

基于求解 TSP 的量子深度玻尔兹曼机算法

王诚鑫

(青岛理工大学 信息与控制工程学院, 青岛 266525)

摘要:玻尔兹曼机(BM)可以用于存储和回收数据。它在联想记忆、模式识别、优化计算等领域有广泛应用前景。然而,传统 BM 在解决一些问题时,存在重叠度大、随机性高等问题,只适合处理少量的数据。为了扩展其应用领域而提出一种新方案,采用量子计算的思想来设计哈密顿量作为深度玻尔兹曼机(DBM)的能量函数,代替传统的计算方法,以增强其广泛性和弹性。与传统 BM 不同,新的方案根据参数化量子电路(PQC),建立代价函数去量化问题,使得搜索过程愈加便利。这在很大程度上解决了 BM 的数据重复和过度冗余问题。为验证该方案的可行性,将其与传统 DBM 解决旅行商问题(TSP)的数据容纳度和模型收敛速度进行了比较。实验结果表明,基于量子计算改进的 DBM 在训练准确度上比传统 DBM 提升约 33%,且损失率明显低于传统 DBM,为其在实际应用中提供了更广泛的可能性。

关键词:量子机器学习;玻尔兹曼机;旅行商问题;参数化量子电路

中图分类号:TP181;TP301

文献标志码:A

文章编号:1673-4602(2025)06-0142-07

Quantum deep Boltzmann machine algorithm based on solving traveling salesman problem

WANG Chengxin

(School of Information and Control Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266525, China)

Abstract: Boltzmann machine (BM) can be used to store and recover data and has a prospect of wide application in the fields of associative memory, pattern recognition and optimal computation. However, the traditional BM suffers from large overlap and high randomness in solving some problems, and is only suitable for handling a small amount of data. To extend its area of application, a new scheme is proposed that adopts the idea of quantum computing to design the Hamiltonian quantity as the energy function of deep Boltzmann machine (DBM), aiming to replace the traditional computational method and enhance its extensiveness and resilience. Unlike the traditional BM, the new scheme builds the cost function to quantize the problem based on parameterized quantum circuit (PQC), making the search process more friendly. This solves the problems of data duplication and excessive redundancy in BM to a large extent. To verify the feasibility of the scheme, its data storage accommodation and model convergence speed are compared with that of the traditional DBM in solving the traveling salesman problem (TSP). The experimental results show that the training accuracy of the improved DBM based on quantum computing improves by about 33% compared

收稿日期:2024-01-19

基金项目:山东省自然科学基金(ZR2021MF049)

作者简介:王诚鑫(1999—),男,河北秦皇岛人。硕士,研究方向为量子机器学习。E-mail:1454753810@qq.com。

with the traditional DBM, and the loss rate is significantly lower than that of the traditional DBM, which provides a wider range of possibilities for its practical application.

Key words: quantum machine learning; boltzmann machine; traveling salesman problem; parameterized quantum circuit

近年来,量子机器学习的发展日益蓬勃,作为量子计算和机器学习的融合领域,被广泛应用在神经网络^[1]、人工智能^[2]、图像识别^[3]等领域。使用量子进行计算的算法对于机器学习算法来说,可以提高后者的速度,并且扩大应用的规模,以构建更理想的数据模型。例如,量子支持向量机、量子卷积神经网络等都已经进一步研究。一个算法转化为量子问题是一个正在流行的概念,在高效学习、计算能力和实用程度方面还需要进一步被开拓。

量子玻尔兹曼机(QBM)属于量子机器学习算法^[4],是经典玻尔兹曼机(BM)模型的量子对偶。KIEFEROVA 等^[5]验证了断层扫描和量子玻尔兹曼机训练之间的联系,提供了生成模型的输入量子态的形式;AMIN 等^[6]提出了受到玻尔兹曼分布启发的量子玻尔兹曼机,利用量子力学的非对易性将训练过程变得不平凡。目前,量子玻尔兹曼机模型依然是启发研究的一大主题。本文使用了构建深度玻尔兹曼机的量子版本,用来探索 QBM 面对需求问题时的性能。

旅行商问题(TSP)是一种典型的组合优化问题,也是所谓的非确定性多项式难题(NP 难题)。这意味着固定的多项式方程不能够全面地解决所有可能发生的情况^[7],通常只能使用各类遗传算法和仿生算法等寻找次优解。经典 BM 也会被用作一种解法,然而,错误率并不能得到稳固改善。因此提供了一种新思路,以构建覆盖规模更大的方法解决这个难题,选择合适的初始状态可能有助于尽快找到解。

考虑到玻尔兹曼机的局限性,提出了一种基于量子计算的改进方案,即设计量子深度玻尔兹曼机(QC-DBM)来近似精确解,这不同于反向传播的深度置信网络^[8]。首先,构建的量子版本的深度玻尔兹曼机具有双向性,这会增强浏览数据的准确性,为了避免学习过冗余,通常使用蒙特卡罗方法进行无监督学习下的训练。改进的 QC-DBM 会利用量子计算的并行性增强数据的可用性,避免重复出现的情况,能够在扩大的解域中靠近最佳答案。

此外,由于包含数据的范围更全面,可用解的数量也会变多,能够面对的问题规模也随之扩大。因此,对 QC-DBM 进行了数据实验,经过分析发现,对待不同规模的 TSP 其都比经典的深度玻尔兹曼机(DBM)有了很大的改进,使得 QC-DBM 比经典 DBM 更为高效实用。这有望将 DBM 更广泛地应用于神经网络、图像分类、量子加密等领域。

本文提出量子深度玻尔兹曼机,建立量子哈密顿量形式进行学习训练,将经典的 BM 与 QC-DBM 机进行对比,并应用二者解决 TSP,通过数值实验模拟展示出 QC-DBM 的各项性能与应用优势,并进行复杂度计算。

1 玻尔兹曼机模型

1.1 受限玻尔兹曼机

玻尔兹曼机(BM)是一种广泛应用于深度学习的随机递归神经网络,包含可见层和隐含层,所有节点都相互连接。它基于统计力学角度,服从玻尔兹曼分布在能量角度上表征能量函数概率分布。受限玻尔兹曼机(RBM)是一种基于 BM 简化的二分图模型,其在可见层和隐含层之间的节点是全连接的,但同一层内的节点之间并不连接,因此通常 RBM 更适用于实际讨论。它们的结构如图 1 所示。

对于一组给定的状态 (v, h) ,RBM 系统有能量函数可定义为

$$E_{\theta}(v, h) = - \sum_{i=1}^{n_v} a_i v_i - \sum_{j=1}^{n_h} b_j h_j - \sum_{i=1}^{n_v} \sum_{j=1}^{n_h} v_i h_j \omega_{ij} \quad (1)$$

式中: $E_{\theta}(v, h)$ 为能量函数; $v_i = [v_1, v_2, \dots, v_{n_v}]^T$ 为输入的可见层节点; $h_j = [h_1, h_2, \dots, h_{n_h}]^T$ 为 RBM 的隐含层节点; ω_{ij} 为层连接的权重; a_i 为可见变量的偏置; b_j 为隐含变量的偏置; n_v 和 n_h 分别为可见层和隐含层的节点数目; $\theta \in \{a_i, b_j, \omega_{ij}\}$ 。

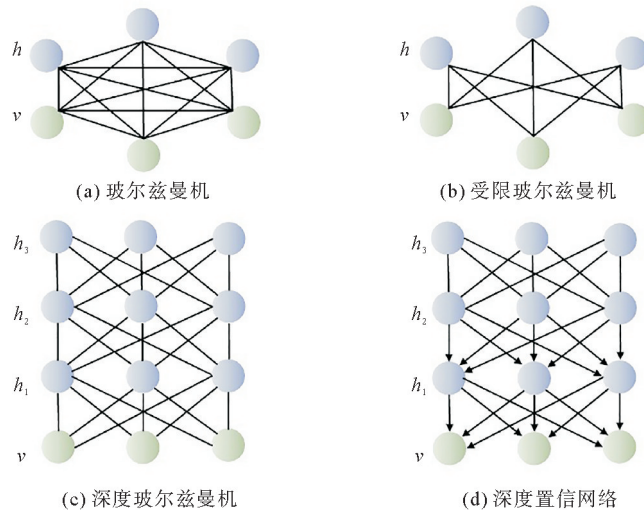


图 1 不同种类玻尔兹曼机模型的连接结构

利用式(1),定义联合分布概率 $P_{\theta}(v, h)$:

$$P_{\theta}(v, h) = \frac{1}{Z_{\theta}} e^{-E_{\theta}(v, h)} \tag{2}$$

式中: $Z_{\theta} = \sum_{v, h} e^{-E_{\theta}(v, h)}$, 为具有归一化作用的配分函数。

可见层和隐含层的边缘条件概率分布各自如下:

$$\begin{cases} P(v | h) = \prod_{i=1}^{n_v} p(v_i | h) = \prod_{j=1}^{n_h} \sigma(a_i + \sum_{j=1}^{n_h} h_j w_{ij}) \\ P(h | v) = \prod_{j=1}^{n_h} p(h_j | v) = \prod_{i=1}^{n_v} \sigma(b_j + \sum_{i=1}^{n_v} v_i w_{ij}) \end{cases} \tag{3}$$

式中: $\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ 为 sigmoid 函数。

在训练中,仅使用吉布斯采样进行随机初始化十分缓慢,使用 CD- k 算法实现优化。 k 表示采样步数,CD- k 算法代表 k 次 CD-1 算法的迭代。更新参数的梯度公式为

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \mathbf{W} + \Delta \mathbf{w}_{ij} \\ \mathbf{a} = \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}_i \\ \mathbf{b} = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j \end{cases} \tag{4}$$

式中: \mathbf{W} 为可见层与隐含层之间的权重矩阵; $\Delta \mathbf{w}_{ij}$ 为更新项; $\mathbf{a}, \Delta \mathbf{a}_i$ 分别为可见层单元的偏置项和梯度更新项; $\mathbf{b}, \Delta \mathbf{b}_j$ 分别为隐藏层单元的偏置项和梯度更新项。

由此产生迭代后的训练结果。如果是普通的 BM,通常采用随机抽样,但是在这种途径下得到的结果随机性太强,使用 RBM 能够避免该问题频繁出现^[9]。

1.2 深度玻尔兹曼机

深度玻尔兹曼机(DBM)和深度置信网络(DBN)的建模思想相似,都是 RBM 结构的叠加^[10],具有一个可见层和若干个隐含层,层与层之间是全连接的,层内单元是不连结的。其区别在于 DBM 所有层之间都是双向连接的,DBN 除顶端两层间双向连接之外,其他层连接都是单向向下的。

它们的学习过程也很相似,以图 1 中一个三层结构 $G = (v, h^{(1)}, h^{(2)})$ 为例,其能量函数为

$$E(v, h^{(1)}, h^{(2)}) = v^T \mathbf{W}^{(1)} \mathbf{h}^{(1)} + \mathbf{h}^{(1)T} \mathbf{W}^{(2)} \mathbf{h}^{(2)} \tag{5}$$

式中: $v \in \{0, 1\}$ 为可见节点状态; $h^{(1)} \in \{0, 1\}$ 为第 1 层隐含节点状态; $\mathbf{W}^{(1)}$ 为第 1 层单元连接权值; $h^{(2)} \in \{0, 1\}$ 为第 2 层隐含单元状态; $\mathbf{W}^{(2)}$ 为第 2 层单元连接权值,此处忽略偏置。

该能量函数以矩阵形式出现,有助于简化和计算,得到联合概率分布:

$$P(v, h; \theta) = \frac{1}{Z_{\theta, h^{(1)}, h^{(2)}}} \sum e^{-E(v, h; \theta)} \quad (6)$$

DBM 在训练中分为预训练和微调两个阶段。在预训练中实行逐层训练方法,用上一层 RBM 的参数初始化下一层 RBM,单层训练方法与 RBM 一致。利用 CD- k 算法通过吉布斯采样多次取样进行反向传播,将 $P(v, h; \theta)$ 简化为 P_v ,通过最大化平均对数似然逼近数据集定义的 P_v^{data} ,设定代价函数为

$$L = - \sum_v P_v^{\text{data}} \log P_v \quad (7)$$

进而通过计算代价函数的梯度来更新参数,在微调阶段会结合一些梯度下降算法优化参数,在迭代中以极小的步长方式进行变化:

$$\theta \leftarrow \theta + \eta (\nabla_{\theta} \log p_{\theta}(x) - \nabla_{\theta} \log p_{\theta}(\tilde{x})) \quad (8)$$

式中: x 为真实数据; \tilde{x} 为模型生成的样本; $\nabla_{\theta} \log p_{\theta}(x)$ 为真实数据对数概率的梯度; $\nabla_{\theta} \log p_{\theta}(\tilde{x})$ 为生成的样本对数概率梯度。

更新规则可以表示为

$$\Delta w_{ij} \propto \langle v_i h_j \rangle_{\text{data}} - \langle v_i h_j \rangle_{\text{model}} \quad (9)$$

通过微调可以使生成的数据尽可能近似于真实情况下的数据,降低计算消耗的成本,避免过程中过拟合现象的过度发生。DBM 通过增加隐含层的深度,比起多层 RBM 的直接堆叠,其提高了模型的表达能力,能够更好地学习到数据分布的结构和特征。但 DBM 具有大量参数,在训练中也会遇到困难。

2 量子深度玻尔兹曼机

本节提出了基于量子计算的新的 DBM 训练模型量子深度玻尔兹曼机(QC-DBM),可以改善 DBM 的不足。量子态通常用 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ 表示,可以作为叠加态出现,具有更丰富的数据范围。DBM 的能量函数用哈密顿量表示为

$$H = - \sum_i a_i \sigma_i^z - \sum_j b_j \sigma_j^z - \sum_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z w_{ij} \quad (10)$$

式中: $\sigma_i^z \equiv I_1 \otimes \cdots \otimes I_{i-1} \otimes \sigma^z \otimes I_{i+1} \cdots \otimes I_n$,且 I 与 σ^z 分别为量子力学中的恒等算子和泡利算子。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

量子玻尔兹曼机(QBM)可以用 Var QITE 达到使用变分量子算法进行实际操作的效果^[11],或者通过时间演化将非动态过程转化为动态过程进行讨论。从而可以知道密度矩阵为 $\rho = Z^{-1} e^{-H}$,进而得到

$$\langle \sigma_i^z \rangle_v = \frac{w_{ij}}{G} \tanh G \quad (12)$$

式中: $\langle \sigma_i^z \rangle_v$ 为变分状态下的泡利算子。

对于 QC-DBM 也可以依靠转化为量子态的思想,将哈密顿量表示为

$$H = - \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i^z + \sum_{i < j} \sigma_i^z \sigma_j^z J_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \sigma_i^z h_{ik} W_k + \sum_{i < j} \sum_{k=1}^M \sigma_i^z \sigma_j^z J_{ijk} W_k \quad (13)$$

式中: N 为量子比特的总数; M 为经典隐含层的总数; σ_i^z 为第 i 个量子比特的泡利矩阵; W_k 为第 k 个隐藏层的权重矩阵; h_i, J_{ij} 和 h_{ik}, J_{ijk} 分别为可调节的偏置项和交互作用强度。

概率分布为

$$P(\sigma) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\sigma)} \quad (14)$$

式中: σ 为概括描述全部量子比特的状态向量; $\beta = 1/(k_B T)$ 为玻尔兹曼因子; T 为系统温度; k_B 为玻尔兹曼常数; $H(\sigma)$ 为亚黎曼哈密顿量。

此时,可见层节点取值与经典 RBM 中的取值为 0 或 1 不同。设 2 个量子态分别为 $|v^{(0)}\rangle$ 和 $|v^{(1)}\rangle$,则它们的实际状态表示为

$$|\psi\rangle = \alpha |v^{(0)}\rangle + \beta |v^{(1)}\rangle \quad (15)$$

依靠式(15)的思维,可见层和隐含层的量子态表示为 $|\psi_x\rangle$ 和 $|\psi_y\rangle$,其中 x 和 y 表示节点的索引。在参数化量子电路(PQC)中设置 $U(\theta)$ 表征量子态的演化^[12],其中 θ 是电路参数。量子态表示为

$$\begin{aligned} |\psi_x(\theta)\rangle &= U_x(\theta)|\psi_x(0)\rangle \\ |\psi_y(\theta)\rangle &= U_y(\theta)|\psi_y(0)\rangle \end{aligned} \tag{16}$$

使用量子测量来估计梯度,参数 θ 对应 QC-DBM 的偏置,其梯度可以通过对电路参数进行微小的变化扰动来体现,并且通过测量相应变化来估计:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_{x,y}} \approx \frac{H(\theta + \delta e_{x,y}) - H(\theta)}{\delta} \tag{17}$$

式中: $e_{x,y}$ 为 $\theta_{x,y}$ 方向上的单位向量; δ 为微小扰动的整数。

旅行商问题(TSP)^[13]的一个重要目标是寻找一条经过所有“城市”的一次且回到起点的最短路径。同理,这也可以表达为使得总路径长度最小。将该目标映射到 QC-DBM 中。

- 1) 将每个“城市”编码为 QC-DBM 的一个节点,亦或是一组节点。
- 2) 将路径(“城市”之间的连接)编码为 QC-DBM 中的连接权重,以此来表示路径的长度。
- 3) 通过式(13)中的能量函数,使得最小化的总路径长度对应于最小化能量。这通常涉及到权重的设置和调控,以便于解决在 QC-DBM 最小化的情况下得到 TSP 的解。

在这里,使用 TSP 的实例进行 QC-DBM 的训练,目标是将 QC-DBM 的能量趋于最小化,利用式(7)中的代价函数继续进行衡量。在训练好的 QC-DBM 上采样,生成可能存在的采样路径,并且进行评估;统计采样中的路径总长度,重复迭代,直至找到满意的路径或者达到停止的条件。图 2 中第 1 条虚线以上的部分代表经典 QBM 的量子线路与识别部分,第 2 条虚线以下的部分代表 QC-DBM 的量子线路与识别部分。通过量子线路,将输入的复杂路径图优化成清晰分明的最佳路径图输出。需要注意的是,方法效果与 QC-DBM 设计的结构与选择的参数相关,对训练的质量也有较高的要求。

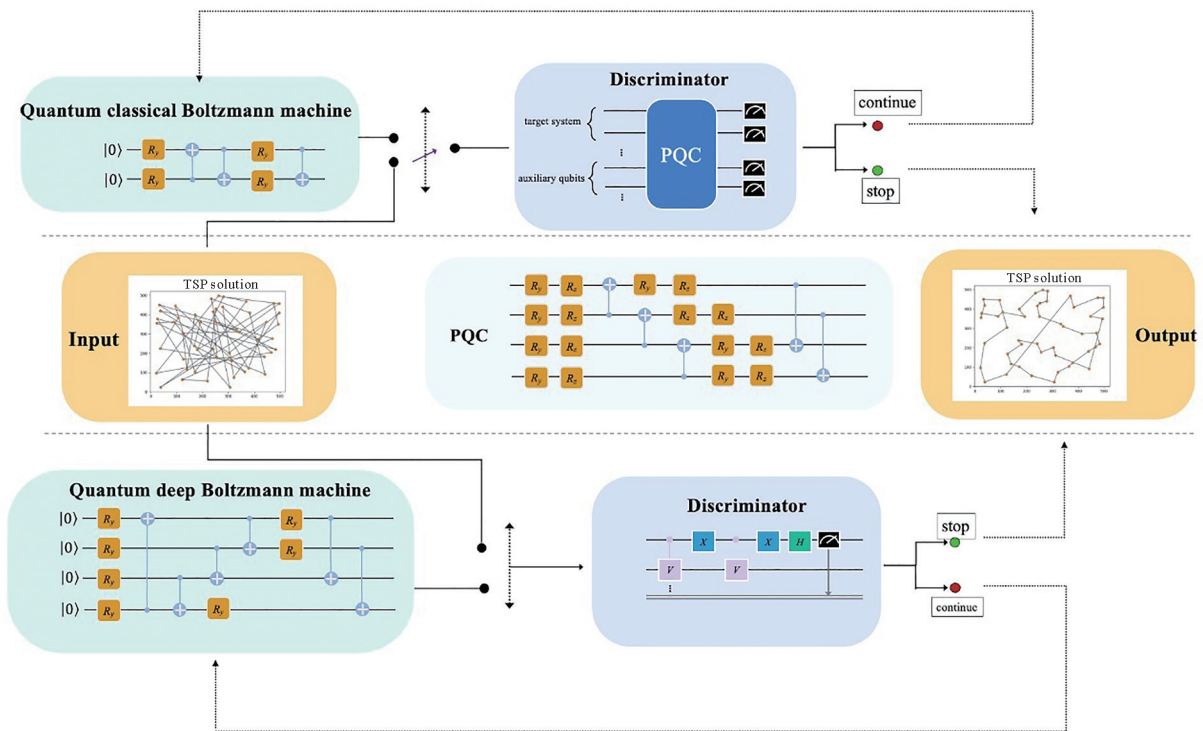


图 2 通过参数化量子电路进行判别和生成任务

为了探究 QC-DBM 是否能够解决 TSP,随机生成一组二维数据,取值范围均在 $0\sim 500$ ^[14]。根据构建的相应 PQC,执行相应的流程,并且通过判别器进行电路是否继续迭代的判断。在模拟电路中,“城市”和节点之间为非固定的“一对一”或“一对多”的关系,这与经典计算有所区分。如果已得到最佳路径就可以

停止,若是尚未发现最佳捷径,那么会继续判别流程。通过图 2 的结果对比发现, QC-DBM 可以生成解决一个 TSP 的最佳路径,与经典 DBM 的量子模型相比, QC-DBM 更为灵活,且能够应用的数据范围更广,凸显了量子计算所具备的并行性、高速性等优势。

3 结果分析

对于 QC-DBM 来说,数据的准确程度以及存储容量在各项数据匹配和近似的实验中都至关重要。本节设计了 2 个实验证明这 2 点,分别是关于 TSP 的损失率检测和寻找基态能量准确度对比。在测试中发现模型收敛速度对比以前有所提升,模型性能得到优化。

3.1 损失率检测

对于 TSP 来说,在不依赖于成本矩阵对称度的情况下,需要建立合理的数学模型。对于有向图 $G=(V, A)$,其中 G 表示图, V 是顶点集合, A 是边集合,其各自取值为 $V=U\cup\{0\}$, $|A|=|V|\times(|V|-1)$ 。

想要求解问题 $\text{Min} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}x_{ij}$ 必须满足以下条件:

$$\begin{cases} \sum_{a \in V, (a,b)} x_{ab} = 1, b \in V \\ \sum_{b \in V, (a,b)} x_{ab} = 1, a \in V \\ \sum_{a \in S} \sum_{b \in S} x_{ab} \geq 1, S \subsetneq V, |S| \geq 2 \\ x_{ij} \in \{0,1\}, (i,j) \in A \end{cases} \quad (18)$$

式中: x_{ab}, x_{ij} 为决策变量; a, b, i, j 为不同两端的节点; S 为所有可能的节点对。

在经典 BM 中,想要解决 TSP 需要定义转换参数,一个 TSP 需要用使得“城市”与节点一对一的形式来解决。在本小节中,设置 2 个不同规模的 TSP 来进行对比,它们训练后的生成数据样本会成为对比实验的重要依据。对于经典 DBM、QC-DBM 而言,模型之间差距可以用代价函数来表征,并且还可以代表可容纳程度,并且不再是一一对应,出现省略跳过的情况。

通过数据模拟发现,在进行 100 次迭代的情况下,随着容错量的增大,网络的收缩力度呈现下降趋势。图 3(a)经过 100 次迭代, QC-DBM 的代价函数在开始时就要比经典 DBM 耗损少,随着进程发展明显降低,到 0.15 开始收敛,最后低于 0.1,整体趋势要比经典 DBM 更加优越。这也说明在问题规模较小时, QC-DBM 对于迭代的容纳度要更灵活。在图 3(b)中,当问题规模扩大时,更能明显看出 QC-DBM 性能的优越之处,收敛速度更快,收敛程度更高。使用 DBM 仅能收敛到 0.2 左右,而 QC-DBM 依然接近于 0.1。在问题规模扩大的背景下,该方法依然高效实用。新的思路也为解决 TSP 提供了新的探索方式,不再拘泥于 DBM 的普通状态,而改为量子态化^[15]。

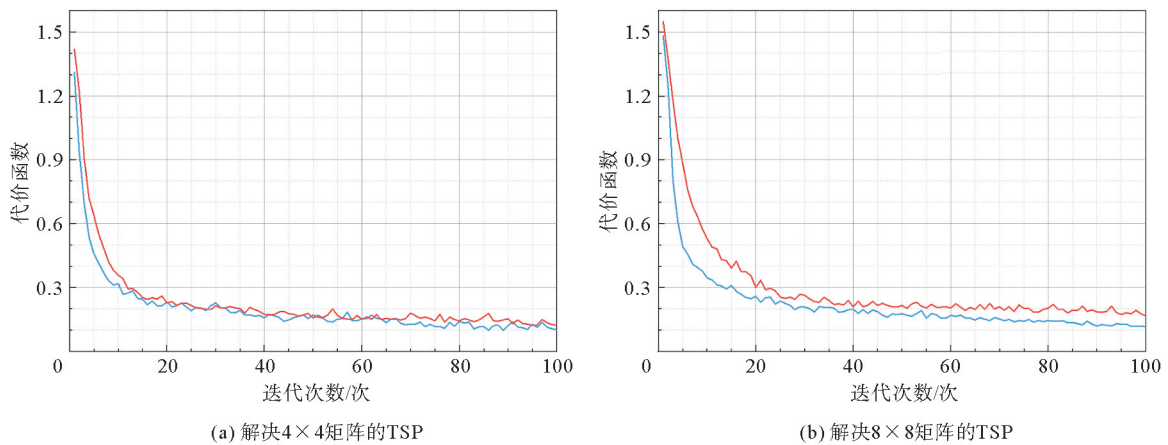


图 3 代价函数随迭代次数变化

— QC-DBM; — DBM

3.2 准确度对比

不难发现, DBM 的可使用程度可能受到迭代次数的很大影响^[16]。基于已经得到的结果, 继续对迭代次数分析, 对 DBM 和 QC-DBM 的寻找系统基态能量的性能进行比较。

图 4 观察了一个 6 个量子比特的系统, 在 100 次迭代的情况下, 进行对照实验能够发现, QC-DBM 寻找基态能量值所需阶段比 DBM 有明显优势, 并且随着进程的发展, 所取得的优势更加凸显。数值模拟显示, 从一开始 DBM 在探索过程中准确度就低得多, QC-DBM 一直处于优势状态, 并且一直领先。DBM 的发展波动更加陡峭, QC-DBM 趋于平缓。最后, 通过线条的变化趋势观察到 DBM 准确度收敛数值不足 0.95, 而 QC-DBM 能够收敛到 0.95, 准确度增加约 33%。随着测量流程的进展, 在都趋于收敛的情况下, QC-DBM 求解系统基态更有准确度优势。

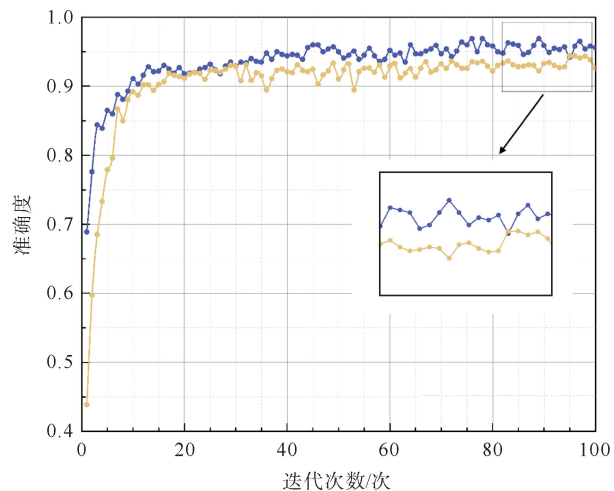


图 4 准确度随迭代次数变化示意

—●— QC-DBM; —●— DBM

4 结论

用量子计算的方法改进 DBM 是可行的, 实验证明 QC-DBM 进行训练时的平均准确率比经典 DBM 提升约 3.3%, 并且在 TSP 中, QC-DBM 的损失程度更少。这也说明 QC-DBM 在数据存储与复原、模型收敛与处理等方面性能都有所优化。

本文的改进是基于量子计算思维改善经典问题, 输入数据并制成量子态进而进行后续数据处理。目前存在的方法虽然仍旧是混合量子经典算法, 但是一系列相应的量子玻尔兹曼机模型已经取得了很大的发展, 在深度学习、组合优化、神经网络领域都会有进一步研究应用的价值。

参考文献(References):

- [1] MONACO S, KISS O, MANDARINO S, et al. Quantum phase detection generalization from marginal quantum neural network models[J]. *Physical Review B*, 2023, 107(8): L081105.
- [2] KRENN M, LANDGRAF J, FOESEL T, et al. Artificial intelligence and machine learning for quantum technologies[J]. *Physical Review A*, 2023, 107(1): 010101.
- [3] HAQUE M E, PAUL M, ULHAP A, et al. Advanced quantum image representation and compression using a DCT-EFRQI approach[J]. *Scientific Reports*, 2023, 13(1): 4129.
- [4] ZOUFAL C, LUCCHI A, WOERNER S. Variational quantum Boltzmann machines[J]. *Quantum Machine Intelligence*, 2021, 3(1): 1-15.
- [5] KIEFEROVA M, WIEBE N. Tomography and generative training with quantum Boltzmann machines[J]. *Physical Review A*, 2017, 96(6): 062327.
- [6] AMIN M H, ANDRIYASH E, ROLFE J, et al. Quantum Boltzmann machine[J]. *Physical Review X*, 2018, 8(2): 021050.
- [7] 陈晟宗, 张纪会, 于守水, 等. 求解旅行商问题的波动温控模拟退火算法[J]. *控制与决策*, 2023, 38(4): 911-920.
CHEN Shengzong, ZHANG Jihui, YU Shoushui, et al. A simulated annealing algorithm with wave temperature control for the traveling salesman problem[J]. *Control and Decisions*, 2023, 38(4): 911-920.
- [8] 刘方园, 王水花, 张煜东. 深度置信网络模型及应用研究综述[J]. *计算机工程与应用*, 2018, 54(1): 11-18.
LIU Fangyuan, WANG Shuihua, ZHANG Yudong. Survey on deep belief network model and its applications[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2018, 54(1): 11-18.
- [9] 李正权, 林媛, 李梦雅, 等. 基于判别式受限玻尔兹曼机的数字调制识别[J]. *通信学报*, 2021, 42(2): 81-91.
LI Zhengquan, LIN Yuan, LI Mengya, et al. Digital modulation recognition based on discriminative restricted Boltzmann machine[J]. *Journal on Communications*, 2021, 42(2): 81-91.