

## 波浪循环作用下海洋地基的极限分析

刘蒙蒙, 李 凯\*, 赵新波, 杨博文, 章博涛

(青岛理工大学 理学院, 青岛 266525)

**摘要:**波浪荷载会诱发海床失稳、海底滑坡、海洋建筑物倾覆等事故,造成经济损失甚至人员伤亡,故研究波浪荷载与海洋地基稳定性的关系意义重大。基于 Zarka 安定理论引入 Drucker-Prager 屈服准则,考虑了随动硬化与等向硬化,提出了硬化模量演化关系;引入结构转换参数,并将屈服面表达在该平面上;通过分析初始结构转换参数与最终结构转换参数位置关系,确定地基安定状态。通过将海洋土三轴循环试验数据代入模型验证计算,得到模型参数后,计算得出模型预测值,并将模型预测值与试验结果进行对比,结果显示模型预测值与试验实测结果吻合较好。

**关键词:**循环荷载;弹塑性极限分析;海洋地基;Zarka 安定理论

**中图分类号:**O353.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-4602(2025)01-0026-08

## Limit analysis of marine foundations under the action of wave cycles

LIU Mengmeng, LI Kai\*, ZHAO Xinbo, YANG Bowen, ZHANG Botao

(School of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao 266525, China)

**Abstract:** The wave loads can induce accidents such as seabed instability, submarine landslides and overturning of marine buildings, causing economic losses and even casualties, so it is significant to study the relationship between wave loads and the stability of marine foundations. This paper introduces the Drucker-Prager criterion based on the Zarka shakedown theory and proposes the evolution relationship of hardening modulus by putting into consideration the kinematic hardening and isotropic hardening. It then introduces the structural transition parameter and expresses the yield plane in this plane. The stability state of the foundation is determined by analyzing the positional relationship between the initial structural transition parameter and the final structural transition parameter. After the model parameters are obtained by introducing the marine soil triaxial cycling test data into the model validation calculation, the model prediction values are calculated and compared with the test results. The comparison results show that the model prediction values are in good agreement with the measured results of the test.

**Key words:** cyclic loads; elastoplastic limit analysis; marine foundations; Zarka shakedown theory

收稿日期:2023-03-09

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金(51808306)

作者简介:刘蒙蒙(1996—),女,山东菏泽人。硕士,研究方向为岩土力学与海洋岩土工程。E-mail:780355276@qq.com。

\*通信作者:李 凯(1985—),男,辽宁凌海人。博士,副教授,主要从事岩土材料力学性质及其本构理论方面的研究。

E-mail:kai.li@live.com。

21 世纪又称为“海洋世纪”,石油、天然气等海洋资源的开发利用极大地推动了我国经济的快速发展<sup>[1]</sup>。但海洋开采环境极其恶劣,海洋建筑物在寿命期内的绝大多数时间内都要承受来自波浪荷载的作用,这严重威胁了海洋资源的开发利用和人类的生命安全<sup>[2-3]</sup>。因此,研究波浪荷载和海洋地基稳定性之间的关系极具意义。

波浪荷载对海洋地基的作用可分为直接作用在海洋地基或海床表面上和通过海洋建筑物间接影响地基的稳定性两种<sup>[4]</sup>。尽管海洋地基实际承受的荷载往往远小于其极限承载力,但这并不意味着在受到循环荷载如波浪荷载作用下,海洋地基一定是安全的。具有弹塑性变形特性的海洋地基也极有可能在循环荷载(低于简单加载下的极限荷载)作用下产生交变塑性或累积增量破坏而失稳<sup>[5]</sup>,故必须要进行循环荷载条件下地基的安定分析。安定性分析可视为是将极限分析广义化,主要是为了确定复杂加载模式下循环荷载幅值的安全波动范围。Zarka 安定理论则是静力安定理论中的一种,于 1979 年由法国科学家 ZARKA J 和 CASIER J 共同提出<sup>[6]</sup>。最初该理论被用于开展循环荷载作用下随动硬化材料的极限分析,因理论的优越性得到广泛应用,随后被学者引入道路工程领域,经过不断研究拓展,取得了非常多优秀成果<sup>[7-10]</sup>。在此,将该理论引入到波浪荷载作用下对海洋地基的安定分析中,并验证合理性。

本文基于 Zarka 安定理论展开海洋地基的稳定性分析,并引入了 Drucker-Prager 准则和结构转换参数。在引入的结构转换参数平面内表示受力前后的屈服面,通过判断初始和最终屈服面位置关系得到在该循环荷载作用下与该试样相同性质的地基可能处于何种安定状态<sup>[11]</sup>。通过山东烟台港区原状土<sup>[12]</sup>和海相土<sup>[13]</sup>两种海洋土的三轴循环试验数据建立硬化函数关系式,通过不同加载方式计算模型参数,给出试验数据与模型预测值的对比图。

## 1 安定理论与结构的受力行为

### 1.1 安定理论

20 世纪 30 年代初,安定理论一经提出,随后不断得到发展与推广。1938 年 MELAN<sup>[14]</sup>建立的静力型安定理论(Melan 定理)与 1960 年 KOITER<sup>[15]</sup>证明的机动型安定理论(Koiter 定理)共同组成了经典安定理论。Zarka 安定理论是经典安定理论的一个分支,是通过确定结构在受到循环应力时的初始屈服面和最终屈服面在结构转换参数平面内的位置来判断其安定状态。

安定状态是指当给定荷载变化区间时,结构内部分区域经过载荷有限次加卸载循环达到稳定的极限状态。结构的变形特性在不同应力区间内循环有以下 4 种行为(图 1)<sup>[16-17]</sup>:

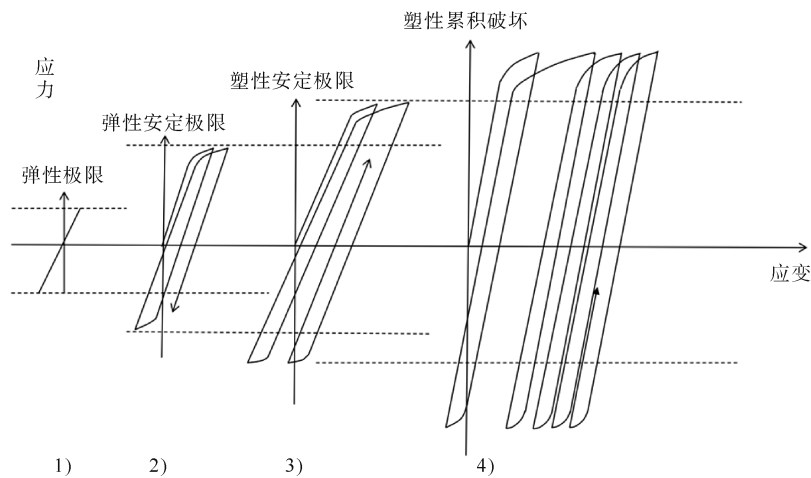


图 1 结构在循环荷载作用下的 4 种行为

- 1) 完全弹性行为:结构在整个受力过程中受到的外载荷较小时,仅产生弹性变形。
- 2) 弹性安定行为:结构受到的循环应力处于完全弹性行为与塑性安定行为时所受到的循环应力之

间,且在有限次应力-应变循环下结构产生微小的塑性变形,但最终行为仍为线弹性行为,达到安定状态。

3) 塑性安定行为:此应力循环范围比弹性安定行为时受到的循环应力大,但小于塑性累积破坏行为时受到的载荷。在有限次应力循环过程中,结构的塑性变形随着循环次数的增加产生非常明显的累积,但最终达到稳定状态,此后在应力循环区间内继续循环无塑性变形的产生。

4) 塑性累积破坏行为:结构受到的循环应力非常大,直接进入屈服阶段,且塑性变形快速累积,在一定循环次数后发生破坏。

## 1.2 结构的受力行为

考虑任一弹塑性受力结构  $V$  (图2),其受到每单位体积的体力  $X_j^d(x,t)$  和初始应变  $\epsilon_{ij}^1(x,0)$ ,在边界  $\partial_{F_i}V$  上,受到表面力  $F_i^d(x,t)$ ;在位移边界  $\partial_{U_j}V$  处给定表面位移  $U_j^d(x,t)$ ,假定  $\partial_{F_i}V$  和  $\partial_{U_j}V$  在整个加载过程中为定值<sup>[1]</sup>。

一般情况下,弹塑性结构在受到外荷载作用时,发生的行为可由式(1)得

$$\begin{cases} \sigma_{ij,i} = X_j^d, & \sigma_{ij} \cdot n_j = F_i^d |_{\partial_{F_i}V} \\ \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (\nabla U_j + \nabla^t U_j), U_j = U_j^d |_{\partial_{U_j}V} \\ \sigma_{ij} = L_{ijkl} \cdot (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p - \epsilon_{ij}^1) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\epsilon_{ij}$  为边界条件动力行为容许下的应变场;  $U$  为结构位移场;  $\sigma_{ij}$  为应力边界条件和结构内部体力静力容许下的应力场;  $L_{ijkl}$  为对称正定弹性刚度矩阵;  $\epsilon_{ij}^p$  为塑性应变场;  $\epsilon_{ij}^1$  为初始应变场;  $X_j^d$  为体力。

弹塑性结构承受不同的荷载,产生的行为总体上可由弹性行为与非弹性行为两部分组成。当受到的荷载低于屈服极限时,结构可视为处于线弹性阶段,即为弹性行为阶段,可表示为

$$\begin{cases} \sigma_{ij,i}^e = X_j^d, & \sigma_{ij}^e \cdot n_j = F_i^d |_{\partial_{F_i}V} \\ \epsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} \cdot (\nabla U_j^e + \nabla^t U_j^e), U_j^e = U_j^d |_{\partial_{U_j}V} \\ \sigma_{ij}^e = L_{ijkl} \cdot (\epsilon_{ij}^e - \epsilon_{ij}^1) \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\sigma_{ij}^e$  为边界面力和结构内部体力静力容许下的弹性应力场;  $\epsilon_{ij}^e$  为位移边界条件动力行为动力容许下的弹性应变场;  $U_j^e$  为弹性位移场。

若持续增加荷载并超过该结构的屈服极限,产生的部分变形不可再恢复,即产生塑性变形,此时结构行为为非弹性行为。假定结构是完全弹性的,则真实的位移、应变和应力应分解为

$$\begin{cases} U_j(t) = U_j^e(t) + U_j^{\text{inc}}(t) \\ \epsilon_{ij}(t) = \epsilon_{ij}^e(t) + \epsilon_{ij}^{\text{inc}}(t) \\ \sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^e(t) + \rho_{ij}(t) \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $U_j^{\text{inc}}(t)$  为非弹性位移场;  $\epsilon_{ij}^{\text{inc}}(t)$  为非弹性应变场;  $\rho_{ij}(t)$  为残余应力场。

在位移边界  $\partial_{U_j}V$  上,  $\epsilon_{ij}^{\text{inc}}(t)$  取为0,是一个协调应变场,残余应力场  $\rho_{ij}(t)$  与零外载荷相平衡,用数学关系式可表示为

$$\begin{cases} \rho_{ij,i} = 0 |_{\partial_{F_i}V}, & \rho_{ij} n_j = 0 |_{\partial_{U_j}V} \\ \epsilon_{ij}^{\text{inc}} = \frac{1}{2} (\nabla U_j^{\text{inc}} + \nabla^t U_j^{\text{inc}}), U_j^{\text{inc}} = 0 |_{\partial_{U_j}V} \\ \rho_{ij} = L_{ijkl} \cdot (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p) \end{cases} \quad (4)$$

## 1.3 结构的受力屈服和塑性流动

在结构受力过程中,采用偏应力  $S_{ij}$  表示 Drucker-Prager 屈服准则<sup>[8]</sup>:

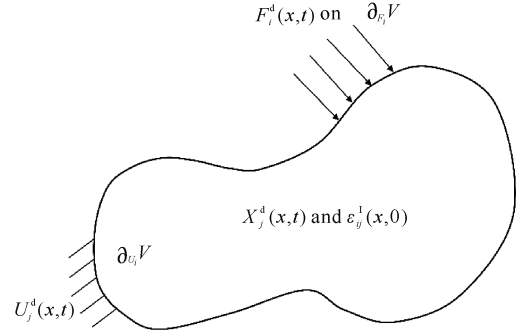


图2 结构的受力情况及边界条件

$$f = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{y}_{ij})(\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{y}_{ij})} - \alpha \mathbf{I}_1(\sigma_{ij}) + k \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{S}_{ij}$  为偏应力张量;  $\mathbf{y}_{ij}$  为随动硬化参数,  $\mathbf{y}_{ij} = h\epsilon_{ij}^p$ ,  $h$  为随动硬化模量;  $\mathbf{I}_1(\sigma_{ij})$  为第一柯西应力张量不变量;  $\alpha$ 、 $k$  为材料参数,采用非相关的流动法则。

在受力分析中,结构受到的实际偏应力  $\mathbf{S}_{ij}$  可分为两部分:

$$\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{S}_{ij}^e + \text{dev}\boldsymbol{\rho}_{ij} \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{S}_{ij}^e$  为弹性偏应力; dev 为将应力转换为偏应力的算子。

由式(5)(6)得,此时的 Drucker-Prager 屈服条件可表示为

$$f = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{S}_{ij}^e - \mathbf{Y}_{ij})(\mathbf{S}_{ij}^e - \mathbf{Y}_{ij})} - r \leq 0 \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{y}_{ij} - \text{dev}\boldsymbol{\rho}_{ij}$ , 为新引入的结构转换参数;  $r = \alpha \mathbf{I}_1(\sigma_{ij}) + k \leq r_{\min}$ , 若  $r \geq r_{\min}$ , 结构发生塑性流动。

在结构转换参数平面中,式(4)可表示为

$$\begin{cases} \rho_{ij,i} = 0 |_{\partial F_i V}, & \rho_{ij} n_j = 0 |_{\partial U_j V} \\ \epsilon_{ij}^{\text{ine}} = \frac{1}{2}(\nabla U_j^{\text{ine}} + \nabla^t U_j^{\text{ine}}), U_j^{\text{ine}} = 0 |_{\partial U_j V} \\ \rho_{ij} = \mathbf{L}'^{-1}_{ijkl} \cdot \left( \epsilon_{ij}^{\text{ine}} - \frac{1}{h} \cdot \mathbf{Y}_{ij} \right) \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{L}'^{-1}_{ijkl} = \mathbf{L}^{-1}_{ijkl} + \frac{1}{h} \text{dev}$ 。

结构发生在偏应力平面的塑性流动方向与结构转换参数平面内的塑性流动方向相反,如图 3 中塑性准则在偏应力平面和结构转换参数平面内所示,利用数学公式可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &\in \partial\psi_{C(\mathbf{Y}_{ij})}(\mathbf{S}_{ij}^e) \\ \dot{\epsilon}_{ij}^p &\in -\partial\psi_{C(\mathbf{S}_{ij}^e)}(\mathbf{Y}_{ij}) \end{aligned} \quad (9)$$

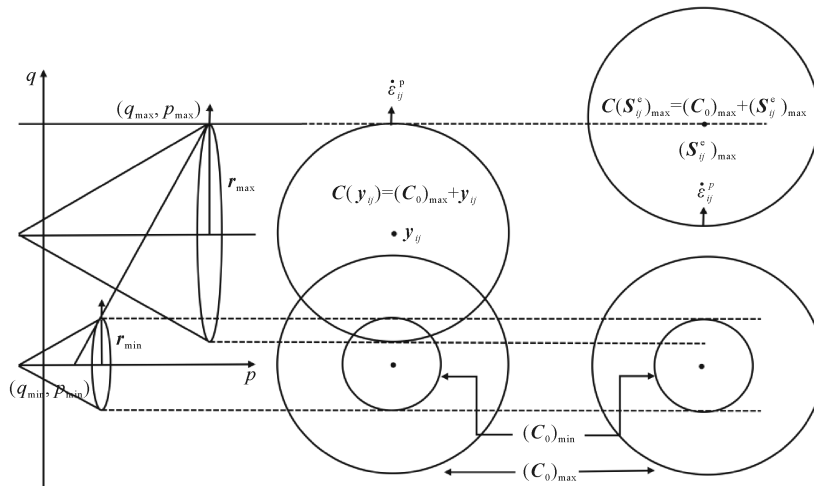


图 3 在  $p$ - $q$  平面、偏应力平面及结构转换参数平面内的塑性准则

Zarka 安定理论确定研究结构在当前应力循环下的安定状态,是研究在结构转换参数平面内结构初始屈服面与最终屈服面的位置关系<sup>[11]</sup>,二者相交有共同区域(图 4),则认为此时结构处在弹性安定状态;若二者无共同区域(图 5),则认为此时结构受到的载荷促使结构达到塑性安定状态,初始屈服面与最终屈服面分别是以  $\mathbf{S}_{ij}^e_{\min}$  与  $\mathbf{S}_{ij}^e_{\max}$  为圆心的 2 个圆。

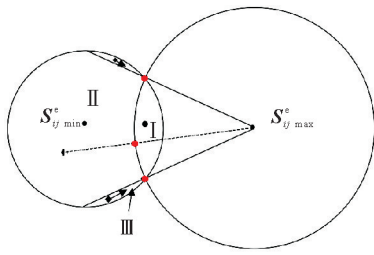


图4 弹性安定的位置分布

• 初始值; • 最终值

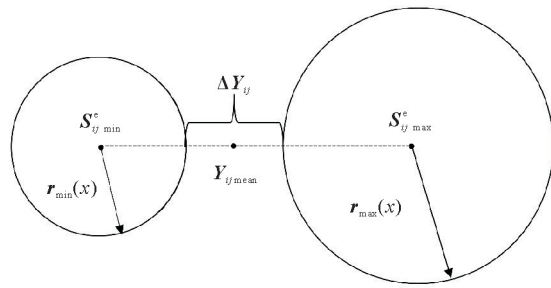


图5 塑性安定的位置分布

当结构处于弹性安定状态时,此时最终结构转换参数  $Y_{ij}$  的确定可分为3种情况(图4):①初始结构转换参数位于区域 I 时,最终结构转换参数是初始结构转换参数;②初始结构转换参数位于区域 II 时,连接初始结构转换参数与最终屈服面中心,最终结构转换参数为连线与最终屈服面边界的交点处;③初始结构转换参数位于区域 III 时,最终结构转换参数是初始屈服面边界和最终屈服面边界的交点处。

当2个屈服面之间无共同区域(图5),此时结构在此应力循环区间内处于塑性安定状态,最终结构转换参数可由  $Y_{ij \text{mean}}$  表示。

$$Y_{ij \text{mean}} = \frac{\Delta S_{ij}^e}{2} \left\{ 1 + \frac{r_{\min}(x) - r_{\max}(x)}{\sqrt{\frac{1}{2} [\Delta S_{ij}^e(x) \Delta S_{ij}^e(x)]}} \right\} + S_{ij \text{min}}^e(x) \quad (10)$$

综上,Zarka 安定模型确定研究目标安定状态的关键在于,通过试验条件和试验数据绘制的  $p$ - $q$  平面内的屈服准则,并向偏应力平面进行投影;通过判断结构转换参数平面内初始屈服面和最终屈服面是否有交集来确定结构是处在弹性安定状态还是塑性安定状态。

## 2 模型验证

### 2.1 山东烟台港区原状土三轴试验验证

试验数据取自胡坤榕<sup>[12]</sup>使用 GDS 动三轴试验系统对山东烟台港西港区海洋土开展的一系列静、动三轴试验,试验土样取自泥面以下 2.0~5.5 m 的原状土。该试验土样在不排水条件下内摩擦角为  $19.26^\circ$ ,黏聚力为 7.08 kPa,比重为  $2.68 \text{ kg/m}^3$ ,塑限为 17.41%,液限为 32.98%,压缩指数与回弹指数分别为 0.205 和 0.035。试验采用应变控制模式,设定了 20、35 和 50 kPa 3 个固结围压模式;选取施加偏应力比分别为 0、0.4、0.8 条件下,循环动应力比分别为 0.1、0.2、0.3、0.4 共 12 组试验数据。

首先通过笔者所建模型,将试验试样代入模型,通过对试样在首次受到循环荷载作用时得到的数据进行计算,得到初始结构转换参数。然后通过初始结构转换参数平面和最终结构转换参数平面有交集,如图 4 中 II 位置关系,判定该海洋土试样在受到循环荷载作用时处于弹性安定状态,最终结构转换参数通过对初始结构转换参数进行映射得到。

在 Zarka 安定理论中引入 Drucker-Prager 屈服准则,除参数  $\alpha$  和  $k$  的确定外,硬化模量  $h$  值的计算也非常关键。在传统金属研究中,硬化模量是 1 个常量,但是在对岩土工程开展研究时,由于土体性质的复杂性,硬化模量的计算就较为复杂,是 1 个变量。对试验数据结果进行分析,提出硬化模量与循环动应力比的函数关系式,见式(11),变化趋势如图 6 所示,拟合方差为 0.984 65(拟合

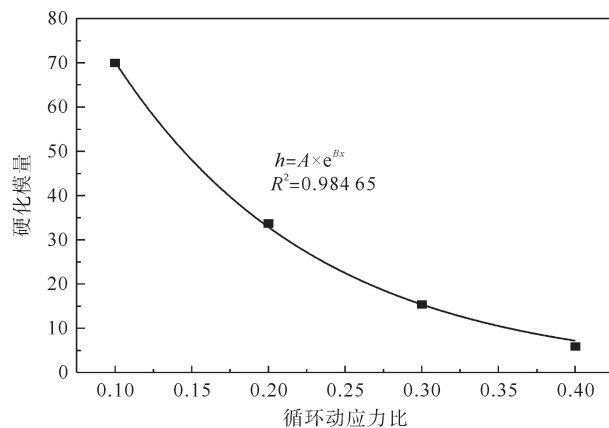


图6 硬化模量随循环动应力比的变化趋势

效果较好)。

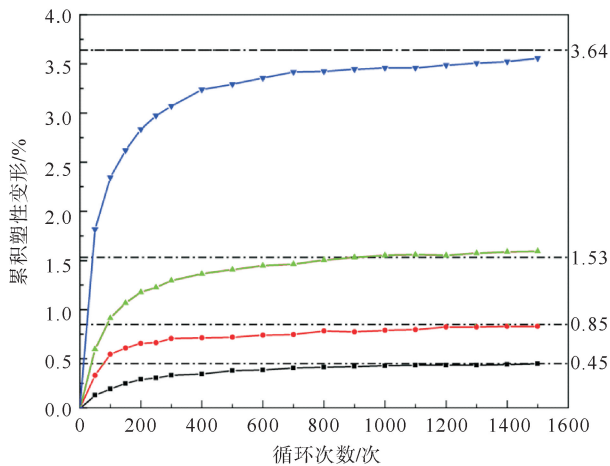
$$h = A \times e^{Bx} \tag{11}$$

式中: $x$  为循环动应力比,指循环加载时的最小荷载与最大载荷之比; $A$ 、 $B$  为模型参数,取值见表 1。

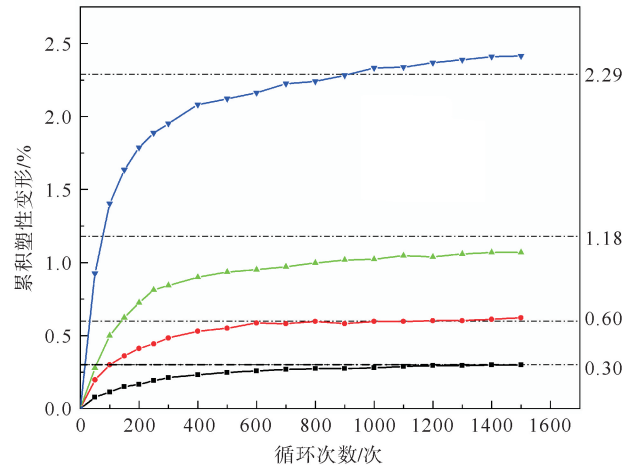
试验数据结果与计算值如图 7 所示。由图 7 可知,累积塑性变形经过前期的迅速累积,在 200 次左右时增加趋势逐渐平缓,并逼近模型计算值,虽有个别试验数据最高值略超过计算值约 0.4%,但在合理范围内。

表 1 参数与固结静偏应力比的关系

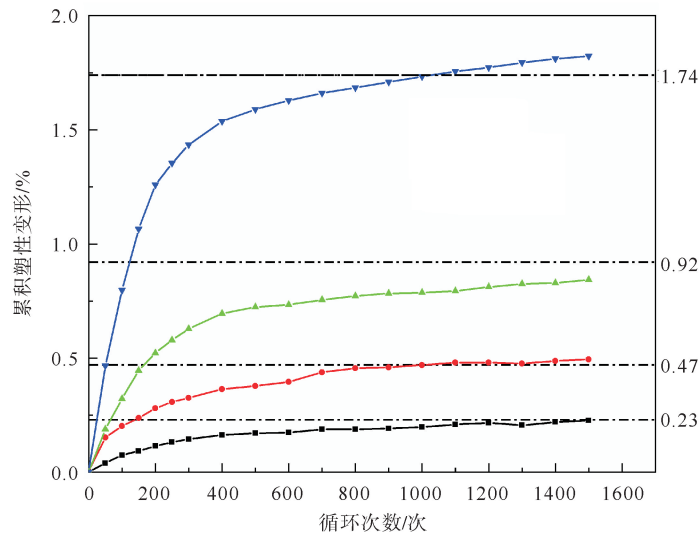
静偏应力比	A	B	R <sup>2</sup>
0.0	167.40	-8.205	0.984 65
0.4	350.08	-7.588	0.988 00
0.8	532.99	-7.392	0.987 20



(a) 固结静偏应力比为0时试验结果与预测值对比



(b) 固结静偏应力比为0.4时试验结果与预测值对比



(c) 固结静偏应力比为0.8时试验结果与预测值对比

图 7 固结围压35 kPa条件下不同固结静偏应力比试验结果与模型预测值对比

— 0.1; — 0.2; — 0.3; — 0.4; --- 预测值

## 2.2 海相软黏土地基模型验证

采用李保军等<sup>[13]</sup>的以海相软黏土为研究对象开展排水动三轴试验得到的一系列试验数据进行进一步的验证。与 2.1 节案例相同,模型参数皆取自试验,对试验数据进行分析处理,通过计算得该海相土试样在波浪循环荷载作用下在结构转换参数平面内的屈服面位置如图(4)中 II 位置关系,判定本海相土试

样在循环荷载作用下处于弹性安定状态。依据式(11)提出的硬化模量与循环动应力比的函数形式,得到  $A$ 、 $B$  的取值,此处不再赘述。试验结果与模型预测值的对比结果如图 8 所示。由图 8 可以看出,试验结果数据趋势逼近预测值,在合理范围内浮动。

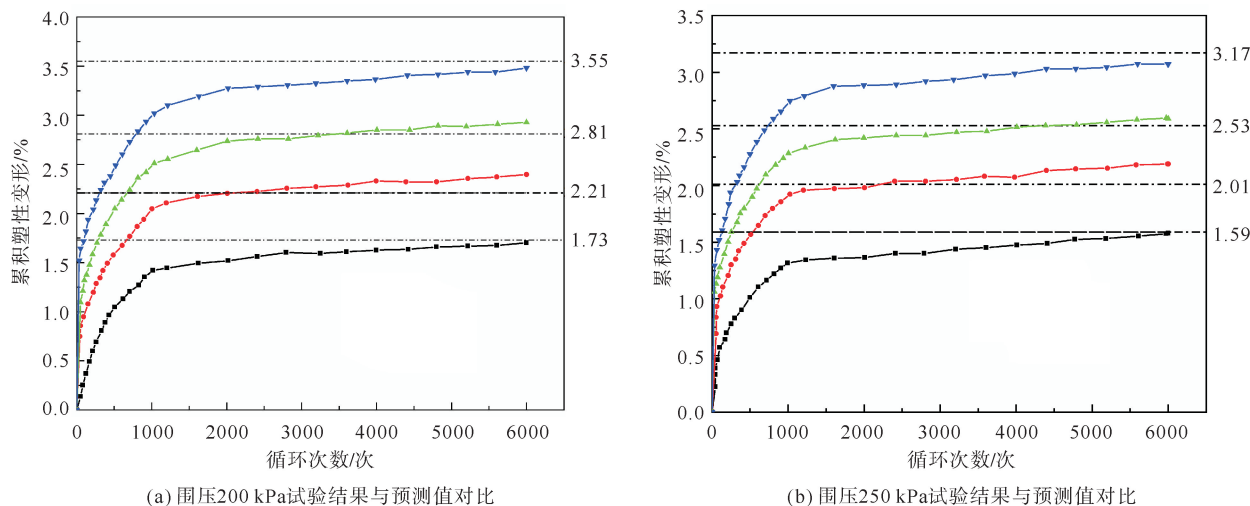


图 8 不同围压下试验结果与模型预测值对比

—●— 30; —●— 40; —●— 50; —●— 60; - - - 预测值

### 3 结论

1) 基于 Zarka 安定理论开展循环荷载作用下海洋地基的安定分析,引入了 Drucker-Prager 准则,考虑了土体在承受循环荷载时其屈服面的随动强化和等向强化,贴近工程实际。

2) 引入结构转换参数,将土样承受循环荷载过程中屈服面的变化表示在结构转换参数平面内,在该平面内确定土体的安定状态。本文中 2 种试验土样在循环前期塑性应变快速累积,经有限次循环后不再产生塑性变形,且逼近模型预测值,此时土体处在弹性安定状态。

3) 基于试验数据结果拟合分析,提出了硬化模量演化关系,表示硬化模量与循环动应力比之间的关系,得到材料参数  $A$ 、 $B$ ,并且标定该材料参数。将计算得到的模型预测值与试验结果进行对比,符合预期。该模型所需参数少,且都具有其物理意义。

#### 参考文献(References):

- [1] 殷悦,林香红,辛冰,等. 中国-东盟蓝色经济合作现状与展望[J]. 海洋经济,2022,12(6):8-14.  
YIN Yue,LIN Xianghong,XIN Bing,et al. Status quo and prospect of China-ASEAN blue economy cooperation[J]. Marine Economy, 2022,12(6):8-14.
- [2] 刘丹. 波浪荷载对海洋黏土力学性状影响的试验研究[D]. 南京:南京水利科学研究院,2010.  
LIU Dan. Experimental study on the mechanical properties of marine clay influenced by wave load[D]. Nanjing:Nanjing Hydraulic Research Institute,2010.
- [3] 于通顺,齐越,奚泉. 考虑波浪作用相位关系的复合筒型基础地基液化研究[J]. 太阳能学报,2017,38(4):1150-1156.  
YU Tongshun,QI Yue,XI Quan. Liquefaction analysis of seabed around composite bucket foundation considering phase relation between wave force and wave pressure on seabed[J]. Acta Energetica Solaris Sinica,2017,38(4):1150-1156.
- [4] 李玉成. 波浪对海上建筑物的作用[M]. 北京:海洋出版社,1990.  
LI Yucheng. Wave action on offshore structures[M]. Beijing:China Ocean Press,1990.
- [5] 王仁,熊祝华,黄文彬. 塑性力学基础[M]. 北京:科学出版社,1987.  
WANG Ren,XIONG Zhuhua,HUANG Wenbin. Fundamentals of plastic mechanics[M]. Beijing:Science Press,1987.
- [6] ZARKA J,CASIER J. Elastic-plastic response of structure to cyclic loading:Practical rules[J]. Mechanics Today,1979,6:93-198.
- [7] HABIBALLAH T,CHAZALLON C. An elastoplastic model based on the shakedown concept for flexible pavements unbound granular

- materials[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2005, 29(6): 577-596.
- [8] ALLOU F, PETIT C, CHAZALLON C, et al. Shakedown approaches to rut depth prediction in low-volume roads[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2010, 136(11): 1422-1434.
- [9] CHAZALLON C, ALLOU F, HORNYCH P, et al. Finite element modeling of the long term behavior of a full scale flexible pavement with shakedown theory[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009, 33: 45-70.
- [10] CHAZALLON C, KOVAL G, HORNYCH P, et al. Modelling of rutting of two flexible pavements with the shakedown theory and the finite element method[J]. Computers and Geotechnics, 2009, 36: 798-809.
- [11] 李凯, 林星宇, 孔亮. Zarka 安定理论及其在法国道路工程中的应用[C]//中国力学大会论文集. 杭州, 2019: 1572-1583.  
LI Kai, LIN Xingyu, KONG Liang. Zarka shakedown theory and its application to road engineering in France[C]// Proceedings of China Mechanics Conference. Hangzhou, 2019: 1572-1583.
- [12] 胡坤榕. 考虑循环弱化效应的软土地基承载力研究[D]. 天津: 天津大学, 2016.  
HU Shenrong. Research on the bearing capacity of soft clay foundations considering the weakening effect under cyclic loading[D]. Tianjin: Tianjin University, 2016.
- [13] 李保军, 黄伟军, 张鹏军. 海相软土循环荷载下累积塑性应变试验研究[J]. 现代隧道技术, 2020, 57(S1): 780-786.  
LI Baojun, HUANG Weijun, ZHANG Pengjun. Experimental study on cumulative plastic strain of marine soft soil under cyclic loading[J]. Modern Tunnelling Technology, 2020, 57(S1): 780-786.
- [14] MELAN E. Zur plastizität des räumlichen kontinuums[J]. Archive of Applied Mechanics, 1938, 9(2): 116-126.
- [15] KOITER W T. General theorems for elastic-plastic solids[J]. Progress in Solid Mechanics, 1960, 1: 167-221.
- [16] WERKMEISTER S, DAWSON A R, WELLNER F. Permanent deformation behaviour of granular materials[J]. Road Materials and Pavement Design, 2005, 6(1): 31-51.
- [17] ANSAL A M, ERKEN A. Undrained behavior of clay under cyclic shear stresses[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1989, 115(7): 968-983.

(责任编辑 张晓靖; 英文校审 程文华)

### (上接第 15 页)

- [10] 王伟, 池旭超, 张芳, 等. 冻融循环对滨海软土三轴应力应变曲线软化特性的影响[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(S2): 140-144.  
WANG Wei, CHI Xuchao, ZHANG Fang, et al. Effect of freeze-thaw circles on softening behaviors of triaxial stress-strain curve of coastal soft soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(S2): 140-144.
- [11] 史文杰. 循环荷载作用下人工冻融软黏土动力特性试验研究[D]. 温州: 温州大学, 2019.  
SHI Wenjie. Dynamic behavior of artificial freeze-thaw soft clay under cyclic loading[D]. Wenzhou: Wenzhou University, 2019.
- [12] 胡田飞, 刘建坤, 房建宏, 等. 冻融循环下冷却温度对粉质黏土力学性质影响的试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, 36(7): 1757-1767.  
HU Tianfei, LIU Jiankun, FANG Jianhong, et al. Experimental study on the effect of cyclic freezing-thawing on mechanical properties of silty clay under different cooling temperatures[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, 36(7): 1757-1767.
- [13] 陈征远, 郑圣, 钱成雷, 等. 多向循环剪切应力路径下地基软黏土变形特性试验研究[J]. 建筑科学, 2023, 39(9): 114-120.  
CHEN Zhengyuan, ZHENG Sheng, QIAN Chenglei, et al. Experimental study on deformation characteristics of foundation soft clay under multidirectional cyclic shear stress path[J]. Building Science, 2023, 39(9): 114-120.
- [14] DU Y, DAI M, WANG C, et al. Cyclic shear characteristics of marine cement soil under stress path with bidirectional shear stress[J]. Marine Georesources & Geotechnology, 2021, 39(10): 1177-1191.
- [15] IDRIS I M, DOBRY R, SINGH R D. Nonlinear behavior of soft clays during cyclic loading[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1978, 104(12): 1427-1447.

(责任编辑 张晓靖; 英文校审 程文华)