

## 串级连续搅拌反应釜的模糊自适应命令滤波离散控制

刘家硕, 辛丽平\*, 张静, 刘凯

(青岛理工大学 信息与控制工程学院, 青岛 266525)

**摘要:**针对串级连续搅拌反应釜系统,提出了一种基于命令滤波技术的模糊自适应离散控制方法。利用欧拉法对串级连续搅拌反应釜系统的数学模型进行离散化处理;引入命令滤波技术应对控制器设计过程中由反步法引起的非因果问题和“计算复杂性”问题;借助模糊自适应控制和命令滤波相结合的方法简化控制器设计过程,缩减控制系统的在线计算量;利用差分李雅普诺夫函数证明闭环系统的稳定性;MATLAB 仿真结果验证了所设计的控制器是有效可行的。与串级连续搅拌反应釜的现有连续控制方法相比,该控制策略具有更好的直观性和可实现性;与现有离散控制方法相比,该控制策略具有控制器结构简单、计算复杂度低、超调量小、控制输入量易实现等优点。

**关键词:**串级连续搅拌反应釜;离散控制;命令滤波控制;自适应反步控制

**中图分类号:**TP273 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-4602(2024)05-0120-12

## Fuzzy adaptive command filtered discrete control of cascade continuous stirred tank reactors

LIU Jiashuo, XIN Liping\*, ZHANG Jing, LIU Kai

(School of Information and Control Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266525, China)

**Abstract:** A fuzzy adaptive discrete control method is proposed for the cascade continuous stirred tank reactors system based on the command filtered technology. The mathematical model of the cascade continuous stirred tank reactors system is discretized by Euler method. The “complexity of computation” and noncausal problems caused by backstepping in the design process of the controller are solved through the command filtered technique. The design process of the controller is simplified by combining fuzzy adaptive control with command filtering, and the on-line calculation amount of the control system is also reduced. The stability of the closed-loop system is proved by using the difference Lyapunov function. MATLAB simulation results verify the effectiveness and feasibility of the proposed controller. Compared with the existing continuous control methods for the cascade continuous stirred tank reactors, the proposed control strategy has better intuitiveness and realizability. Compared with the existing discrete control methods, the advantages of the proposed control strategy

收稿日期:2023-03-09

基金项目:山东省自然科学基金资助项目(ZR2021MF076);山东省重点研发项目(2018GHY115025);中国博士后面上项目(2018M642611)

作者简介:刘家硕(1996—),男,山东莒县人。硕士,研究方向为非线性系统的模糊自适应离散控制和命令滤波离散控制等。  
E-mail:1225887783@qq.com。

\*通信作者:辛丽平(1986—),女,山东济宁人。博士,副教授,主要从事复杂系统的智能建模与控制、模式识别与检测系统等方面的研究。E-mail:lpxin@qut.edu.cn。

are as follows: the controller structure is simpler, the computation complexity is lowered, the overshoot is greatly reduced, and the input control is easier to actualize.

**Key words:** cascade continuous stirred tank reactors (CCSTR); discrete control; command filtered control; adaptive backstepping control

串级连续搅拌反应釜(cascade continuous stirred tank reactors, CCSTR)是由两个连续搅拌反应釜(CSTR)串联而成的复杂化学反应系统,具有成本低、热交换能力强、效率高等特点,是许多化工生产过程(如合成橡胶、石油生产、生物制药等)的关键设备<sup>[1]</sup>。目前关于 CCSTR 系统的过程控制,绝大多数企业仍然采用传统的 PID(或改进 PID)技术来调控系统的动静态过程<sup>[2]</sup>。然而当系统设定值相对频繁地进行较大幅度调整时或突发重大系统扰动时,这种传统的控制技术就难以提供令人满意的控制效果,甚至会出现系统不稳定的困局<sup>[3]</sup>。因此,有必要寻求一种新的实用性强的 CCSTR 系统的高效控制方案,从而为企业提高生产效率、提升经济效益提供技术支持。

近年来,有关单个连续搅拌反应釜(CSTR)系统的离散时间控制算法涌现出了一些研究成果:文献[4]针对一类未知的单输入单输出(SISO)非线性离散系统,提出了一种基于神经网络和多模型切换的非线性自适应 PID 离散控制方法,并将此方法成功应用到 CSTR 系统中;文献[5]针对 CSTR 系统的不确定性以及易受外部扰动变化的特点,提出了一种不依赖于精确模型的自抗扰离散控制策略;文献[6]基于系统辨识方法,得到了一种易于直接控制的离散状态空间模型,并在此基础上设计了一种控制性能优于常规 PID 控制的 CSTR 非线性滑模控制器;文献[7]针对一类具有死区输入的单输入单输出 CSTR 离散系统,提出了一种基于神经网络的自适应预测控制器,解决了无量纲冷却剂温度的控制问题;文献[8]针对一类具有随机饱和、随机非线性和乘性噪声的离散时变随机系统,提出了一种新的事件触发多目标控制器,以处理方差约束下的  $H_\infty$  控制问题,并将该方法成功应用于 CSTR 系统;文献[9]基于部分形式动态线性化,为 CSTR 离散非线性系统设计了一种无模型自适应滑模控制器,仿真结果表明,该控制器在存在外部干扰时仍具有良好的鲁棒性;文献[10]提出了一种基于观测器的 CSTR 离散滑模控制方法,通过设计扰动观测器以消除外部扰动对 CSTR 的影响。

上述这些控制算法仅仅是针对单一连续搅拌反应釜系统(CSTR)的,众所周知,串级连续搅拌反应釜系统(CCSTR)的复杂性较 CSTR 系统成指数增加,数学模型耦合程度更严重,这些针对 CSTR 系统的离散控制方法并不能用于 CCSTR 系统的控制。从控制的角度看,CCSTR 系统较 CSTR 系统具有更严重的非线性、复杂性和不确定性,设计其高效实用的控制器具有更大的挑战性。目前关于 CCSTR 系统离散时间控制方面的研究成果较少:文献[11]设计了 CCSTR 系统具有最小学习参数的离散时间容错控制器,采用神经网络逼近系统的未知函数,通过将一类具有执行器故障的 MIMO 系统转换为预测器形式避免离散系统的非因果问题<sup>[12]</sup>,但这种非因果问题的解决方式会导致控制器设计变得更复杂;文献[13]针对 CCSTR 离散时间系统设计了模糊自适应反步控制器,采用递推的方式解决了非因果问题,虽然使控制器设计过程变得更简单,但虚拟控制函数连续求差分会增大控制系统的复杂度和计算量。

因此,本文拟采用命令滤波技术<sup>[14]</sup>与模糊自适应相结合的方法对 CCSTR 离散时间系统的控制器进行设计。采用欧拉法建立 CCSTR 系统的离散数学模型;利用模糊逻辑系统的逼近特性近似系统中存在的复杂非线性函数,简化控制器的设计过程;采用命令滤波器近似控制器设计过程中存在的未来信息并对虚拟控制输入进行滤波处理,解决由反步法引起的非因果问题和虚拟控制函数连续求差分的过程中产生的计算复杂性问题,同时引入误差补偿信号消除系统的滤波误差;基于差分李雅普诺夫函数证明了闭环系统的稳定性,通过 MATLAB 仿真实例验证该控制方法的有效性。与现有 CCSTR 的控制方法相比,本文所提控制方案的主要优点如下:

1) 在 CCSTR 离散系统下,首次采用命令滤波技术并引入误差补偿信号,从而克服了由经典反步问题产生的虚拟控制函数连续差分问题以及因果矛盾问题;同时消除了系统的滤波误差,使系统的控制精度得到显著提高。

2) 与现有的 CCSTR 系统连续控制器<sup>[14]</sup>相比,本文所设计的 CCSTR 系统离散控制器通过引入采样

的方式,使系统具有更好的直观性、稳定性与可实现性,更易于在数字计算机控制中实现。

## 1 系统描述与预备知识

### 1.1 系统描述

CCSTR 系统在运行过程中,反应物从左上端口加入反应器 I,其流速为  $Q_0$ ,温度为  $T_0$ ,浓度为  $C_{A0}$ ;被加入的反应物在两个相互串联的反应器内发生从  $A \rightarrow B$  的不可逆放热反应,反应后的混合物一方面从反应器 II 下端口流出(流速为  $Q_2$ ,温度为  $T_2$ ,浓度为  $C_{A2}$ ),另一方面返回至反应器 I(流速为  $Q_R$ ,温度为  $T_2$ ,浓度为  $C_{A2}$ )形成闭环循环。为使反应器的温度稳定在参考恒定值,反应器的外围都配有冷却夹套,冷却水分别从反应器 I 与反应器 II 外围夹套的左端口流入,其流量分别为  $Q_{j1}$  和  $Q_{j2}$ 、温度分别为  $T_{j10}$  和  $T_{j20}$ ;夹套内的冷却水分别从反应器 I 与反应器 II 外围夹套的右端口流出,其流量分别为  $Q_{j1}$  和  $Q_{j2}$ 、温度分别为  $T_{j1}$  和  $T_{j2}$ ,如图 1 所示。

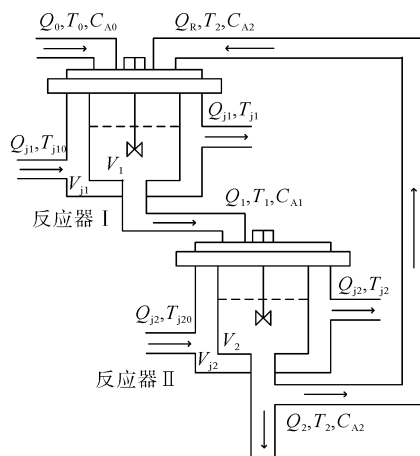


图1 CCSTR 系统示意

假设反应器的体积  $V_1 = V_2 = V$ , 冷却夹套的体积  $V_{j1} = V_{j2} = V_j$ , 反应器的流速  $Q_0 = Q_2 = Q$ ,  $Q_1 = Q_R + Q$ 。基于守恒定律所建立的 CCSTR 的数学模型<sup>[9]</sup> 如式(1)所示:

$$\begin{cases} \frac{dC_{A1}}{dt} = \frac{QC_{A0}}{V} - \frac{(Q+Q_R)C_{A1}}{V} + \frac{Q_R C_{A2}}{V} - \alpha C_{A1} e^{-\frac{E}{RT_1}}, \\ \frac{dC_{A2}}{dt} = \frac{(Q+Q_R)C_{A1}}{V} - \frac{(Q+Q_R)C_{A2}}{V} - \alpha C_{A2} e^{-\frac{E}{RT_2}}; \\ \frac{dT_1}{dt} = \frac{QT_0}{V} - \frac{(Q+Q_R)T_1}{V} + \frac{Q_R T_2}{V} - \frac{\lambda \alpha C_{A1} e^{-\frac{E}{RT_1}}}{\rho_r c_r} - \frac{UA(T_1 - T_{j1})}{\rho_r c_r V}, \\ \frac{dT_2}{dt} = \frac{(Q+Q_R)T_1}{V} - \frac{(Q+Q_R)T_2}{V} - \frac{\lambda \alpha C_{A2} e^{-\frac{E}{RT_2}}}{\rho_r c_r} - \frac{UA(T_2 - T_{j2})}{\rho_r c_r V}; \\ \frac{dT_{j1}}{dt} = \frac{Q_{j1}(T_{j10} - T_{j1})}{V_j} + \frac{UA(T_1 - T_{j1})}{\rho_j c_j V_j}, \\ \frac{dT_{j2}}{dt} = \frac{Q_{j2}(T_{j20} - T_{j2})}{V_j} + \frac{UA(T_2 - T_{j2})}{\rho_j c_j V_j}. \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\alpha$ 、 $\lambda$ 、 $R$ 、 $E$ 、 $U$ 、 $A$  分别为反应速率常数、反应物的焓、普适气体常数、活化能、反应器与夹套之间的传热系数、反应器与夹套之间的传热面积;  $c_r$ 、 $c_j$  分别为反应物与冷却水的比热容;  $\rho_r$ 、 $\rho_j$  分别为反应物与冷却水的密度。

为了简化式(1)中的等式,令

$$x_{11} = C_{A2} - C_{A2}^d, x_{12} = f_{12}, x_{21} = T_2 - T_2^d, x_{22} = T_{j2} - T_{j2}^d, x_{31} = T_1 - T_1^d, x_{32} = T_{j1} - T_{j1}^d。$$

其中,  $C_{A2}^d$ 、 $T_2^d$ 、 $T_{j2}^d$ 、 $T_1^d$ 、 $T_{j1}^d$  分别为  $C_{A2}$ 、 $T_2$ 、 $T_{j2}$ 、 $T_1$ 、 $T_{j1}$  的期望值。

此时,式(1)可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = a_{11}x_{12}, \dot{x}_{12} = a_{12}u_1, y_1 = x_{11}; \\ \dot{x}_{21} = a_{21}x_{22} + \varphi_{21} + \Phi x_{31}, \dot{x}_{22} = a_{22}u_2 + \varphi_{22}, y_2 = x_{21}; \\ \dot{x}_{31} = a_{31}x_{32} + \varphi_{31} + \Psi \omega, \dot{x}_{32} = a_{32}u_3 + \varphi_{32}, y_3 = x_{31}. \end{cases} \quad (2)$$

其中,

$$a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = \frac{UA}{\rho_r c_r V}, a_{22} = \frac{Q_{j2}}{V_j}, a_{31} = \frac{UA}{\rho_r c_r V}, a_{32} = \frac{Q_{j1}}{V_j};$$

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{(Q+Q_R)QC_{A0}}{V^2} + f_4, u_2 = T_{j20} - T_{j20}^d, u_3 = T_{j10} - T_{j10}^d; \Psi = \frac{Q}{V}, \Phi = \frac{Q+Q_R}{V}, \omega = T_0 = T_0^d; \\
 \varphi_{21} &= \frac{(Q+Q_R)T_1^d}{V} - \frac{(Q+Q_R)(x_{21} + T_2^d)}{V} - \frac{\lambda\alpha(x_{11} + C_{A2}^d)}{\rho_r c_r} e^{-\frac{E}{R(x_{21} + T_2^d)}} - \frac{UA(x_{21} + T_2^d - T_{j2}^d)}{\rho_r c_r V}, \\
 \varphi_{22} &= \frac{Q_{j2}(T_{j20}^d - x_{22} - T_{j2}^d)}{V_j} + \frac{UA(x_{21} + T_2^d - x_{22} - T_{j2}^d)}{\rho_j c_j V_j}, \\
 \varphi_{31} &= \frac{QT_0^d}{V} - \frac{(Q+Q_R)(x_{31} + T_1^d)}{V} + \frac{Q_R(x_{21} + T_2^d)}{V} - \frac{\lambda\alpha C_{A1}}{\rho_r c_r} e^{-\frac{E}{R(x_{31} + T_1^d)}} - \frac{UA(x_{31} + T_1^d - T_{j1}^d)}{\rho_r c_r V}, \\
 \varphi_{32} &= \frac{Q_{j1}(T_{j10}^d - x_{32} - T_{j1}^d)}{V_j} + \frac{UA(x_{31} + T_1^d - x_{32} - T_{j1}^d)}{\rho_j c_j V_j}; \\
 C_{A1} &= \frac{V}{Q+Q_R} \left( \frac{(Q+Q_R)(x_{11} + C_{A2}^d)}{V} + x_{12} + \alpha(x_{11} + C_{A2}^d) e^{-\frac{E}{R(x_{21} + T_2^d)}} \right); \\
 f_1 &= -\frac{(Q+Q_R)C_{A1}}{V} + \frac{Q_R C_{A2}}{V} - \alpha C_{A1} e^{-\frac{E}{RT_1}}, \\
 f_2 &= \frac{(Q+Q_R)C_{A1}}{V} - \frac{(Q+Q_R)C_{A2}}{V} - \alpha C_{A2} e^{-\frac{E}{RT_2}}, \\
 f_3 &= \frac{(Q+Q_R)T_1}{V} - \frac{(Q+Q_R)T_2}{V} - \frac{\lambda\alpha}{\rho_r c_r} C_{A2} e^{-\frac{E}{RT_2}} - \frac{UA(T_2 - T_{j2})}{\rho_r c_r}, \\
 f_4 &= \frac{Q+Q_R}{V} f_1 - \left( \frac{Q+Q_R}{V} + \alpha e^{-\frac{E}{RT_2}} \right) f_2 - \frac{\alpha E}{RT_2^2} C_{A2} e^{-\frac{E}{RT_2}} f_3.
 \end{aligned}$$

基于欧拉法,CCSTR 系统的离散时间动态数学模型为

$$\begin{cases}
 x_{11}(k+1) = x_{11}(k) + a_{11}x_{12}(k)\Delta_t, \\
 x_{12}(k+1) = x_{12}(k) + a_{12}u_1(k)\Delta_t; \\
 x_{21}(k+1) = x_{21}(k) + (a_{21}x_{22}(k) + \varphi_{21}(k) + \Phi x_{31}(k))\Delta_t, \\
 x_{22}(k+1) = x_{22}(k) + (a_{22}u_2(k) + \varphi_{22}(k))\Delta_t; \\
 x_{31}(k+1) = x_{31}(k) + (a_{31}x_{32}(k) + \varphi_{31}(k) + \Psi\omega)\Delta_t, \\
 x_{32}(k+1) = x_{32}(k) + (a_{32}u_3(k) + \varphi_{32}(k))\Delta_t.
 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}
 y_1(k) = x_{11}(k), \\
 y_2(k) = x_{21}(k), \\
 y_3(k) = x_{31}(k).
 \end{cases} \tag{4}$$

式中:  $\Delta_t$  为采样周期。

### 1.2 预备知识

CCSTR 系统中存在的非线性复杂函数会使控制器的设计过程变得相对繁琐,因此本文利用模糊逻辑系统(FLS)逼近系统中的复杂非线性函数,以简化命令滤波控制器的设计过程。

**引理 1**<sup>[13]</sup> 对于紧集上任意给定的非线性函数  $f(k)$  和任意的  $\varepsilon$ , 存在模糊逻辑系统  $\mathbf{W}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}(k))$ , 使得:

$$f(k) = \mathbf{W}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}(k)) + \varepsilon$$

式中:  $\mathbf{W} \in R^N$  为最优权向量;  $\mathbf{S}(\mathbf{z}(k)) = [\mathbf{S}_1(\mathbf{z}(k)), \mathbf{S}_2(\mathbf{z}(k)), \dots, \mathbf{S}_N(\mathbf{z}(k))]^T$  为模糊基函数向量, 并且具有以下特性,  $\lambda_{\max}[\mathbf{S}(\mathbf{z}(k))^T \mathbf{S}(\mathbf{z}(k))] < l, l$  是一个正常数,  $\mathbf{z}(k) = [z_1(k), z_2(k), \dots, z_n(k)]^T$  为输入向量;  $\varepsilon$  为逼近误差且满足  $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  为足够小的正常数。

**引理 2**<sup>[14]</sup> 命令滤波器定义为

$$\begin{cases}
 z_1(k+1) = z_1(k) + \omega_n z_2(k)\Delta_t \\
 z_2(k+1) = z_2(k) + \{-2\zeta\omega_n z_2(k) - \omega_n [z_1(k) - \alpha_1(k)]\}\Delta_t,
 \end{cases}$$

式中:  $\alpha_1(k)$ 、 $z_1(k)$  分别为离散时间命令滤波器的输入信号和输出信号。

如果输入信号  $\alpha_1(k)$  满足对于  $\forall k > 0$ ,  $|\alpha_1(k+1) - \alpha_1(k)| \leq \rho_1$ ,  $|\alpha_1(k+2) - 2\alpha_1(k+1) + \alpha_1(k)| \leq \rho_2$ ,  $\rho_1, \rho_2$  均为大于0的正常数, 并且  $z_1(0) = \alpha_1(0)$ ,  $z_2(0) = 0$ , 此时, 存在对于  $\forall \mu > 0$ ,  $0 < \zeta \leq 1$  和  $\omega_n > 0$  且  $\zeta$  和  $\omega_n$  均为常数, 使  $|z_1(k) - \alpha_1(k)| \leq \mu$ ,  $\Delta z_1(k) = |z_1(k+1) - z_1(k)|$  有界。

## 2 控制器设计

本文在设计模糊命令滤波离散控制器时分为了6个步骤: 在步骤1中, 构造虚拟控制律  $\alpha_{11}(k)$  实现系统的最终稳定, 构建误差补偿信号  $\xi_{11}(k)$ , 消除系统的静态偏差; 在步骤2中, 基于模糊逻辑基本原理处理系统中存在的复杂非线性项, 简化控制器的设计过程, 构造实际控制器  $u_1(k)$  与自适应律  $\hat{\eta}_{12}(k)$ , 实现系统的最终稳定; 在步骤3中, 利用模糊逻辑系统逼近系统中存在的非线性函数, 构建误差补偿信号,  $\xi_{21}(k)$  消除系统中存在的滤波误差, 构造虚拟控制律  $\alpha_{21}(k)$  与自适应律  $\hat{\eta}_{21}(k)$ , 实现系统的最终稳定; 在步骤4中, 借助模糊逻辑系统的逼近原理近似系统中存在的复杂非线性项, 构造实际控制器  $u_2(k)$  与自适应律  $\hat{\eta}_{22}(k)$ , 实现系统的最终稳定; 在步骤5中, 采用 FLS 来逼近非线性项, 构造误差补偿信号  $\xi_{31}(k)$ , 消除由滤波器产生的误差, 构造虚拟控制律  $\alpha_{31}(k)$  与自适应律  $\hat{\eta}_{31}(k)$ , 实现系统的最终稳定; 在步骤6中, 借助 FLS 的逼近原理近似系统中存在的非线性函数, 构造实际控制器  $u_3(k)$  与自适应律  $\hat{\eta}_{32}(k)$ , 实现系统的最终稳定。

CCSTR 命令滤波离散控制器的详细设计步骤如下:

步骤1: 定义系统的跟踪误差和补偿跟踪误差信号  $e_{11}(k) = x_{11}(k) - x_{1d}(k)$ ,  $v_{11}(k) = e_{11}(k) - \xi_{11}(k)$ , 其中,  $x_{1d}(k) = 0$  为参考信号。选取 Lyapunov 函数  $V_{11}(k) = \frac{1}{2}v_{11}^2(k)$ , 则  $V_{11}(k)$  的一阶差分为

$$\Delta V_{11}(k) = \frac{1}{2}v_{11}^2(k+1) - \frac{1}{2}v_{11}^2(k) = \frac{1}{2}[x_{11}(k) + x_{12}(k)\Delta_t - \xi_{11}(k+1)]^2 - \frac{1}{2}v_{11}^2(k) \quad (5)$$

构造虚拟控制律与误差补偿信号为

$$\alpha_{11}(k) = -\frac{x_{11}(k)}{\Delta_t} + t_1 \xi_{11}(k) \quad (6)$$

$$\xi_{11}(k+1) = [\xi_{12}(k) + \alpha_{1d}(k) - \alpha_{11}(k) + t_1 \xi_{11}(k)]\Delta_t \quad (7)$$

式中: 参数  $|t_1| \leq 1$ 。

将式(6)(7)代入式(5)可得

$$\Delta V_{11}(k) = \frac{1}{2}v_{12}^2(k)\Delta_t^2 - \frac{1}{2}v_{11}^2(k) \quad (8)$$

式中:  $e_{12}(k) = x_{12}(k) - \alpha_{1d}(k)$ ;  $v_{12}(k) = e_{12}(k) - \xi_{12}(k)$ 。

步骤2: 选取 Lyapunov 函数  $V_{12}(k) = \frac{1}{2}v_{12}^2(k) + V_{11}(k)$ , 则  $V_{12}(k)$  的一阶差分为

$$\begin{aligned} \Delta V_{12}(k) &= \frac{1}{2}v_{12}^2(k+1) - \frac{1}{2}v_{12}^2(k) + \Delta V_{11}(k) \\ &= \frac{1}{2}[x_{12}(k) + u_1(k)\Delta_t - \alpha_{1d}(k+1) - \xi_{12}(k+1)]^2 - \frac{1}{2}v_{12}^2(k) + \Delta V_{11}(k) \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)中含有未来的信号  $\alpha_{1d}(k+1)$ , 如果继续采用反步法构造实际控制器, 则将会包含更多未来的信号, 即呈现因果矛盾以及计算复杂性问题。为克服此问题, 本文将通过命令滤波器获得  $\alpha_{1d}(k+1)$  的数值, 避免了繁琐的求差分过程。

定义非线性函数:

$$f_{12}(k) = x_{12}(k) - \alpha_{1d}(k+1) \quad (10)$$

又由模糊逻辑系统的逼近特性,  $f_{12}(k)$  还可以写为

$$f_{12}(k) = \mathbf{W}_{12}^T \mathbf{S}_{12}(z_{12}(k)) + \varepsilon_{12}, |\varepsilon_{12}| \leq \bar{\varepsilon}_{12} \quad (11)$$

式中:  $\mathbf{z}_{12}(k) = [x_{11}(k), x_{12}(k)]$ ;  $\bar{\varepsilon}_{12}$  为正常数。

非线性函数  $f_{12}(k)$  中包含着未来的状态信息  $\alpha_{1d}(k+1)$  以及高阶非线性项  $x_{12}(k)$ , 这不仅会增加系统的复杂度, 而且会使得控制器的设计变得困难, 因此, 采用模糊逻辑系统处理系统中的复杂非线性项, 简化了计算过程。

选择  $\xi_{12}(k) = 0$ , 构造实际控制律与自适应律为

$$u_1(k) = -\frac{1}{\Delta_t} \hat{\eta}_{12}(k) \|\mathbf{S}_{12}(\mathbf{z}_{12}(k))\| \quad (12)$$

$$\hat{\eta}_{12}(k+1) = \hat{\eta}_{12}(k) + \gamma_{12} \|\mathbf{S}_{12}(\mathbf{z}_{12}(k))\| v_{12}(k+1) - \delta_{12} \hat{\eta}_{12}(k) \quad (13)$$

式中:  $\gamma_{12}, \delta_{12}$  均为正常数;  $\eta_{12} = \|\mathbf{W}_{12}^T\|$ , 设  $\hat{\eta}_{12}(k)$  为  $\eta_{12}$  的估计值, 则  $\tilde{\eta}_{12}(k) = \eta_{12} - \hat{\eta}_{12}(k)$  为  $\eta_{12}$  的估计误差。

将式(10)–(12)代入式(9)并由 Young's 不等式可得

$$\Delta V_{12}(k) \leq [\tilde{\eta}_{12}(k) \|\mathbf{S}_{12}(\mathbf{z}_{12}(k))\|]^2 + \bar{\varepsilon}_{12}^2 - \frac{1}{2} v_{12}^2(k) + \Delta V_{11}(k) \quad (14)$$

步骤 3: 定义系统的跟踪误差和补偿跟踪误差信号  $e_{21}(k) = x_{21}(k) - x_{2d}(k)$ ,  $v_{21}(k) = e_{21}(k) - \xi_{21}(k)$ , 其中,  $x_{2d}(k) = 0$  为参考信号。选取 Lyapunov 函数  $V_{21}(k) = \frac{1}{2a_{21}} v_{21}^2(k) + V_{12}(k)$ , 则  $V_{21}(k)$  的一阶差分为

$$\begin{aligned} \Delta V_{21}(k) &= \frac{1}{2a_{21}} v_{21}^2(k+1) - \frac{1}{2a_{21}} v_{21}^2(k) + \Delta V_{12}(k) \\ &= \frac{1}{2a_{21}} [x_{21}(k) + (a_{21}x_{22}(k) + \varphi_{21}(k) + \Phi x_{31}(k))\Delta_t - \xi_{21}(k+1)]^2 - \frac{1}{2a_{21}} v_{21}^2(k) + \Delta V_{12}(k) \end{aligned} \quad (15)$$

定义非线性函数:

$$f_{21}(k) = x_{21}(k) + (\varphi_{21}(k) + \Phi x_{31}(k))\Delta_t \quad (16)$$

又由模糊逻辑系统的逼近特性,  $f_{21}(k)$  还可以写为

$$f_{21}(k) = \mathbf{W}_{21}^T \mathbf{S}_{21}(\mathbf{z}_{21}(k)) + \varepsilon_{21}, |\varepsilon_{21}| \leq \bar{\varepsilon}_{21} \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{z}_{21}(k) = [x_{11}(k), x_{12}(k), x_{31}(k)]$ ;  $\bar{\varepsilon}_{21}$  为正常数。

构造虚拟控制律、误差补偿信号与自适应律为

$$\alpha_{21}(k) = -\frac{1}{a_{21}\Delta_t} \hat{\eta}_{21}(k) \|\mathbf{S}_{21}(\mathbf{z}_{21}(k))\| + t_2 \xi_{21}(k) \quad (18)$$

$$\xi_{21}(k+1) = a_{21}\Delta_t [\xi_{22}(k) + \alpha_{2d}(k) - \alpha_{21}(k) + t_2 \xi_{21}(k)] \quad (19)$$

$$\hat{\eta}_{21}(k+1) = \hat{\eta}_{21}(k) + \gamma_{21} \|\mathbf{S}_{21}(\mathbf{z}_{21}(k))\| v_{21}(k+1) - \delta_{21} \hat{\eta}_{21}(k) \quad (20)$$

式中: 参数  $|t_2| \leq 1$ ;  $\gamma_{21}, \delta_{21}$  均为正常数;  $\eta_{21} = \|\mathbf{W}_{21}^T\|$ , 设  $\hat{\eta}_{21}(k)$  为  $\eta_{21}$  的估计值, 则  $\tilde{\eta}_{21}(k) = \eta_{21} - \hat{\eta}_{21}(k)$  为  $\eta_{21}$  的估计误差。

将式(16)–(19)代入式(15)并由 Young's 不等式可得

$$\Delta V_{21}(k) \leq \frac{2}{a_{21}} [\tilde{\eta}_{21}(k) \|\mathbf{S}_{21}(\mathbf{z}_{21}(k))\|]^2 + \frac{2}{a_{21}} \bar{\varepsilon}_{21}^2 + a_{21} \Delta_t^2 v_{22}^2(k) - \frac{1}{2a_{21}} v_{21}^2(k) + \Delta V_{12}(k) \quad (21)$$

式中:  $e_{22}(k) = x_{22}(k) - \alpha_{2d}(k)$ ;  $v_{22}(k) = e_{22}(k) - \xi_{22}(k)$ 。

步骤 4: 选取 Lyapunov 函数  $V_{22}(k) = \frac{1}{2a_{22}} v_{22}^2(k) + V_{21}(k)$ , 则  $V_{22}(k)$  的一阶差分为

$$\begin{aligned} \Delta V_{22}(k) &= \frac{1}{2a_{22}} v_{22}^2(k+1) - \frac{1}{2a_{22}} v_{22}^2(k) + \Delta V_{21}(k) \\ &= \frac{1}{2a_{22}} [x_{22}(k) + (a_{22}u_2(k) + \varphi_{22}(k))\Delta_t - \alpha_{2d}(k+1) - \xi_{22}(k+1)]^2 - \frac{1}{2a_{22}} v_{22}^2(k) + \Delta V_{21}(k) \end{aligned} \quad (22)$$

定义非线性函数:

$$f_{22}(k) = x_{22}(k) + \varphi_{22}(k)\Delta_t - \alpha_{2d}(k+1) \quad (23)$$

又由模糊逻辑系统的逼近特性,  $f_{22}(k)$  还可以写为

$$f_{22}(k) = \mathbf{W}_{22}^T \mathbf{S}_{22}(\mathbf{z}_{22}(k)) + \epsilon_{22}, |\epsilon_{22}| \leq \bar{\epsilon}_{22} \quad (24)$$

式中:  $\mathbf{z}_{22}(k) = [x_{11}(k), x_{12}(k), x_{21}(k), x_{22}(k), x_{31}(k), x_{32}(k)]$ ;  $\bar{\epsilon}_{22}$  为正常数。

选择  $\xi_{22}(k) = 0$ , 构造实际控制律与自适应律为

$$u_2(k) = -\frac{1}{a_{22}\Delta_t} \hat{\eta}_{22}(k) \|\mathbf{S}_{22}(\mathbf{z}_{22}(k))\| \quad (25)$$

$$\hat{\eta}_{22}(k+1) = \hat{\eta}_{22}(k) + \gamma_{22} \|\mathbf{S}_{22}(\mathbf{z}_{22}(k))\| v_{22}(k+1) - \delta_{22} \hat{\eta}_{22}(k) \quad (26)$$

式中:  $\gamma_{22}, \delta_{22}$  均为正常数;  $\eta_{22} = \|\mathbf{W}_{22}^T\|$ , 设  $\hat{\eta}_{22}(k)$  为  $\eta_{22}$  的估计值, 则  $\tilde{\eta}_{22}(k) = \eta_{22} - \hat{\eta}_{22}(k)$  为  $\eta_{22}$  的估计误差。

将式(23)–(25)代入式(22)并由 Young's 不等式可得

$$\Delta V_{22}(k) \leq \frac{1}{a_{22}} [\tilde{\eta}_{22}(k) \|\mathbf{S}_{22}(\mathbf{z}_{22}(k))\|]^2 + \frac{1}{a_{22}} \bar{\epsilon}_{22}^2 - \frac{1}{2a_{22}} v_{22}^2(k) + \Delta V_{21}(k) \quad (27)$$

步骤 5: 定义系统的跟踪误差和补偿跟踪误差信号  $e_{31}(k) = x_{31}(k) - x_{3d}(k)$ ,  $v_{31}(k) = e_{31}(k) - \xi_{31}(k)$ ,

其中,  $x_{3d}(k) = 0$  为参考信号。选取 Lyapunov 函数  $V_{31}(k) = \frac{1}{2a_{31}} v_{31}^2(k) + V_{22}(k)$ , 则  $V_{31}(k)$  的一阶差分

$$\begin{aligned} \Delta V_{31}(k) &= \frac{1}{2a_{31}} v_{31}^2(k+1) - \frac{1}{2a_{31}} v_{31}^2(k) + \Delta V_{22}(k) \\ &= \frac{1}{2a_{31}} [x_{31}(k) + (a_{31}x_{32}(k) + \varphi_{31}(k) + \Psi\omega)\Delta_t - \xi_{31}(k+1)]^2 - \frac{1}{2a_{31}} v_{31}^2(k) + \Delta V_{22}(k) \end{aligned} \quad (28)$$

定义非线性函数:

$$f_{31}(k) = x_{31}(k) + (\varphi_{31}(k) + \Psi\omega)\Delta_t \quad (29)$$

又由模糊逻辑系统的逼近特性,  $f_{31}(k)$  还可以写为

$$f_{31}(k) = \mathbf{W}_{31}^T \mathbf{S}_{31}(\mathbf{z}_{31}(k)) + \epsilon_{31}, |\epsilon_{31}| \leq \bar{\epsilon}_{31} \quad (30)$$

式中:  $\mathbf{z}_{31}(k) = [x_{21}(k), x_{31}(k)]$ ;  $\bar{\epsilon}_{31}$  为正常数。

构造虚拟控制律、误差补偿信号与自适应律为

$$\alpha_{31}(k) = -\frac{1}{a_{31}\Delta_t} \hat{\eta}_{31}(k) \|\mathbf{S}_{31}(\mathbf{z}_{31}(k))\| + t_3 \xi_{31}(k) \quad (31)$$

$$\xi_{31}(k+1) = a_{31}\Delta_t [\xi_{32}(k) + \alpha_{3d}(k) - \alpha_{31}(k) + t_3 \xi_{31}(k)] \quad (32)$$

$$\hat{\eta}_{31}(k+1) = \hat{\eta}_{31}(k) + \gamma_{31} \|\mathbf{S}_{31}(\mathbf{z}_{31}(k))\| v_{31}(k+1) - \delta_{31} \hat{\eta}_{31}(k) \quad (33)$$

式中: 参数  $|t_3| \leq 1$ ;  $\gamma_{31}, \delta_{31}$  均为正常数;  $\eta_{31} = \|\mathbf{W}_{31}^T\|$ , 设  $\hat{\eta}_{31}(k)$  为  $\eta_{31}$  的估计值, 则  $\tilde{\eta}_{31}(k) = \eta_{31} - \hat{\eta}_{31}(k)$  为  $\eta_{31}$  的估计误差。

将式(29)–(32)代入式(28)并由 Young's 不等式可得

$$\Delta V_{31}(k) \leq \frac{2}{a_{31}} [\tilde{\eta}_{31}(k) \|\mathbf{S}_{31}(\mathbf{z}_{31}(k))\|]^2 + \frac{2}{a_{31}} \bar{\epsilon}_{31}^2 + a_{31}\Delta_t^2 v_{32}^2(k) - \frac{1}{2a_{31}} v_{31}^2(k) + \Delta V_{22}(k) \quad (34)$$

式中:  $e_{32}(k) = x_{32}(k) - \alpha_{3d}(k)$ ;  $v_{32}(k) = e_{32}(k) - \xi_{32}(k)$ 。

步骤 6: 选取 Lyapunov 函数  $V_{32}(k) = \frac{1}{2a_{32}} v_{32}^2(k) + V_{31}(k)$ , 则  $V_{32}(k)$  的一阶差分为

$$\begin{aligned} \Delta V_{32}(k) &= \frac{1}{2a_{32}} v_{32}^2(k+1) - \frac{1}{2a_{32}} v_{32}^2(k) + \Delta V_{31}(k) \\ &= \frac{1}{2a_{32}} [x_{32}(k) + (a_{32}u_3(k) + \varphi_{32}(k))\Delta_t - \alpha_{3d}(k+1) - \xi_{32}(k+1)]^2 - \frac{1}{2a_{32}} v_{32}^2(k) + \Delta V_{31}(k) \end{aligned} \quad (35)$$

定义非线性函数:

$$f_{32}(k) = x_{32}(k) + \varphi_{32}(k)\Delta_t - \alpha_{3d}(k+1) \quad (36)$$

又由模糊逻辑系统的逼近特性,  $f_{32}(k)$  还可以写为

$$f_{32}(k) = \mathbf{W}_{32}^T \mathbf{S}_{32}(\mathbf{z}_{32}(k)) + \epsilon_{32}, |\epsilon_{32}| \leq \bar{\epsilon}_{32} \quad (37)$$

式中:  $\mathbf{z}_{32}(k) = [x_{21}(k), x_{22}(k), x_{31}(k), x_{32}(k)]$ ;  $\bar{\epsilon}_{32}$  为正常数。

选择  $\xi_{32}(k) = 0$ , 构造实际控制律与自适应律为

$$u_3(k) = -\frac{1}{a_{32}\Delta_t} \hat{\eta}_{32}(k) \|\mathbf{S}_{32}(\mathbf{z}_{32}(k))\| \quad (38)$$

$$\hat{\eta}_{32}(k+1) = \hat{\eta}_{32}(k) + \gamma_{32} \|\mathbf{S}_{32}(\mathbf{z}_{32}(k))\| v_{32}(k+1) - \delta_{32} \hat{\eta}_{32}(k) \quad (39)$$

式中:  $\gamma_{32}, \delta_{32}$  均为正常数;  $\eta_{32} = \|\mathbf{W}_{32}^T\|$ , 设  $\hat{\eta}_{32}(k)$  为  $\eta_{32}$  的估计值, 则  $\tilde{\eta}_{32}(k) = \eta_{32} - \hat{\eta}_{32}(k)$  为  $\eta_{32}$  的估计误差。

将式(36)–(38)代入式(35)并由 Young's 不等式可得

$$\Delta V_{32}(k) \leq \frac{1}{a_{32}} [\tilde{\eta}_{32}(k) \|\mathbf{S}_{32}(\mathbf{z}_{32}(k))\|]^2 + \frac{1}{a_{32}} \bar{\epsilon}_{32}^2 - \frac{1}{2a_{32}} v_{32}^2(k) + \Delta V_{31}(k) \quad (40)$$

从式(12)(13)(18)(20)(25)(26)(31)(33)(38)(39)可以看出, 控制设计过程中, 引入 FLS 以及自适应律是用来处理系统中存在的非线性函数  $x_{12}(k), \varphi_{21}(k), \varphi_{22}(k), \varphi_{31}(k), \varphi_{32}(k)$ , 简化了控制器的设计过程, 缩减了控制系统的在线计算量。

### 3 稳定性分析

选取新的 Lyapunov 函数来证明该闭环系统的稳定性:

$$V(k) = V_{32}(k) + \frac{1}{2\gamma_{12}} \tilde{\eta}_{12}^2(k) + \frac{1}{2\gamma_{21}} \tilde{\eta}_{21}^2(k) + \frac{1}{2\gamma_{22}} \tilde{\eta}_{22}^2(k) + \frac{1}{2\gamma_{31}} \tilde{\eta}_{31}^2(k) + \frac{1}{2\gamma_{32}} \tilde{\eta}_{32}^2(k) \quad (41)$$

则  $V(k)$  的一阶差分为

$$\begin{aligned} \Delta V(k) = & \Delta V_{32}(k) + \frac{1}{2\gamma_{12}} \tilde{\eta}_{12}^2(k+1) - \frac{1}{2\gamma_{12}} \tilde{\eta}_{12}^2(k) + \frac{1}{2\gamma_{21}} \tilde{\eta}_{21}^2(k+1) - \frac{1}{2\gamma_{21}} \tilde{\eta}_{21}^2(k) + \frac{1}{2\gamma_{22}} \tilde{\eta}_{22}^2(k+1) - \\ & \frac{1}{2\gamma_{22}} \tilde{\eta}_{22}^2(k) + \frac{1}{2\gamma_{31}} \tilde{\eta}_{31}^2(k+1) - \frac{1}{2\gamma_{31}} \tilde{\eta}_{31}^2(k) + \frac{1}{2\gamma_{32}} \tilde{\eta}_{32}^2(k+1) - \frac{1}{2\gamma_{32}} \tilde{\eta}_{32}^2(k) \end{aligned} \quad (42)$$

将  $\tilde{\eta}_{ij}(k) = \eta_{ij} - \hat{\eta}_{ij}(k)$ , ( $i=1, 2, 3; j=1, 2; i=1$  时  $j \neq 1$ ) 与式(13)(20)(26)(33)(39)联合可求得

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{ij}^2(k+1) - \tilde{\eta}_{ij}^2(k) = & \eta_{ij}^2 + (1 - \delta_{ij})^2 \tilde{\eta}_{ij}^2(k) - 2(1 - \delta_{ij}) \eta_{ij} \hat{\eta}_{ij}(k) + \gamma_{ij}^2 \|\mathbf{S}_{ij}(\mathbf{z}_{ij}(k))\|^2 v_{ij}^2(k+1) + \\ & 2(1 - \delta_{ij}) \gamma_{ij} \|\mathbf{S}_{ij}(\mathbf{z}_{ij}(k))\| v_{ij}(k+1) \hat{\eta}_{ij}(k) - 2\gamma_{ij} \|\mathbf{S}_{ij}(\mathbf{z}_{ij}(k))\| v_{ij}(k+1) \eta_{ij} - \tilde{\eta}_{ij}^2(k) \end{aligned} \quad (43)$$

由  $\|\mathbf{S}_{ij}(\mathbf{z}_{ij}(k))\|^2 \leq l_{ij}$  与 Young's 不等式可得

$$2\gamma_{ij} \|\mathbf{S}_{ij}(\mathbf{z}_{ij}(k))\| v_{ij}(k+1) \hat{\eta}_{ij}(k) \leq \gamma_{ij}^2 v_{ij}^2(k+1) l_{ij} + \hat{\eta}_{ij}^2(k) \quad (44)$$

$$-2\|\mathbf{S}_{ij}(\mathbf{z}_{ij}(k))\| v_{ij}(k+1) \eta_{ij} \leq v_{ij}^2(k+1) l_{ij} + \eta_{ij}^2 \quad (45)$$

$$\gamma_{ij}^2 \|\mathbf{S}_{ij}(\mathbf{z}_{ij}(k))\|^2 v_{ij}^2(k+1) \leq \gamma_{ij}^2 v_{ij}^2(k+1) l_{ij} \quad (46)$$

$$-2\eta_{ij} \hat{\eta}_{ij}(k) \leq \eta_{ij}^2 + \hat{\eta}_{ij}^2(k) \quad (47)$$

将式(44)–(47)代入式(43)可得:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{i1}^2(k+1) - \tilde{\eta}_{i1}^2(k) \leq & (8\gamma_{i1}^2 l_{i1}^2 - 4\gamma_{i1}^2 l_{i1}^2 \delta_{i1} + 4\gamma_{i1} l_{i1}^2 - 1) \tilde{\eta}_{i1}^2(k) + (8\gamma_{i1}^2 l_{i1} - 4\gamma_{i1}^2 l_{i1} \delta_{i1} + 4\gamma_{i1} l_{i1}) \bar{\epsilon}_{i1}^2 + \\ & (4\gamma_{i1}^2 l_{i1} - 2\gamma_{i1}^2 l_{i1} \delta_{i1} + 2\gamma_{i1} l_{i1}) a_{i1}^2 \Delta_t^2 v_{i2}^2(k) + (\delta_{i1}^2 - 4\delta_{i1} + 3) \hat{\eta}_{i1}^2(k) + (\gamma_{i1} - \delta_{i1} + 2) \eta_{i1}^2 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{i2}^2(k+1) - \tilde{\eta}_{i2}^2(k) \leq & (4\gamma_{i2}^2 l_{i2}^2 - 2\gamma_{i2}^2 l_{i2}^2 \delta_{i2} + 2\gamma_{i2} l_{i2}^2 - 1) \tilde{\eta}_{i2}^2(k) + (4\gamma_{i2}^2 l_{i2} - 2\gamma_{i2}^2 l_{i2} \delta_{i2} + 2\gamma_{i2} l_{i2}) \bar{\epsilon}_{i2}^2 + \\ & (\delta_{i2}^2 - 4\delta_{i2} + 3) \hat{\eta}_{i2}^2(k) + (\gamma_{i2} - \delta_{i2} + 2) \eta_{i2}^2 \end{aligned} \quad (49)$$

其中, 式(48)中  $i=2, 3$ ; 式(49)中  $i=1, 2, 3$ 。

将式(40)(48)(49)代入式(42)可得:

$$\begin{aligned} \Delta V(k) \leq & -\frac{1}{2}v_{11}^2(k) - \sum_{i=2}^3 \frac{1}{2a_{i1}}v_{i1}^2(k) - \frac{1}{2}(1-\Delta_i^2)v_{12}^2(k) - \sum_{i=2}^3 \left( \frac{1}{2a_{i2}} - a_{i1}^2\chi_{i1}\Delta_i^2 - a_{i1}\Delta_i^2 \right)v_{i2}^2(k) + \\ & \frac{1}{2\gamma_{12}}[(4\gamma_{12}^2l_{12}^2 - 2\gamma_{12}^2l_{12}^2\delta_{12} + 2\gamma_{12}l_{12}^2 + 2\gamma_{12}l_{12} - 1)\tilde{\eta}_{12}^2(k) + \beta_{12} + (\delta_{12}^2 - 4\delta_{12} + 3)\hat{\eta}_{12}^2(k)] + \\ & \sum_{i=2}^3 \left\{ \frac{1}{2\gamma_{i1}}[(8\gamma_{i1}^2l_{i1}^2 - 4\gamma_{i1}^2l_{i1}^2\delta_{i1} + 4\gamma_{i1}l_{i1}^2 + \frac{4}{a_{i1}}\gamma_{i1}l_{i1} - 1)\tilde{\eta}_{i1}^2(k) + \beta_{i1} + (\delta_{i1}^2 - 4\delta_{i1} + 3)\hat{\eta}_{i1}^2(k)] + \right. \\ & \left. \frac{1}{2\gamma_{i2}}[(4\gamma_{i2}^2l_{i2}^2 - 2\gamma_{i2}^2l_{i2}^2\delta_{i2} + 2\gamma_{i2}l_{i2}^2 + \frac{2}{a_{i2}}\gamma_{i2}l_{i2} - 1)\tilde{\eta}_{i2}^2(k) + \beta_{i2} + (\delta_{i2}^2 - 4\delta_{i2} + 3)\hat{\eta}_{i2}^2(k)] \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

其中:

$$\begin{aligned} \chi_{21} &= 2\gamma_{21}l_{21} - \gamma_{21}l_{21}\delta_{21} + l_{21}, \chi_{31} = 2\gamma_{31}l_{31} - \gamma_{31}l_{31}\delta_{31} + l_{31}; \beta_{12} = (\gamma_{12} - \delta_{12} + 2)\eta_{12}^2 + (4\gamma_{12}^2l_{12} - \\ & 2\gamma_{12}^2l_{12}\delta_{12} + 2\gamma_{12}l_{12} + 2\gamma_{12})\bar{\epsilon}_{12}^2, \beta_{21} = (\gamma_{21} - \delta_{21} + 2)\eta_{21}^2 + (8\gamma_{21}^2l_{21} - 4\gamma_{21}^2l_{21}\delta_{21} + 4\gamma_{21}l_{21} + \frac{4}{a_{21}}\gamma_{21})\bar{\epsilon}_{21}^2, \\ \beta_{22} &= (\gamma_{22} - \delta_{22} + 2)\eta_{22}^2 + (4\gamma_{22}^2l_{22} - 2\gamma_{22}^2l_{22}\delta_{22} + 2\gamma_{22}l_{22} + \frac{2}{a_{22}}\gamma_{22})\bar{\epsilon}_{22}^2, \beta_{31} = (\gamma_{31} - \delta_{31} + 2)\eta_{31}^2 + (8\gamma_{31}^2l_{31} - \\ & 4\gamma_{31}^2l_{31}\delta_{31} + 4\gamma_{31}l_{31} + \frac{4}{a_{31}}\gamma_{31})\bar{\epsilon}_{31}^2, \beta_{32} = (\gamma_{32} - \delta_{32} + 2)\eta_{32}^2 + (4\gamma_{32}^2l_{32} - 2\gamma_{32}^2l_{32}\delta_{32} + 2\gamma_{32}l_{32} + \frac{2}{a_{32}}\gamma_{32})\bar{\epsilon}_{32}^2. \end{aligned}$$

通过选取合适的采样周期  $\Delta_i$ 、自适应参数  $\gamma_{12}$ 、 $\gamma_{21}$ 、 $\gamma_{22}$ 、 $\gamma_{31}$ 、 $\gamma_{32}$ 、 $\delta_{12}$ 、 $\delta_{21}$ 、 $\delta_{22}$ 、 $\delta_{31}$ 、 $\delta_{32}$  使得以下不等式成立:  $4\gamma_{12}^2l_{12}^2 - 2\gamma_{12}^2l_{12}^2\delta_{12} + 2\gamma_{12}l_{12}^2 + 2\gamma_{12}l_{12} - 1 < 0$ ,  $\delta_{ij}^2 - 4\delta_{ij} + 3 < 0$ ,  $1 - \Delta_i^2 > 0$ ,  $\frac{1}{2a_{i2}} - a_{i1}\Delta_i^2 - a_{i1}^2\chi_{i1}\Delta_i^2 > 0$ ,  $8\gamma_{i1}^2l_{i1}^2 - 4\gamma_{i1}^2l_{i1}^2\delta_{i1} + 4\gamma_{i1}l_{i1}^2 + \frac{4}{a_{i1}}\gamma_{i1}l_{i1} - 1 < 0$ ,  $4\gamma_{i2}^2l_{i2}^2 - 2\gamma_{i2}^2l_{i2}^2\delta_{i2} + 2\gamma_{i2}l_{i2}^2 + \frac{2}{a_{i2}}\gamma_{i2}l_{i2} - 1 < 0 (i=2,3; j=1,2)$ 。

则只要保证:

$$\begin{aligned} |v_{12}(k)| &> \sqrt{\frac{\beta_{12}}{\gamma_{12}(1-\Delta_i^2)}}, |v_{21}(k)| > \sqrt{\frac{a_{21}\beta_{21}}{\gamma_{21}}}, |v_{31}(k)| > \sqrt{\frac{a_{31}\beta_{31}}{\gamma_{31}}}, \\ |v_{22}(k)| &> \sqrt{\frac{a_{22}\beta_{22}}{\gamma_{22}(1-2a_{21}a_{22}\Delta_i^2 - 2a_{21}^2a_{22}\chi_{21}\Delta_i^2)}}, \\ |v_{32}(k)| &> \sqrt{\frac{a_{32}\beta_{32}}{\gamma_{32}(1-2a_{31}a_{32}\Delta_i^2 - 2a_{31}^2a_{32}\chi_{31}\Delta_i^2)}} \end{aligned}$$

成立,那么就可以得到稳定性条件  $\Delta V(k) \leq 0$ ,进一步可以得到  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_{i1}\| \leq \mu (i=1,2,3)$  恒成立,其中,  $\mu$  是一个足够小的正常数。假设  $\alpha_{id}(k) - \alpha_i(k) (i=1,2,3)$  是有界的且  $|t_i| \leq 1 (i=1,2,3)$ ,则由式(7)(19)(32)可得,误差补偿信号  $\xi_i(k) (i=1,2,3; j=1,2)$  是有界的。此时,由于  $\xi_{ij}(k) = e_{ij}(k) - v_{ij}(k)$  是有界的,因此跟踪误差  $e_{ij}(k)$  是有界的。

## 4 仿真分析

### 4.1 参数选取

为了验证本文所提出方法的可行性,使用 MATLAB 2018a 对 CCSTR 离散时间系统进行仿真分析。本文所设计的控制器采用的模糊隶属度函数为

$$\begin{aligned} \mu_{F_i^1} &= \exp[-(\frac{x(k)+2}{2})^2], \mu_{F_i^2} = \exp[-(\frac{x(k)+1}{2})^2], \mu_{F_i^3} = \exp[-(\frac{x(k)+0}{2})^2], \\ \mu_{F_i^4} &= \exp[-(\frac{x(k)-1}{2})^2], \mu_{F_i^5} = \exp[-(\frac{x(k)-2}{2})^2]. \end{aligned}$$

CCSTR 离散系统的状态初始值以及自适应初始值为

$$x_{11}(0) = 2, x_{12}(0) = -2; x_{21}(0) = 5, x_{22}(0) = -4; x_{31}(0) = 2, x_{32}(0) = -4;$$

$$\eta_{12}(0) = \eta_{21}(0) = \eta_{22}(0) = \eta_{31}(0) = \eta_{32}(0) = 0.01。$$

CCSTR 系统的模型参数,见表 1。

表 1 串级连续搅拌反应釜系统的模型参数

参数	参数值	参数	参数值	参数	参数值
$Q/(m^3 \cdot h^{-1})$	2.8317	$\rho_r/(kg \cdot m^{-3})$	800.9189	$T_{j10}^d/^\circ C$	629.2
$Q_R/(m^3 \cdot h^{-1})$	1.4158	$\rho_j/(kg \cdot m^{-3})$	997.9450	$T_{j20}^d/^\circ C$	608.2
$Q_{j1}/(m^3 \cdot h^{-1})$	1.4130	$c_r/(J \cdot kg^{-1} \cdot ^\circ C^{-1})$	1395.3	$E/(J \cdot mol^{-1})$	$3.1644 \times 10^7$
$Q_{j2}/(m^3 \cdot h^{-1})$	1.4130	$c_j/(J \cdot kg^{-1} \cdot ^\circ C^{-1})$	1860.3	$\lambda/(J \cdot mol^{-1})$	$-3.1644 \times 10^7$
$V/m^3$	1.3592	$T_0^d/^\circ C$	703.7	$A/m^2$	23.2
$V_j/m^3$	0.1090	$T_1^d/^\circ C$	669.2471	$R/(J \cdot mol^{-1} \cdot ^\circ C^{-1})$	1679.2
$C_{A0}^d/(mol \cdot m^{-3})$	18.3728	$T_2^d/^\circ C$	649.7426	$\alpha/(J \cdot mol^{-1})$	$7.08 \times 10^{10}$
$C_{A1}^d/(mol \cdot m^{-3})$	12.3016	$T_{j1}^d/^\circ C$	740.8	$U/(J \cdot h^{-1} \cdot m^{-2} \cdot ^\circ C^{-1})$	$1.3625 \times 10^6$
$C_{A2}^d/(mol \cdot m^{-3})$	10.4178	$T_{j2}^d/^\circ C$	727.6		

命令滤波离散控制器的设计参数,见表 2。

表 2 命令滤波离散控制器的设计参数

参数	参数值	参数	参数值	参数	参数值	参数	参数值
$\gamma_{12}$	0.0894	$\gamma_{32}$	0.05	$\delta_{31}$	1.000	$t_1$	0.0200
$\gamma_{21}$	0.0200	$\delta_{12}$	1.01	$\delta_{32}$	1.4000	$t_2$	0.0100
$\gamma_{22}$	0.0894	$\delta_{21}$	1.10	$\zeta$	0.9919	$t_3$	0.0200
$\gamma_{31}$	0.0200	$\delta_{22}$	1.20	$\omega_n$	187.000	$\Delta_t$	0.0100

### 4.2 仿真结果分析

本文所设计控制器的仿真结果如图 2—9 所示。图 2 为闭环系统的所有信号,即输出信号( $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$ )、输入信号( $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u_3$ )、虚拟控制信号( $\alpha_{11}$ 、 $\alpha_{21}$ 、 $\alpha_{31}$ )以及自适应律( $\hat{\eta}_{12}$ 、 $\hat{\eta}_{21}$ 、 $\hat{\eta}_{22}$ 、 $\hat{\eta}_{31}$ 、 $\hat{\eta}_{32}$ )的变化趋势,显然,它们都是有界的,这表明了本文所提出的控制器是有效可行的。图 3 给出的是命令滤波控制器下的自适应律曲线,显然是有界的。

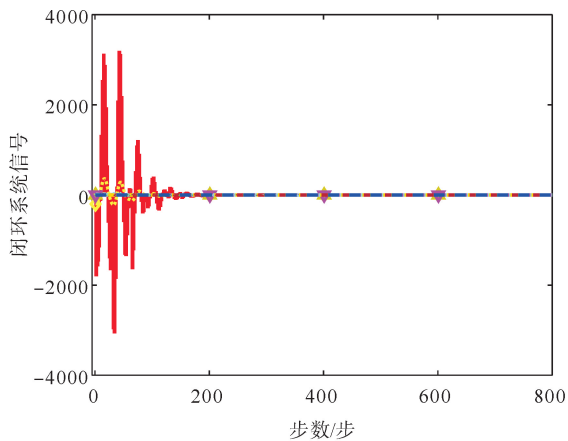


图 2 CCSTR 闭环系统信号

$\cdots y_1; \cdots y_2; \cdots y_3; \cdots u_1; \cdots u_2; \cdots u_3; \cdots \alpha_{11};$   
 $\cdots \alpha_{21}; \cdots \alpha_{31}; \cdots \hat{\eta}_{12}; \cdots \hat{\eta}_{21}; \cdots \hat{\eta}_{22}; \cdots \hat{\eta}_{31}; \cdots \hat{\eta}_{32};$   
 $\cdots \zeta_{11}; \cdots \zeta_{12}; \cdots \zeta_{21}; \cdots \zeta_{22}; \cdots \zeta_{31}; \cdots \zeta_{32}$

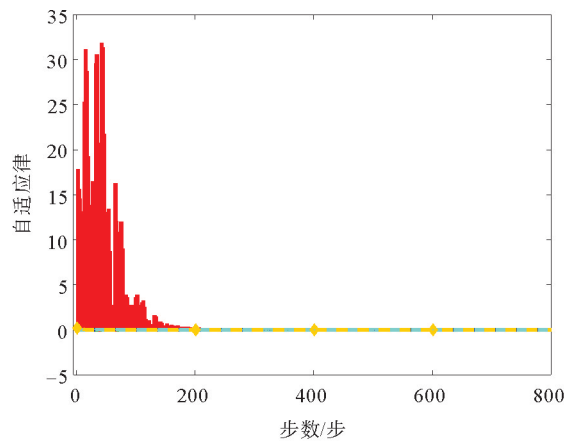


图 3 CCSTR 在命令滤波控制下的自适应律曲线  $\hat{\eta}_j$

$\cdots \hat{\eta}_{12}; \cdots \hat{\eta}_{21}; \cdots \hat{\eta}_{22}; \cdots \hat{\eta}_{31}; \cdots \hat{\eta}_{32}$

为彰显命令滤波控制器应用于 CCSTR 离散时间系统时控制性能的优越性,在所有状态变量的初始值以及模糊隶属度函数相同的情况下,分别对命令滤波控制与传统反步法控制<sup>[13]</sup>的输出信号和输入信号的控制性能进行了对比,具体对比如图 4—9 所示。图 4—9 分别表示了两种控制算法下控制器输出信号的动态特性和静态特性,显然,两种控制器的输出信号最终都可以较好地跟踪所设定的参考信号,但与传

统反步法控制器相比,在图4中,采用命令滤波技术设计的控制器可以使传统反步法控制器中输出信号 $y_1$ 呈现出的超调现象大幅度降低,使系统输出信号能够更快地跟踪参考信号。由式(2)知 $y_1$ 是反应结束

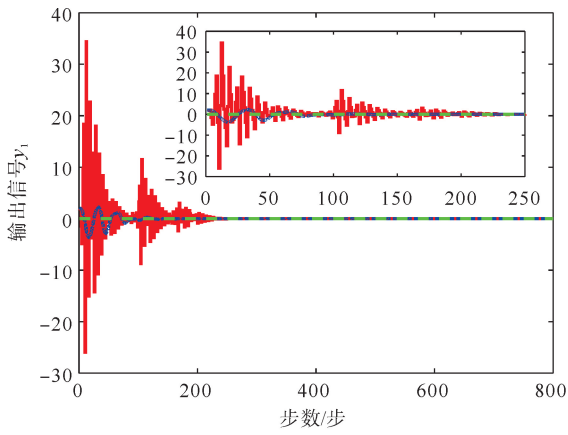


图4 CCSTR在传统反步法控制(CBC)<sup>[13]</sup>与命令滤波控制(CFC)下的输出信号曲线 $y_1$

— CBC; - - - CFC; ···  $x_{1d}$

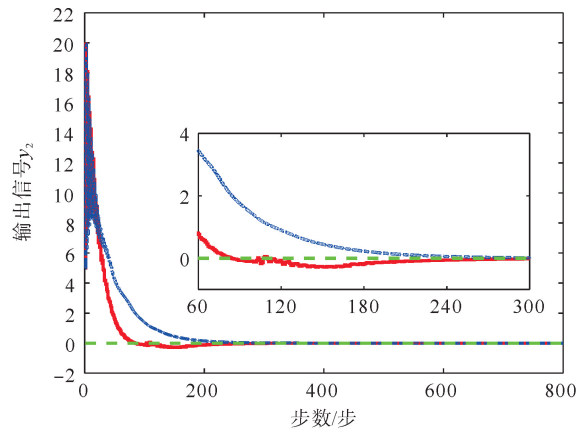


图5 CCSTR在传统反步法控制(CBC)<sup>[13]</sup>与命令滤波控制(CFC)下的输出信号曲线 $y_2$

— CBC; - - - CFC; ···  $x_{2d}$

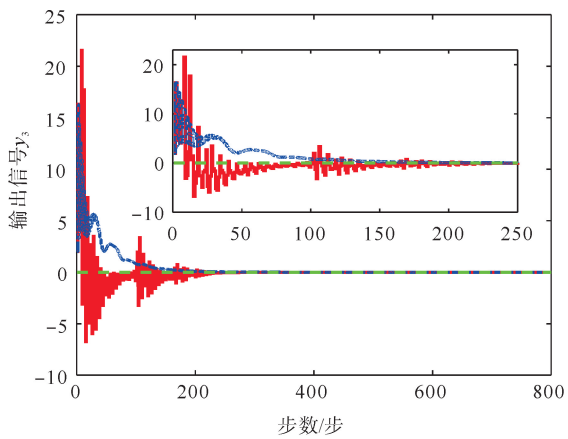


图6 CCSTR在传统反步法控制(CBC)<sup>[13]</sup>与命令滤波控制(CFC)下的输出信号曲线 $y_3$

— CBC; - - - CFC; ···  $x_{3d}$

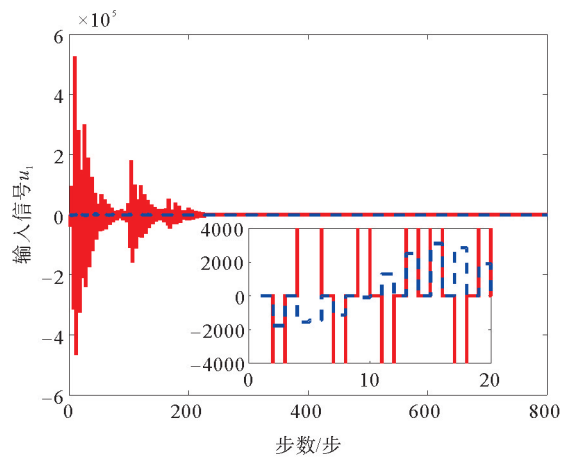


图7 CCSTR在传统反步法控制(CBC)<sup>[13]</sup>与命令滤波控制(CFC)下的输入信号曲线 $u_1$

— CBC; - - - CFC

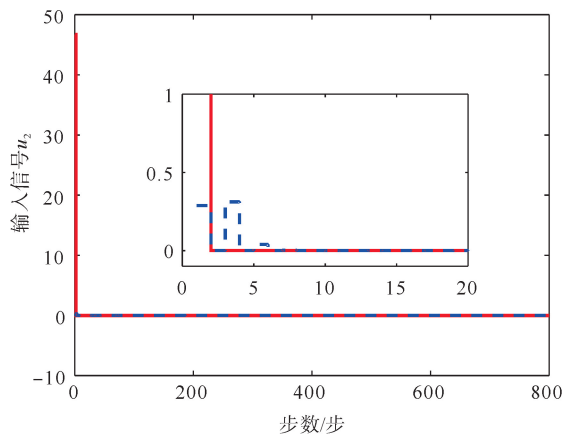


图8 CCSTR在传统反步法控制(CBC)<sup>[13]</sup>与命令滤波控制(CFC)下的输入信号曲线 $u_2$

— CBC; - - - CFC

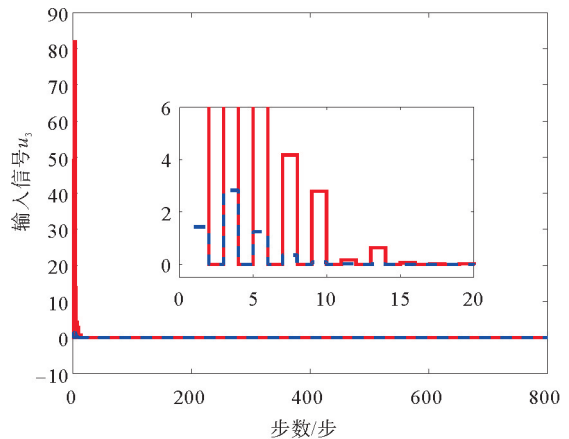


图9 CCSTR在传统反步法控制(CBC)<sup>[13]</sup>与命令滤波控制(CFC)下的输入信号曲线 $u_3$

— CBC; - - - CFC

后剩余反应物浓度与其期望值的偏差,在实际工程中  $y_1$  越小则所生产的产品品质和产量越高,可见命令滤波控制器在提升产品质量和产量方面较传统反步法控制器有明显优势。在图 5 和图 6 中,命令滤波控制器在保证系统无静态偏差的前提下,消除了它们在传统反步法控制器中呈现的负超调现象,由式(2)知  $y_2$ 、 $y_3$  分别是反应器 II 与反应器 I 的实际温度与期望温度的差值,在实际工业过程中反应釜温度变化幅度大是潜在重大安全隐患。两种控制器的输入信号的变化趋势如图 7—9 所示,可以明显地看出,命令滤波控制器的输入信号的变化幅度较传统反步法控制器的的小;进一步由 MATLAB 仿真数据表可知,命令滤波控制器输入信号的变化幅度分别为  $[-3.037, 3.169]$ 、 $[0, 0.3]$ 、 $[0, 2.8]$ ,传统反步法控制器输入信号的变化幅度分别为  $[-460.066, 522.538]$ 、 $[0, 46.7]$ 、 $[0, 81.8]$ ,众所周知,在实际化学过程工业中大的输入信号将会增加实现成本,因此,本文所设计的命令滤波离散控制器更有利于工业实践。

从图 4—6 可以明显地看出,在初始条件以及模糊隶属度函数相同的条件下,本文所提出的控制器改善了传统反步法控制中所有输出信号呈现的超调现象,超调量均明显减小或局部完全消除,说明该控制器具有更优越的控制性能。

从图 7—9 可以明显地看出,与传统反步法控制器相比,仿真时选择相同的初始条件以及模糊隶属度函数,命令滤波控制器可使系统的所有输入信号的变化幅度变得更小,这可以节约系统的运行成本,更利于控制器的工程实现。

## 5 结论

针对 CCSTR 系统,提出了一种基于命令滤波的离散时间模糊自适应控制器。采用欧拉法对 CCSTR 系统的数学模型进行离散化处理;利用命令滤波技术解决在 CCSTR 离散时间系统控制器设计过程中由反步法引起的非因果问题和虚拟控制函数连续求差分的过程中引起的“计算复杂性”问题,并采用误差补偿信号消除了滤波误差;通过模糊自适应控制与命令滤波相结合的方法简化控制器的设计步骤,降低控制系统的计算复杂度;基于差分 Lyapunov 稳定性分析方法证明闭环系统的稳定性;MATLAB 仿真分析验证了所设计的控制器是有效可行的。与现有的 CCSTR 连续控制方法相比,该控制策略更具直观性与可实现性;相较于现有的离散控制方法,该控制器结构简单、计算复杂度低、超调量小、控制输入量更易于工程实现。

本文所提出的命令滤波控制器的输入信号仍然存在一定幅度的波动,如何减小控制器输入信号的变化幅度以节约系统的运行成本将在后续研究中进一步探讨。

### 参考文献(References):

- [1] ZHOU W, LIU H C, HE H B, et al. Neuro-optimal tracking control for continuous stirred tank reactor with input constraints[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 15(8): 4516-4524.
- [2] 翟廉飞, 柴天佑, 靖峰. 连续搅拌反应釜的智能 PID 控制[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(12): 3753-3757.  
ZHAI Lianfei, CHAI Tianyou, JING Feng. Intelligent PID control of continuous stirred tank reactors[J]. Journal of System Simulation, 2009, 21(12): 3753-3757.
- [3] LEHOUCHE H, GUEGUEN H, MENDIL B. Set-point supervisory control methodology for a nonlinear continuous stirred tank reactor process[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2012, 37(3): 831-849.
- [4] 刘玉平, 翟廉飞, 柴天佑. 基于神经网络和多模型的非线性自适应 PID 控制及应用[J]. 化工学报, 2008, 59(7): 1671-1676.  
LIU Yuping, ZHAI Lianfei, CHAI Taiyou. Nonlinear adaptive PID control using neural networks and multiple models and its application[J]. Journal of Chemical Industry and Engineering(China), 2008, 59(7): 1671-1676.
- [5] 杨慧中, 苏思贤. 连续搅拌反应釜系统的自抗扰控制[J]. 控制工程, 2011, 18(3): 369-372.  
YANG Huizhong, SU Sixian. CSTR control based on active disturbance rejection control[J]. Control Engineering of China, 2011, 18(3): 369-372.
- [6] 官星辰, 刘航, 马鲁宁, 等. 连续搅拌反应釜离散模型辨识与滑模控制[J]. 控制工程, 2019, 26(3): 440-447.  
GUAN Xingchen, LIU Hang, MA Luning, et al. Discrete-time model identification and sliding mode control for continuous stirred tank reactors[J]. Control Engineering of China, 2019, 26(3): 440-447.

(下转第 162 页)