + \frac{23}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{95}{81}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{1}{3}}{\frac{20}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{20}{81}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2},$$

$$H_{13}\left(\frac{n\pi}{40}\right) = \frac{\left(2\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{4}{3}\right)\left(4\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{20}{3}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{80}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{160}{81}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2\right)}{\frac{40}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{80}{81}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2}.$$

通过计算得  $\min_k \{H_{11}(k), H_{12}(k), H_{13}(k)\} = \chi_2 = 10$ ，固定  $\xi_1 = 2$ ，则

$$H_{12}\left(\frac{13\pi}{40}\right) = 3.4023.$$

使用初值  $(u_0, v_0, w_0, z_0) = (0.3, 0.3, 2.3, 2.3) + (0.01, 0.01, 0.01, 0.01)\cos x$ ，则通过定理 3 中的 1) 可知，如果  $\xi_2^* < 3.4023$ ， $e_3$  是局部渐近稳定的，当  $\xi_2^* = 3.1$  时，结果如图 1 所示，可以看到  $e_3$  是局部渐近稳定的。当  $\xi_2^* = 3.5$  时，结果如图 2 所示，可以看到  $e_3$  是不稳定的。

接着，仍然使用  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ，选择  $f_3(u) = u, f_4(v) = v$ ，这种情况下， $f_3'(u^*) > 0, f_4'(v^*) > 0$ 。选择  $\xi_2 = 2$  和  $\xi_2 = 200$ ，结果如图 3 和图 4 所示。

接下来选择  $f_3(u) = \frac{20u}{1 + 18u^2}$  和  $f_4(v) = v$ ，

因此， $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) > 0$ 。同时选择  $\chi_1 =$

$$H_{11}\left(\frac{n\pi}{40}\right) = \frac{3\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{86}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2}, \quad H_{12}\left(\frac{n\pi}{40}\right) = \frac{\left(\frac{n\pi}{40}\right)^6 - \frac{4}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \left(\frac{22}{9} - \frac{80}{81}\right)\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{1}{3}}{-\frac{20}{81}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 - \frac{2}{9}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2},$$

$$H_{13}\left(\frac{n\pi}{40}\right) = \frac{\left(2\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{4}{3}\right)\left(4\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{20}{3}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{80}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{218}{81}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2\right)}{-\frac{2}{3}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 - \frac{4}{9}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2}.$$

通过计算可知， $H_{41}\left(\frac{n\pi}{40}\right) < 0, H_{42}\left(\frac{n\pi}{40}\right) < 0, H_{43}\left(\frac{n\pi}{40}\right) < 0$ ，对所有  $n > 0$  成立。因此，对任意的  $\xi_2 > 0$ ， $e_3$  总是局部渐近稳定的。选择

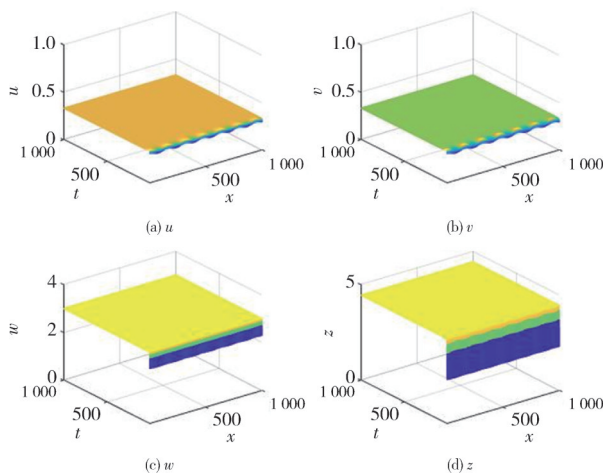


图 1  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) < 0, \xi_2^* = 3.1$   
Fig. 1  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) < 0, \xi_2^* = 3.1$

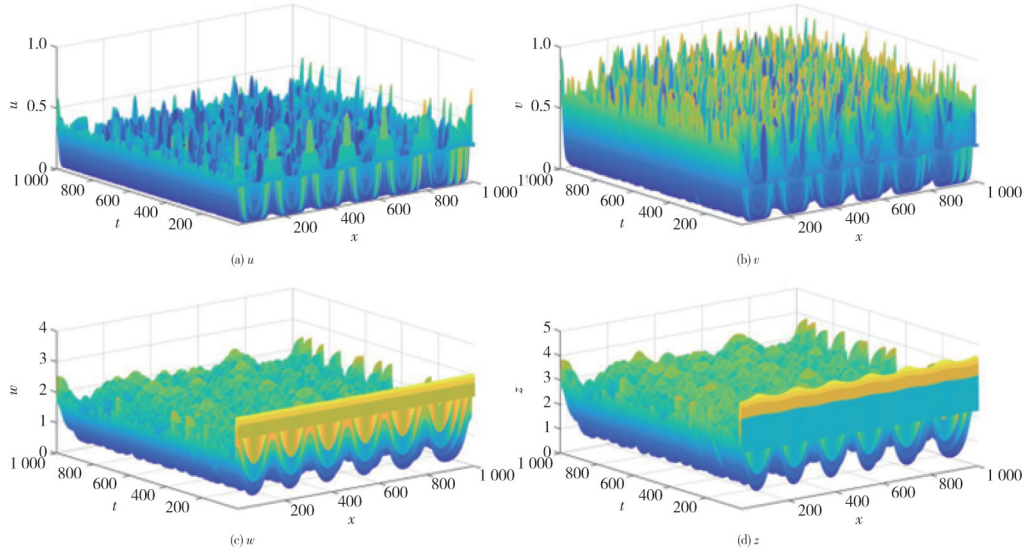


图2  $f'_3(u^*) < 0, f'_4(v^*) < 0, \xi_2^* = 3.5$   
 Fig.2  $f'_3(u^*) < 0, f'_4(v^*) < 0, \xi_2^* = 3.5$

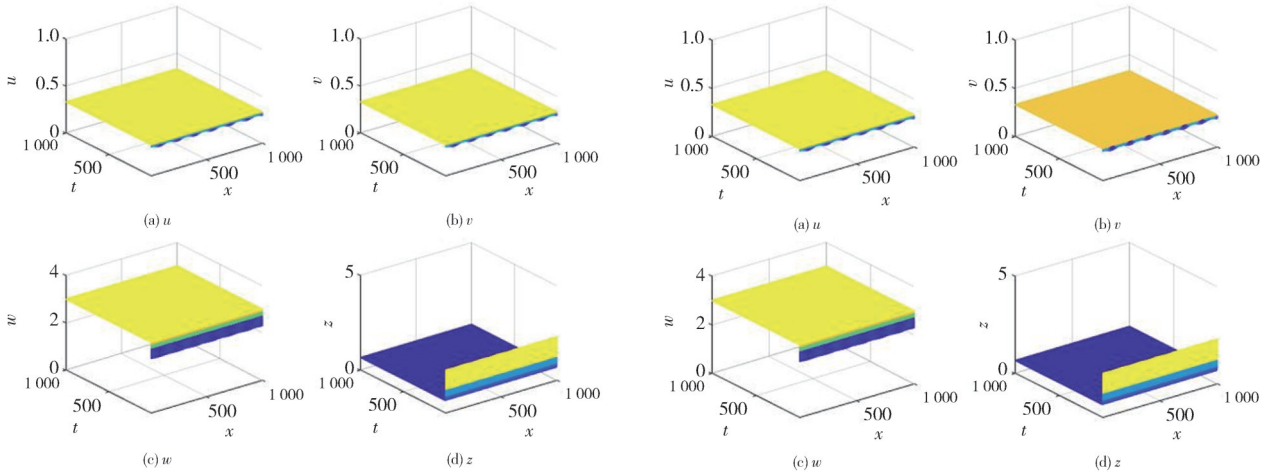


图3  $f'_3(u^*) > 0, f'_4(v^*) > 0, \xi_2 = 2$   
 Fig.3  $f'_3(u^*) > 0, f'_4(v^*) > 0, \xi_2 = 2$

图4  $f'_3(u^*) > 0, f'_4(v^*) > 0, \xi_2 = 200$   
 Fig.4  $f'_3(u^*) > 0, f'_4(v^*) > 0, \xi_2 = 200$

$\xi_2 = 1$ 和 $\xi_2 = 200$ , 结果如图5和图6所示。

$f'_3(u^*) > 0, f'_4(v^*) < 0$ , 选择 $\chi_1 = \chi_2 = 10$ , 固定

当选择  $f_3(u) = u, f_4(v) = \frac{20v}{1 + 18v^2}$  时,  $\xi_1 = 2$ , 则

$$H_{11}\left(\frac{n\pi}{40}\right) = \frac{3\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + 16\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{5}{3}}{\frac{20}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2}, \quad H_{12}\left(\frac{n\pi}{40}\right) = \frac{\left(\frac{n\pi}{40}\right)^6 + 3\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \left(\frac{5}{3} + \frac{76}{81}\right)\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{1}{3}}{\frac{20}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{49}{81}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2},$$

$$H_{13}\left(\frac{n\pi}{40}\right) = \frac{\left(2\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{4}{3}\right)\left(4\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{20}{3}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 + \frac{8}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{76}{81}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2\right) + \frac{1}{3}}{\frac{40}{27}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^4 + \frac{109}{81}\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2}.$$

通过计算得  $\min_k \{H_{11}(k), H_{12}(k), H_{13}(k)\} = H_{12}\left(\frac{11\pi}{40}\right) = 5.0507$ 。

基于定理3的讨论, 可以说如果  $\xi_2^* < 5.0507$ ,  $e_3$  局部渐近稳定。如果  $\xi_2^* > 5.0507$ ,  $e_3$  不稳定。由此, 选择  $\xi_2 = 5$ , 结

果如图 7 所示, 选择  $\xi_2=5.2$ , 结果如图 8 所示。

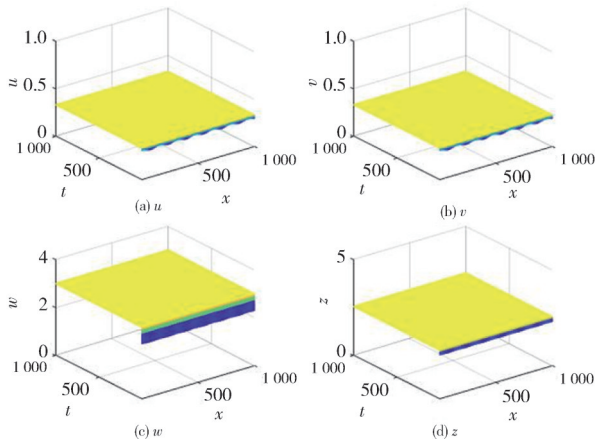


图 5  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) > 0, \xi_2 = 1$   
 Fig. 5  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) > 0, \xi_2 = 1$

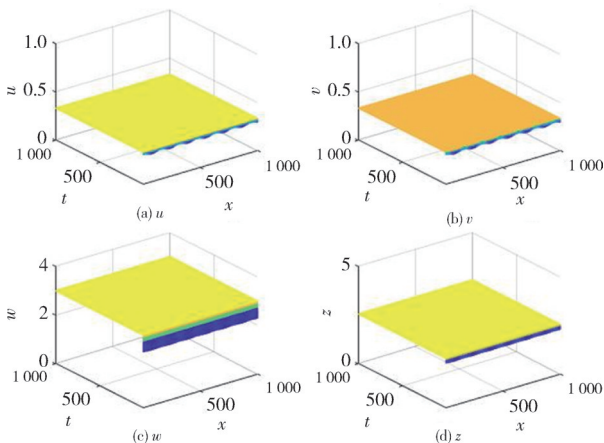


图 6  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) > 0, \xi_2 = 200$   
 Fig. 6  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) > 0, \xi_2 = 200$

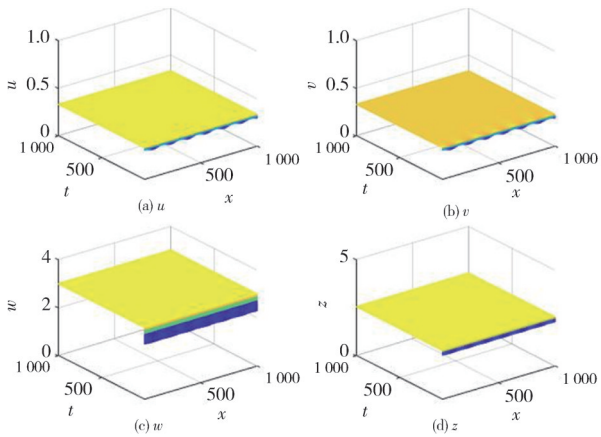


图 7  $f_3'(u^*) > 0, f_4'(v^*) < 0, \xi_2 = 5$   
 Fig. 7  $f_3'(u^*) > 0, f_4'(v^*) < 0, \xi_2 = 5$

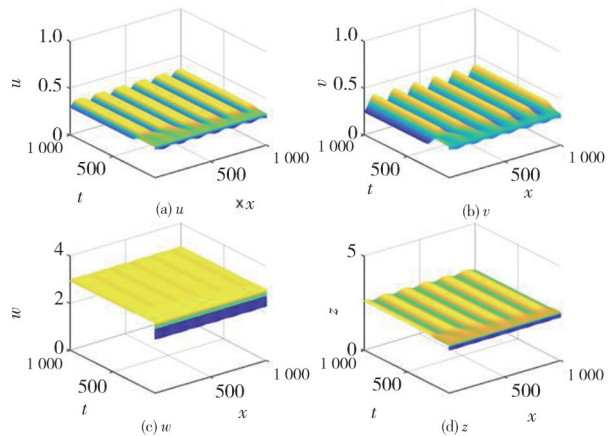


图 8  $f_3'(u^*) > 0, f_4'(v^*) < 0, \xi_2 = 5.2$   
 Fig. 8  $f_3'(u^*) > 0, f_4'(v^*) < 0, \xi_2 = 5.2$

### 4 结 论

本文研究了一个两物种吸引-排斥趋化的竞争系统, 特别地, 还研究了一般的信号产生机制, 涵盖了物种密度大会减少信号产生的现象。同时, 研究了解的全局有界性, 并构造了 Lyapunov 泛函来研究解的长时间行为。此外, 还利用线性稳定性分析方法研究了非零常稳态的局部稳定性。数值模拟结果表明, 式(1)可以在一些特殊的信号产生机制中产生复杂的模式和丰富的动力学行为。

在本文的模型中, 虽然不容易给出  $\mu_1, \mu_2$  决定  $e_3$  稳定性的关系, 但是可以通过模拟显示  $\mu_1, \mu_2$  对式(54)的斑图形成的影响。在定理 3 的条件下, 如果固定  $d_i (i=1, 2, 3, 4), \mu_i (i=1, 2)$ , 并选择合适的  $a_i, b_i (i=1, 2, 3)$  满足  $\frac{b_3}{a_2} < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_3}$ , 当选择不同的  $f_i$  和  $\xi_2$  时, 恒定共存稳态可能会形成斑图。当选择某些特殊函数  $f_3(u) = \frac{20u}{1+18u^2}$ ,  $f_4(v) = \frac{20v}{1+18v^2}$ , 满足  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) < 0$ , 从图 1 和图 2 可以看出, 当选择  $\xi_2^* < \min\{H_{11}(k), H_{12}(k), H_{13}(k)\}$ ,  $e_3$  局部渐近稳定, 当选择  $\xi_2^*$  足够大时,  $e_3$  失去稳定性。接着当选择  $f_3'(u^*) > 0, f_4'(v^*) > 0$ , 从图 3 和图 4 可以看出, 不论  $\xi_2$  取值大或取值小,  $e_3$  总是局部渐近稳定的。当选择  $f_3'(u^*) < 0, f_4'(v^*) > 0$  时, 从图 5 可以看出, 如果  $\xi_2$  取值较小,  $e_3$  局部渐近稳定, 如果  $\xi_2$  取值较大, 从图 6 可以看出,  $e_3$  也是局部渐近稳定的, 因此, 不论  $\xi_2$  取值大或小,  $e_3$  总是局部渐

近稳定的。最后, 当  $f_3'(u^*) > 0$ ,  $f_4'(v^*) < 0$ , 从图 7 和图 8 可以看出, 如果  $\xi_2$  取值较小, 则  $e_3$  局部渐近稳定, 如果  $\xi_2$  取值变大,  $e_3$  变得不稳定并出现稳定的时空聚集模式。另外, 本文没有研究式(54)的稳态解, 但数值模拟结果表明, 在同时考虑吸引-排斥竞争效应时, 不同的种群增长率可以导致式(54)产生不同的模式。

#### 参考文献:

- [1] KELLER E F, SEGEL L A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1970, 26(3): 399-415.
- [2] HERRERO M A, VELÁZQUEZ J J L. A blow-up mechanism for a chemotaxis model [J]. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 1997, 24(4): 633-683.
- [3] HILLEN T, PAINTER K J. A user's guide to PDE models for chemotaxis [J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2009, 58(1/2): 183-217.
- [4] HORSTMANN D, WINKLER M. Boundedness vs. blow-up in a chemotaxis system [J]. *Journal of Differential Equations*, 2005, 215(1): 52-107.
- [5] JÄGER W, LUCKHAUS S. On explosions of solutions to a system of partial differential equations modeling chemotaxis [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1992, 329(2): 819-824.
- [6] Free energy and self-interacting particles [M]. Boston: Birkhäuser, 2005.
- [7] WANG Z, HILLEN T. Classical solutions and pattern formation for a volume filling chemotaxis model [J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2007, 17(3): 037108.
- [8] WINKLER M. Aggregation vs. global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller - Segel model [J]. *Journal of Differential Equations*, 2010, 248(12): 2889-2905.
- [9] CHUAI M, ZENG W, YANG X, et al. Cell movement during chick primitive streak formation [J]. *Developmental Biology*, 2006, 296(1): 137-149.
- [10] EISENBACH M, TAMADA A, OMANN G M, et al. Chemotaxis [M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2004.
- [11] GATES M A, COUPE V M, TORRES E M, et al. Spatially and temporally restricted chemoattractive and chemorepulsive cues direct the formation of the nigro-striatal circuit [J]. *European Journal of Neuroscience*, 2004, 19(4): 831-844.
- [12] PAINTER K J, HILLEN T. Volume-filling and quorum-sensing in models for chemosensitive movement [J]. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 2002, 10(4): 501-543.
- [13] BAI X L, WINKLER M. Equilibration in a fully parabolic two-species chemotaxis system with competitive kinetics [J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 2016, 65(2): 553-583.
- [14] GAO J, GUO S. Global dynamics and spatio-temporal patterns in a two-species chemotaxis system with two chemicals [J]. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik*, 2021, 72: 1-28.
- [15] PAINTER K J. Continuous models for cell migration in tissues and applications to cell sorting via differential chemotaxis [J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2009, 71(5): 1117-1147.
- [16] KNÚTSDÓTTIR H, PÁLSSON E, EDELSTEIN-KESHET L. Mathematical model of macrophage-facilitated breast cancer cells invasion [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2014, 357: 184-199.
- [17] LI X, WANG Y. Boundedness in a two-species chemotaxis parabolic system with two chemicals [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, 2017, 22(7): 2719-2729.
- [18] BLACK T. Global existence and asymptotic stability in a competitive two-species chemotaxis system with two signals [J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B*, 2017, 22(4): 1253-1272.
- [19] QIU H, GUO S. Global existence and stability in a two-species chemotaxis system [J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B*, 2019, 24(4): 1569-1587.
- [20] WANG L, ZHANG J, MU C, et al. Boundedness and stabilization in a two-species chemotaxis system with two chemicals [J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B*, 2020, 25(1): 191-221.
- [21] LIN K, XIANG T. On boundedness, gradient estimate, blow-up and convergence in a two-species and two-stimuli chemotaxis system with/without loop [J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2020, 59(4): 108.
- [22] TAO Y, WINKLER M. Boundedness vs. blow-up in a two-species chemotaxis system with two chemicals [J]. *Discrete and Continuous Dynamical System, Series B*, 2015, 20(9): 3165-3183.
- [23] TU X, MU C, QIU S, et al. Boundedness in the higher-dimensional fully parabolic chemotaxis-competition

- system with loop [J]. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik*, 2020, 71(6): 1-18.
- [24] YU H, WANG W, ZHENG S. Criteria on global boundedness versus finite time blow-up to a two-species chemotaxis system with two chemicals [J]. *Nonlinearity*, 2018, 31(2): 502.
- [25] HU R L, ZHENG P. Global stability in a two-species attraction-repulsion system with competitive and nonlocal kinetics [J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2024, 36(3): 2555-2592.
- [26] ZHENG P, HU R, SHAN W. On a two-species attraction-repulsion chemotaxis system with nonlocal terms [J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2023, 33(4): 57.
- [27] LIU A, DAI B, CHEN Y. Boundedness in a two species attraction-repulsion chemotaxis system with two chemicals [J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B*, 2022, 27(10): 6037.
- [28] WANG Y, GUO S. Dynamics for a two-species competitive Keller-Segel chemotaxis system with a free boundary [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2021, 502(2): 125259.
- [29] WANG Y, GUO S. Traveling wave solutions for a two-species competitive Keller-Segel chemotaxis system [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2023, 73: 103900.
- [30] TAO Y, WANG Z A. Competing effects of attraction vs. repulsion in chemotaxis [J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2013, 23(1): 1-36.
- [31] JIN H Y, LIU Z, SHI S, et al. Boundedness and stabilization in a two-species chemotaxis-competition system with signal-dependent diffusion and sensitivity [J]. *Journal of Differential Equations*, 2019, 267(1): 494-524.
- [32] BILER P, ESPEJO E E, GUERRA I. Blowup in higher dimensional two species chemotactic systems [J]. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 2013, 12(1): 89-98.
- [33] DAI B, SUN G. Turing-Hopf bifurcation of a delayed diffusive predator-prey system with chemotaxis and fear effect [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2021, 111: 106644.