第 46 卷第 2 期
Vol. 46 No. 2 2025

青岛理工大学学报
Journal of Qingdao University of Technology

具有 Ornstein-Uhlenbeck 过程随机 HBV 传染模型的平稳分布研究

许传龙，卢　春*，周俊桦
（青岛理工大学 理学院，青岛 266525）

摘　要：研究了一个参数满足均值回归 Ornstein-Uhlenbeck 过程的乙型肝炎病毒（HBV）感染模型的平稳分布。首先，证明了该随机传染病模型存在唯一的全局正解。其次，通过构造适当的 Lyapunov 函数，得到了该随机传染病模型平稳分布存在的充分条件，分析了 Ornstein-Uhlenbeck 过程对该行为的影响，为控制该疾病的传播提供了理论依据。

关键词：乙型肝炎病毒模型；随机干扰；Lyapunov 函数；平稳分布

中图分类号：O29　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1673-4602(2025)02-0141-10

Research on the stationary distribution of a HBV stochastic epidemic model incorporating Ornstein-Uhlenbeck process

XU Chuanlong，LU Chun*，ZHOU Junhua
（School of Science，Qingdao University of Technology，Qingdao 266525，China）

Abstract：This study investigates the stationary distribution of a hepatitis B virus（HBV）epidemic model with a parameter that follows a mean-reverting Ornstein-Uhlenbeck process. Firstly，it proves that the stochastic epidemic model has a unique global positive solution. Secondly，by constructing a suitable Lyapunov function，it obtains the sufficient conditions for the stationary distribution of the stochastic epidemic model，analyzes the effect of the Ornstein-Uhlenbeck process on this behavior，and provides a theoretical basis for controlling the spread of this disease.

Key words：hepatitis B virus（HBV）model；stochastic disturbance；Lyapunov function；stationary distribution

乙型肝炎（以下简称乙肝）是一种由乙肝病毒（HBV）引起的可危及生命的肝脏感染，它已成为全球公共卫生领域的一个重大挑战，可造成慢性感染。乙肝患者死于肝硬化和肝癌的风险很高。世界卫生组织西太平洋区域和世界卫生组织非洲区域的乙肝感染负担最重，分别有 1.16 亿人和 8100 万人存在慢性感染[1]。乙肝分为急性肝炎和慢性肝炎，前者是指感染后的前 6 个月，在急性期感染者通常可以在几个月内

收稿日期：2023-08-13
基金项目：山东省自然科学基金（ZR2022MA008）
作者简介：许传龙（1999—　），男，山东日照人。硕士，研究方向为生物数学。E-mail：1977496670@qq.com。
*通信作者：卢　春（1980—　），男，黑龙江肇东人。博士，副教授，主要从事生物数学和传染病模型建模等方面的研究。E-mail：mathlc@163.com。

康复;而后者是由于病毒长期存留在体内而引起的,可能会导致严重的健康问题,如肝功能衰竭和肝癌[2-3]。乙肝病毒传染途径多样,传染性强[4],对人类的生命健康造成巨大的危害,因此干扰和阻止其传播对人类的生存和发展具有重大意义。

建立传染病数学模型是分析和研究疾病传播关键因素的有效方法,为制定阻断和控制疾病传播策略提供理论和定量依据[5-7]。LIU 等[8]提出了一个具有饱和发生率的确定性乙肝感染模型,见式(1)。在此模型中,宿主人群被分为5类:易感者 S、暴露者 E、乙肝的感染者 I_1、慢性乙肝的感染者 I_2 以及康复者 R,具体内容如下:

$$\begin{cases} \mathrm{d}S(t)=\left[b-\dfrac{\alpha SI_2}{1+mI_2}-(\mu_0+v)S\right]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}E(t)=\left[\dfrac{\alpha SI_2}{1+mI_2}-(\mu_0+\bar{\beta})E\right]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}I_1(t)=[\bar{\beta}E-(\mu_0+\gamma+\gamma_1)I_1]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}I_2(t)=[\gamma I_1-(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)I_2]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}R(t)=[\gamma_1 I_1+\gamma_2 I_2+vS-\mu_0 R]\mathrm{d}t。 \end{cases} \tag{1}$$

式中:b 为人口的恒定增长率;α 为感染率;$\dfrac{\alpha SI_2}{1+mI_2}$为饱和感染率;$\mu_0$ 为自然死亡率;v 为乙肝疫苗接种率;$\bar{\beta}$ 为暴露者转变为急性乙肝患者的概率;γ 为急性乙肝患者转变为慢性乙肝患者的概率;γ_1 为急性乙肝患者的康复率;γ_2 为慢性乙肝患者的康复率;μ_1 为乙肝患者死亡率。

模型(1)中的参数皆为正的常数,其解在

$$\Gamma=\left\{(S,E,I_1,I_2,R)\in\mathbb{R}_+^5 \mid S+E+I_1+I_2+R\leqslant\frac{b}{\mu_0}\right\}$$

内。对于确定性模型(1),它的基本再生数 R_0 为

$$R_0=\frac{\bar{\beta}b\alpha\gamma}{(\mu_0+\bar{\beta})(\mu_0+\gamma_1+\gamma)(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)(\mu_0+v)}。$$

众所周知,疾病在种群中的传播受到各种形式的随机因素的影响,一些基本参数,如人均出生率或死亡率、环境承载能力、疾病传播率和恢复率等会受到环境变化的影响。它是一个复杂的动态过程,可以利用数学工具进行建模和分析[9]。随机微分方程(SDEs)是一种研究随机因素对疾病传播影响的方法[8],它可以将随机性引入系统的演化。SDEs 可以模拟各种因素(如传染率、恢复率、种群的出生率和死亡率等)的波动和不确定性,从而方便研究这些不确定性如何影响疾病的动态传播;SDEs 也可以用来模拟不同的干扰因素,探索疾病传播的机制以及预测各种可能的结果。

许多学者采用 Ornstein-Uhlenbeck(OU)均值回归过程来模拟随机环境中的参数,该过程满足单独的随机微分方程。例如,WANG 等[10]提出了一个新的包含 OU 均值回归过程的 SIS 感染模型,并建立了随机基本再生数,本文也引入这种非线性随机干扰。

$\bar{\beta}$ 是一个非常重要的参数,假设在随机变化的自然环境中,$\bar{\beta}$ 满足 OU 均值回归过程,并具有如下形式:

$$\mathrm{d}\beta(t)=\theta(\bar{\beta}-\beta)\mathrm{d}t+\delta\mathrm{d}B(t), \tag{2}$$

式中:$\beta(t)$为 $\bar{\beta}$ 的随机形式;θ 为回归速率($\theta>0$);δ 为干扰强度;$B(t)$为标准布朗运动。

方程(2)的解为

$$\beta(t)=\bar{\beta}+\mathrm{e}^{-\theta t}\left[-\bar{\beta}+\beta(0)+\int_0^t\delta\mathrm{e}^{\theta s}\mathrm{d}B(s)\right]。$$

对于任意的时间间隔$[0,T]$,平均疾病传播系数 $\bar{\bar{\beta}}$ 为

$$\bar{\bar{\beta}}=\frac{1}{T}\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t=\bar{\beta}+\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\delta}{\theta}(1-\mathrm{e}^{\theta(s-T)})\mathrm{d}B(s),$$

这里$\mathbb{E}(\bar{\bar{\beta}})=\bar{\beta}$，$\mathrm{Var}(\bar{\bar{\beta}})=\dfrac{\delta^2 T}{3}+O(T^2)$。

根据 SONG 等[9]的分析可知，$\beta(t)$满足以下等式：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t|\beta(\tau)-\bar{\beta}|\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}|x-\bar{\beta}|\boldsymbol{\kappa}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\delta}{\sqrt{\pi\theta}},\tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{\kappa}(x)=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}\delta}\mathrm{e}^{-\frac{\theta(x-\bar{\beta})^2}{\delta^2}}$。

基于以上分析，将式(1)中的感染率$\bar{\beta}$替换为具有随机 OU 过程的$\beta(t)$。另外，考虑到感染率应该是非负的，因此令$\beta^+=\max\{\beta(t),0\}$，于是得到包含 OU 过程的随机乙肝感染模型(4)：

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=\left[b-\dfrac{\alpha SI_2}{1+mI_2}-(\mu_0+v)S\right]\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}E(t)=\left[\dfrac{\alpha SI_2}{1+mI_2}-(\mu_0+\beta^+)E\right]\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}I_1(t)=[\beta^+E-(\mu_0+\gamma_1+\gamma)I_1]\,\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}I_2(t)=[\gamma I_1-(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)I_2]\,\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}R(t)=[\gamma_1 I_1+\gamma_2 I_2+vS-\mu_0 R]\,\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}\beta(t)=\theta(\bar{\beta}-\beta)\,\mathrm{d}t+\delta\mathrm{d}B(t)。\end{cases}\tag{4}$$

1　预备知识简介

本文推导需要的有关随机过程、随机微分方程等的基本定义和定理如下。

假设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备概率空间，考虑$\mathscr{F}$的部分σ-代数构成的类$\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$。如果满足以下条件：

1) 当$s\leqslant t$时，$\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$；

2) 对所有的$t\geqslant 0$，$\mathscr{F}_t=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s$，

则称这个类是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个流，称流$\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$满足通常条件。若其是单调递增右连续，则$\mathscr{F}_0$包含所有的零测集。以后总假设这个通常条件成立。直观地说，$\mathscr{F}_t$是到时刻t为止，能够观测到的事件的全体，$B(t)$是定义在该完备概率空间上的标准布朗运动。

记$\mathbb{R}_+^d=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d:x_i>0,1\leqslant i\leqslant d\}$，$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_d)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_d)^{\mathrm{T}}$。

一般地，考虑初始值$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^d$的$d$维随机微分方程

$$\mathrm{d}x_i(t)=f_i(\boldsymbol{x}(t),t)\,\mathrm{d}t+g_i(\boldsymbol{x}(t),t)\,\mathrm{d}B_i(t),\ t\geqslant t_0,\ i=1,\cdots,d,$$

微分算符$\mathscr{L}$定义为

$$\mathscr{L}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^d f_i(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t)]_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j},$$

因此对于任意函数$V\in C^{2,1}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$，$\mathscr{L}V(\boldsymbol{x}(t),t)$[11]为

$$\mathscr{L}V(\boldsymbol{x}(t),t)=V_t(\boldsymbol{x}(t),t)+V_x(\boldsymbol{x}(t),t)\boldsymbol{f}(t)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(t)V_{xx}(\boldsymbol{x}(t),t)\boldsymbol{g}(t)],\tag{5}$$

其中，

$$V_t=\frac{\partial V}{\partial t},V_x=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_d}\right),V_{xx}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_d}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_d\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_d\partial x_d}\end{pmatrix}。$$

2　全局正解的存在唯一性

定理 1　对于任意给定的初始值$(S(0),E(0),I_1(0),I_2(0),R(0),\beta(0))\in\mathbb{R}_+^5\times\mathbb{R}$，当$t\geqslant 0$时模型

(4)存在唯一的正解$(S(t),E(t),I_1(t),I_2(t),R(t),\beta(t))$,且以概率1保持在$\mathbb{R}_+^5\times\mathbb{R}$。此外,如果$S(0)+E(0)+I_1(0)+I_2(0)+R(0)\leqslant\frac{b}{\mu_0}$,模型(4)有一个不变集

$$\Gamma=\left\{(S,E,I_1,I_2,R,\beta)\in\mathbb{R}_+^5\times\mathbb{R}\mid S(t)+E(t)+I_1(t)+I_2(t)+R(t)\leqslant\frac{b}{\mu_0}\right\}。$$

证明 因为模型(4)的系数满足Lipschitz条件,所以对于任意的初始值$(S(0),E(0),I_1(0),I_2(0),R(0),\beta(0))\in\mathbb{R}_+^5\times\mathbb{R}$,模型(4)在几乎确定意义下具有唯一的局部解$(S(t),E(t),I_1(t),I_2(t),R(t),\beta(t))$,$t\in[0,\tau_e)$,其中$\tau_e$为爆破时间。之后证明该解是全局的,即$\tau_e=+\infty$。参考SHI等[12]定理2.1的证明方法给出证明。证明该解是全局的关键步骤是构造一个非负的C^2函数$V(S,E,I_1,I_2,R,\beta)$:$\mathbb{R}_+^5\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$,使得

$$\mathcal{L}V(S,E,I_1,I_2,R,\beta)\leqslant K,$$

微分算子$\mathcal{L}$的定义见式(5),K是一个大于0的常数,$V(S,E,I_1,I_2,R,\beta)$的定义如下:

$$V=S-1-\ln S+E-1-\ln E+I_1-1-\ln I_1+I_2-1-\ln I_2+R-1-\ln R+\frac{\beta^2}{2},$$

对V运用Itô公式,得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V=&\left(1-\frac{1}{S}\right)\left[b-\frac{\alpha SI_2}{1+mI_2}-(\mu_0+v)S\right]+\left(1-\frac{1}{E}\right)\left[\frac{\alpha SI_2}{1+mI_2}-(\mu_0+\beta^+)E\right]\\&+\left(1-\frac{1}{I_1}\right)[\beta^+E-(\mu_0+\gamma_1+\gamma)I_1]+\left(1-\frac{1}{I_2}\right)[\gamma I_1-(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)I_2]\\&+\left(1-\frac{1}{R}\right)(\gamma_1I_1+\gamma_2I_2+vS-\mu_0R)+\beta\theta(\bar{\beta}-\beta)+\frac{\delta^2}{2}\\\leqslant&b-\frac{\alpha SI_2}{1+mI_2}-(\mu_0+v)S-\frac{b}{S}+\frac{\alpha I_2}{1+mI_2}+(\mu_0+v)+\frac{\alpha SI_2}{1+mI_2}-(\mu_0+\beta^+)E\\&-\frac{\alpha SI_2}{E(1+mI_2)}+\mu_0+\beta^++\beta^+E-(\mu_0+\gamma_1+\gamma)I_1-\frac{1}{I_1}\beta^+E+(\mu_0+\gamma_1+\gamma)+\gamma I_1\\&-(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)I_2-\frac{1}{I_2}\gamma I_1+(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)+\gamma_1I_1+\gamma_2I_2+vS-\mu_0R-\frac{\gamma_1I_1}{R}\\&-\frac{\gamma_2I_2}{R}-\frac{vS}{R}+\mu_0+\beta\theta(\bar{\beta}-\beta)+\frac{\delta^2}{2}\\\leqslant&b+5\mu_0+v+\gamma_1+\gamma_2+\gamma+\mu_1+\frac{\delta^2}{2}+\frac{\alpha}{m}+\sup_{\beta\in\mathbb{R}}\{-\theta\beta^2+\theta\beta\bar{\beta}+|\beta|\}\\:=&K,\end{aligned}$$

这里K是正的常数,余下的证明与ZHOU等[13]的证明相同,在此省略。

证明完毕。

3 平稳分布

在确定性传染病模型中可以通过证明平衡点是全局渐近稳定的来探讨模型的稳定性行为。然而对于大多数随机传染病模型,由于没有平衡点,所以需要证明模型存在一个遍历性平稳分布,这表明疾病会持续稳定存在,并且被有效控制。因为模型(4)中的$R(t)$不影响其他变量的性质,因此在本节中不考虑$R(t)$,即

$$\begin{cases}dS(t)=\left[b-\dfrac{\alpha SI_2}{1+mI_2}-(\mu_0+v)S\right]dt,\\dE(t)=\left[\dfrac{\alpha SI_2}{1+mI_2}-(\mu_0+\beta^+)E\right]dt,\\dI_1(t)=[\beta^+E-(\mu_0+\gamma_1+\gamma)I_1]dt,\\dI_2(t)=[\gamma I_1-(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)I_2]dt,\\d\beta(t)=\theta(\bar{\beta}-\beta)dt+\delta dB(t)。\end{cases}\tag{6}$$

引理 1　如果存在一个具有正则边界 L_0 的有界区域 $U \in \mathbb{R}^d$，对于任意初始值 $X(0) \in \mathbb{R}^d$，若

$$\lim_{t\to\infty}\inf \frac{1}{t}\int_0^t P(\tau, X(0), U)\,\mathrm{d}\tau > 0, \text{a. s.},$$

那么模型(6)存在一个具有 Feller 性质的解。这也说明模型(6)在 $\mathbb{R}^d$ 上具有遍历性平稳分布 $\kappa(\cdot)$[14-16]。

定义随机模型(6)的随机基本再生数 R_0^S 为

$$R_0^S = \frac{\tilde{\beta} b\alpha\gamma}{(\mu_0+\bar{\beta})(\mu_0+\gamma_1+\gamma)(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)},$$

其中 $\tilde{\beta} = \left(\int_0^\infty x^{\frac{1}{5}}\kappa(x)\,\mathrm{d}x\right)^5$，$c_1 = \dfrac{\tilde{\beta} b\alpha\gamma}{(\mu_0+\bar{\beta})^2(\mu_0+\gamma_1+\gamma)(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}$。

定理 2　如果 $R_0^S > 1$，那么模型(6)在 Γ 内存在一个平稳分布。

证明　分别对 $-\ln S$，$-\ln E$，$-\ln I_1$ 和 $-\ln I_2$ 应用 Itô 公式，得到

$$\mathcal{L}(-\ln S) = -\frac{b}{S} + \frac{\alpha I_2}{1+mI_2} + \mu_0 + v,$$

$$\mathcal{L}(-\ln E) = -\frac{\alpha S I_2}{E(1+mI_2)} + \mu_0 + \beta^+,$$

$$\mathcal{L}(-\ln I_1) = -\frac{\beta^+ E}{I_1} + \mu_0 + \gamma_1 + \gamma,$$

$$\mathcal{L}(-\ln I_2) = -\frac{\gamma I_1}{I_2} + \mu_0 + \mu_1 + \gamma_2。$$

建立一个 Lyapunov 函数 V_1，定义为

$$V_1 = -\ln S - c_1\ln E - c_2\ln I_1 - c_3\ln I_2 + c_4 I_2,$$

c_1，c_2，c_3 和 c_4 均为大于 0 的常数。对 V_1 利用 Itô 公式得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V_1 = & -\frac{b}{S} - \frac{c_1\alpha S I_2}{E(1+mI_2)} - \frac{c_2\beta^+ E}{I_1} - \frac{c_3\gamma I_1}{I_2} - \frac{c_4(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}{m}(1+mI_2) \\
& + c_1(\mu_0+\beta^+) + c_2(\mu_0+\gamma_1+\gamma) + c_3(\mu_0+\mu_1+\gamma_2) + \frac{c_4(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}{m} \\
& + c_4\gamma I_1 + \frac{\alpha I_2}{1+mI_2} + \mu_0 + v \\
\leqslant & -5\sqrt[5]{b\alpha\beta^+\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}} + c_1\mu_0 + c_2(\mu_0+\gamma_1+\gamma) + c_3(\mu_0+\mu_1+\gamma_2) \\
& + \frac{c_4(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}{m} + c_1\beta^+ + \mu_0 + v + \alpha I_2 + c_4\gamma I_1 \\
\leqslant & -5\sqrt[5]{b\alpha\tilde{\beta}\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}} + c_2(\mu_0+\gamma_1+\gamma) + c_3(\mu_0+\mu_1+\gamma_2) \\
& + \frac{c_4(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}{m} + c_1(\mu_0+\bar{\beta}) + c_1(\beta^+-\bar{\beta}) + \mu_0 + v + \alpha I_2 + c_4\gamma I_1 \\
& + 5\sqrt[5]{b\alpha\tilde{\beta}\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}} - 5\sqrt[5]{b\alpha\beta^+\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}},
\end{aligned} \tag{7}$$

其中，

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{\tilde{\beta}b\alpha\gamma}{(\mu_0+\bar{\beta})^2(\mu_0+\gamma_1+\gamma)(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}, \\ c_2=\dfrac{\tilde{\beta}b\alpha\gamma}{(\mu_0+\bar{\beta})(\mu_0+\gamma_1+\gamma)^2(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}, \\ c_3=\dfrac{\tilde{\beta}b\alpha\gamma}{(\mu_0+\bar{\beta})(\mu_0+\gamma_1+\gamma)(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)^2}, \\ c_4=\dfrac{\tilde{\beta}b\alpha\gamma m}{(\mu_0+\bar{\beta})(\mu_0+\gamma_1+\gamma)(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)^2}。 \end{cases} \tag{8}$$

因为 $\beta^+=\dfrac{|\beta|+\beta}{2}$,有

$$\beta^+-\bar{\beta}=\frac{|\beta|-\bar{\beta}+\beta-\bar{\beta}}{2}\leqslant|\beta-\bar{\beta}|。 \tag{9}$$

将式(8)和式(9)代入式(7),得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_1\leqslant&-\frac{\tilde{\beta}b\alpha\gamma}{(\mu_0+\bar{\beta})(\mu_0+\gamma_1+\gamma)(\mu_0+\gamma_1+\gamma_2)}+\mu_0+v+c_1|\beta(t)-\bar{\beta}| \\ &+c_4\gamma I_1+\alpha I_2+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}-\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}} \\ &+5\sqrt[5]{b\alpha\tilde{\beta}\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}-5\sqrt[5]{b\alpha\beta^+\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}。 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_2:=&\mathcal{L}\left(V_1+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}I_2\right) \\ \leqslant&-\frac{\tilde{\beta}b\alpha\gamma}{(\mu_0+\bar{\beta})(\mu_0+\gamma_1+\gamma)(\mu_0+\gamma_1+\gamma_2)}+\mu_0+v+c_1|\beta(t)-\bar{\beta}| \\ &+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}\gamma I_1+c_4\gamma I_1+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}-\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}} \\ &+5\sqrt[5]{b\alpha\tilde{\beta}\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}-5\sqrt[5]{b\alpha\beta^+\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}} \\ =&-\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+c_1|\beta(t)-\bar{\beta}|-\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}+\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}\right)\gamma I_1 \\ &+5\sqrt[5]{b\alpha\tilde{\beta}\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}-5\sqrt[5]{b\alpha\beta^+\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}。 \end{aligned} \tag{10}$$

定义如下 Lyapunov 函数 $\underline{V}:\Gamma\to\mathbb{R}$:

$$\underline{V}=MV_2-\ln S-\ln E-\ln I_2+I_2+\frac{\beta^2(t)}{2}-\ln\left(\frac{b}{\mu_0}-S-E-I_1-I_2\right),$$

其中 M 是一个足够大的常数,满足 $-M\left(\mu_0+v+\dfrac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+B\leqslant-2$,这里 $B=\sup\limits_{\beta\in\mathbb{R}}\left\{4\mu_0+\dfrac{\alpha}{m}+v+\mu_1+\gamma_2+\dfrac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}+\dfrac{\delta^2}{2}+|\beta(t)|+\theta\bar{\beta}|\beta(t)|-\dfrac{\theta}{2}\beta^2(t)\right\}$ 。

显然,$\underline{V}(S,E,I_1,I_2,\beta)$ 是连续的函数,且有一个最小值 $\underline{V}(\underline{S},\underline{E},\underline{I_1},\underline{I_2},0)$ 。构造如下的 Lyapunov 函数 $\bar{V}$:

$$\bar{V}(S,E,I_1,I_2,\beta)=V(S,E,I_1,I_2,\beta)-V(\underline{S},\underline{E},\underline{I_1},\underline{I_2},0),$$

对 $\bar{V}(S,E,I_1,I_2,\beta)$ 运用 Itô 公式可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\bar{V}\leqslant&-M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}\right)\gamma I_1\\
&-\frac{b}{S}+\mu_0+v+\frac{\alpha}{m}-\frac{\alpha SI_2}{E(1+mI_2)}+\mu_0+|\beta(t)|\\
&-\frac{\gamma I_1}{I_2}-\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}(1+mI_2)+\gamma I_1+\mu_0+\mu_1+\gamma_2+\mu_0-\frac{(\mu_1+\gamma_2)I_2}{\frac{b}{\mu_0}-(S+E+I_1+I_2)}\\
&+\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}+\theta\bar{\beta}|\beta(t)|-\theta\beta^2(t)+\frac{\delta^2}{2}+Mc_1\left(|\beta(t)-\bar{\beta}|-\frac{\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)\\
&+M\left(5\sqrt[5]{b\alpha\tilde{\beta}\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}-5\sqrt[5]{b\alpha\beta^+\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}\right)\\
\leqslant&-M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma I_1\\
&+B-\frac{b}{S}-\sqrt{\frac{\alpha SI_2(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}{mE}}-\frac{\gamma I_1}{I_2}-\frac{\theta\beta^2(t)}{2}\\
&-\frac{(\mu_1+\gamma_2)I_2}{\frac{b}{\mu_0}-(S+E+I_1+I_2)}+Mc_1\left(|\beta(t)-\bar{\beta}|-\frac{\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)\\
&+M\left(5\sqrt[5]{b\alpha\tilde{\beta}\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}-5\sqrt[5]{b\alpha\beta^+\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}\right)\\
=:&F(S,E,I_1,I_2,\beta)+Mc_1\left(|\beta(t)-\bar{\beta}|-\frac{\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)\\
&+M\left(5\sqrt[5]{b\alpha\tilde{\beta}\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}-5\sqrt[5]{b\alpha\beta^+\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}\right),
\end{aligned}\tag{11}$$

其中，

$$\begin{aligned}
F(S,E,I_1,I_2,\beta)=&-M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma I_1+B\\
&-\frac{b}{S}-\sqrt{\frac{\alpha SI_2(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}{mE}}-\frac{\gamma I_1}{I_2}-\frac{\theta\beta^2(t)}{2}\\
&-\frac{(\mu_1+\gamma_2)I_2}{\frac{b}{\mu_0}-(S+E+I_1+I_2)}。
\end{aligned}\tag{12}$$

之后建立一个闭集 $U\subset\Gamma$，使得对于 $(S,E,I_1,I_2,\beta)\in\Gamma\backslash U$，满足 $F(S,E,I_1,I_2,\beta)\leqslant-1$。$U$ 的定义如下：

$$U=\left\{(S,E,I_1,I_2,\beta)\in\Gamma\,\middle|\,S\geqslant\varepsilon,I_1\geqslant\varepsilon,I_2\geqslant\varepsilon^2,E\geqslant\varepsilon^5,S+E+I_1+I_2\leqslant\frac{b}{\mu_0}-\varepsilon^3,|\beta(t)|\leqslant1/\varepsilon\right\},$$

ε 是一个足够小且大于 0 的常数，并且满足下列不等式：

$$-M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma\varepsilon+B\leqslant-1,\tag{13}$$

$$-M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma\frac{b}{\mu_0}$$

$$+B-\frac{\min\left\{b,\sqrt{\frac{\alpha(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}{m}},\gamma,(\mu_1+\gamma_2)\right\}}{\varepsilon}\leqslant -1, \tag{14}$$

$$-M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma\frac{b}{\mu_0}+B-\frac{\theta}{2\varepsilon^2}\leqslant -1。 \tag{15}$$

方便起见，将 $\Gamma\backslash U$ 分成 6 个区域，

$$\Gamma\backslash U=U_1^c\cup U_2^c\cup U_3^c\cup U_4^c\cup U_5^c\cup U_6^c,$$

其中，

$$U_1^c=\left\{(S,E,I_1,I_2,\beta)\in\Gamma \,\middle|\, 0<S<\varepsilon\right\},$$

$$U_2^c=\left\{(S,E,I_1,I_2,\beta)\in\Gamma \,\middle|\, 0<I_1<\varepsilon\right\},$$

$$U_3^c=\left\{(S,E,I_1,I_2,\beta)\in\Gamma \,\middle|\, 0<E<\varepsilon^4,S\geqslant\varepsilon,I_2\geqslant\varepsilon^2\right\},$$

$$U_4^c=\left\{(S,E,I_1,I_2,\beta)\in\Gamma \,\middle|\, 0<I_2<\varepsilon^2,I_1\geqslant\varepsilon\right\}$$

$$U_5^c=\left\{(S,E,I_1,I_2,\beta)\in\Gamma \,\middle|\, S+E+I_1+I_2>\frac{b}{\mu_0}-\varepsilon^3,I_2\geqslant\varepsilon^2\right\},$$

$$U_6^c=\left\{(S,E,I_1,I_2,\beta)\in\Gamma \,\middle|\, |\beta(t)|>\frac{1}{\varepsilon}\right\}。$$

下面分别对这 6 种情况进行讨论。

情况 1：如果 $(S,E,I_1,I_2,\beta)\in U_1^c$，根据式(12)和式(14)，有

$$\begin{aligned}F(S,E,I_1,I_2,\beta)&\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma I_1+B-\frac{b}{S}\\&\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma\frac{b}{\mu_0}+B-\frac{b}{\varepsilon}\\&\leqslant -1。\end{aligned}$$

情况 2：如果 $(S,E,I_1,I_2,\beta)\in U_2^c$，根据式(12)和式(13)，有

$$\begin{aligned}F(S,E,I_1,I_2,\beta)&\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma I_1+B\\&\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma\varepsilon+B\\&\leqslant -1。\end{aligned}$$

情况 3：如果 $(S,E,I_1,I_2,\beta)\in U_3^c$，根据式(12)和式(14)，有

$$\begin{aligned}F(S,E,I_1,I_2,\beta)&\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma I_1\\&\quad+B-\sqrt{\frac{\alpha SI_2(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}{mE}}\\&\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma\frac{b}{\mu_0}\\&\quad+B-\frac{\sqrt{\frac{\alpha(\mu_0+\mu_1+\gamma_2)}{m}}}{\varepsilon}\\&\leqslant -1。\end{aligned}$$

情况 4：如果 $(S,E,I_1,I_2,\beta)\in U_4^c$，根据式(12)和式(14)，有

$$F(S,E,I_1,I_2,\beta)\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma I_1+B-\frac{\gamma I_1}{I_2}$$

$$\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma\frac{b}{\mu_0}+B-\frac{\gamma}{\varepsilon}$$
$$\leqslant -1。$$

情况 5：如果$(S,E,I_1,I_2,\beta)\in U_5^c$，根据式(12)和式(14)，有

$$F(S,E,I_1,I_2,\beta)\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma I_1+B-\frac{(\mu_1+\gamma_2)I_2}{\frac{b}{\mu_0}-(S+E+I_1+I_2)}$$
$$\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma\frac{b}{\mu_0}+B-\frac{\mu_1+\gamma_2}{\varepsilon}$$
$$\leqslant -1。$$

情况 6：如果$(S,E,I_1,I_2,\beta)\in U_6^c$，根据式(12)和式(15)，有

$$F(S,E,I_1,I_2,\beta)\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma I_1+B-\frac{\theta\beta^2(t)}{2}$$
$$\leqslant -M\left(\mu_0+v+\frac{c_1\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)(R_0^S-1)+M\left(c_4+\frac{\alpha}{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}+\frac{1}{M}\right)\gamma\frac{b}{\mu_0}+B-\frac{\theta}{2\varepsilon}$$
$$\leqslant -1。$$

综合上述讨论可知，

$$F(S,E,I_1,I_2,\beta)\leqslant -1,(S,E,I_1,I_2,\beta)\in U_i^c,i=1,2,3,4,5,6。\tag{16}$$

此外，还存在一个正的常数 H，满足

$$F(S,E,I_1,I_2,\beta)\leqslant H,\ \forall(S,E,I_1,I_2,\beta)\in\Gamma,\tag{17}$$

于是有

$$0\leqslant \mathbb{E}(\bar{V}(S(t),E(t),I_1(t),I_2(t),\beta(t)))$$
$$=\mathbb{E}(\bar{V}(S_0,E_0,I_{10},I_{20},\beta_0))+\int_0^t\mathbb{E}(\mathcal{L}\bar{V}(S(\tau),E(\tau),I_1(\tau),I_2(\tau),\beta(\tau)))\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant \mathbb{E}(\bar{V}(S_0,E_0,I_{10},I_{20},\beta_0))+\int_0^t\mathbb{E}(F(S(\tau),E(\tau),I_1(\tau),I_2(\tau),\beta(\tau)))\mathrm{d}\tau$$
$$+Mc_1\mathbb{E}\int_0^t\left(|\beta(t)-\bar{\beta}|-\frac{\delta}{\sqrt{\pi\theta}}\right)\mathrm{d}\tau$$
$$+M\left(5\sqrt[5]{b\alpha\tilde{\beta}\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}-\mathbb{E}\int_0^t5\sqrt[5]{b\alpha\beta^+\gamma c_1c_2c_3c_4\frac{\mu_0+\mu_1+\gamma_2}{m}}\mathrm{d}\tau\right)。$$

由于$\beta(t)$的遍历性，它满足$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\sqrt[5]{\beta^+(\tau)}\,\mathrm{d}\tau=\int_0^{+\infty}x^{\frac{1}{5}}\kappa(x)\,\mathrm{d}x$，根据式(16)和式(17)可推得

$$0\leqslant\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}(F(S(\tau),E(\tau),I_1(\tau),I_2(\tau),\beta(\tau)))\mathrm{d}\tau$$
$$=\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}(F(S(\tau),E(\tau),I_1(\tau),I_2(\tau),\beta(\tau)))\boldsymbol{I}_{\{(S(\tau),E(\tau),I_1(\tau),I_2(\tau),\beta(\tau))\in\Gamma\backslash U\}}\mathrm{d}\tau$$
$$+\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}(F(S(\tau),E(\tau),I_1(\tau),I_2(\tau),\beta(\tau)))\boldsymbol{I}_{\{(S(\tau),E(\tau),I_1(\tau),I_2(\tau),\beta(\tau))\in U\}}\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t-P((S(\tau),E(\tau),I_1(\tau),I_2(\tau),\beta(\tau))\in\Gamma\backslash U)\mathrm{d}\tau$$
$$+\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^tHP((S(\tau),E(\tau),I_1(\tau),I_2(\tau),\beta(\tau))\in U)\mathrm{d}\tau$$

$$=-1+(1+H)\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P((S(\tau),E(\tau),I_1(\tau),I_2(\tau),\beta(\tau))\in U)\,\mathrm{d}\tau,$$

即 $\liminf\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P((S(\tau),E(\tau),I_1(\tau),I_2(\tau),\beta(\tau))\in U)\,\mathrm{d}\tau\geqslant\frac{1}{1+H}$。因此，

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P(\tau,(S_0,E_0,I_{10},I_{20},\beta_0),U)\,\mathrm{d}\tau\geqslant\frac{1}{1+H}>0,\forall(S_0,E_0,I_{10},I_{20},\beta_0)\in\Gamma。$$

所以根据引理1，模型(6)具有遍历性平稳分布 $\kappa(\cdot)$，证明完毕。

4 结论

本文建立了包含Ornstein-Uhlenbeck(OU)均值回归过程的随机乙肝感染模型，利用随机OU均值回归过程模拟自然界中的随机干扰研究在非线性随机干扰的情况下模型(1)的平稳分布。首先通过建立一些合适的随机Lyapunov函数，证明了模型(4)全局正解的存在唯一性。其次利用Lyapunov分析方法得到了 R_0^S，当干扰强度为0时 $R_0^S=R_0$，并证明了如果 $R_0^S>1$，则随机模型(4)存在一个平稳分布，这说明疾病会在很长的时间内持续流行。由 R_0^S 的表达式可知，干扰强度 δ 越大，疾病的传播速度越低。

本文提出的随机乙型肝炎感染模型的一些性质尚待研究，例如没有研究其灭绝性和概率密度函数，这是今后需要努力的方向。

参考文献(References)：

[1] 世界卫生组织. 乙型肝炎[EB/OL]. (2023-07-12)[2023-08-05]. https://www.who.int/zh/news-room/fact-sheets/detail/hepatitis-b. World Health Organization. Hepatitis B[EB/OL]. (2023-07-12)[2023-08-05]. https://www.who.int/zh/news-room/fact-sheets/detail/hepatitis-b.

[2] WILLIAMS R. Global challenges in liver disease[J]. Hepatology, 2006, 44(3): 521-526.

[3] ALTER M J, EVATT B L, MARGOLIS H S, et al. Public health service interagency guidelines for screening donors of blood, plasma, organs, tissues, and semen for evidence of hepatitis B and hepatitis C[J]. American Journal of Infection Control, 1991, 19(5): 32-41.

[4] THORNLEY S, BULLEN C, ROBERTS M. Hepatitis B in a high prevalence New Zealand population: A mathematical model applied to infection control policy[J]. Journal of Theoretical Biology, 2008, 254(3): 599-603.

[5] MA Z, ZHOU Y C, WU J H. Modeling and dynamics of infectious diseases[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2009.

[6] LIN Y G, JIANG D Q, JIN M L. Stationary distribution of a stochastic SIR model with saturated incidence and its asymptotic stability[J]. Acta Mathematica Scientia, 2015, 35(3): 619-629.

[7] ZHANG J, LI J Q, MA Z E. Global dynamics of an SEIR epidemic model with immigration of different compartments[J]. Acta Mathematica Scientia, 2006, 26(3): 551-567.

[8] LIU L Y, JIANG D Q, HAYAT T, et al. Dynamics of a hepatitis B model with saturated incidence[J]. Acta Mathematica Scientia, 2018, 38(6): 1731-1750.

[9] SONG Y Q, ZHANG X H. Stationary distribution and extinction of a stochastic SVEIS epidemic model incorporating Ornstein-Uhlenbeck process[J]. Applied Mathematics Letters, 2022, 133: 108284.

[10] WANG W M, CAI Y L, DING Z Q, et al. A stochastic differential equation SIS epidemic model incorporating Ornstein-Uhlenbeck process[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2018, 509: 921-936.

[11] ZHOU B Q, JIANG D Q, DAI Y C, et al. Stationary distribution and density function expression for a stochastic SIQRS epidemic model with temporary immunity[J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 105(1): 21-25.

[12] SHI Z F, JIANG D Q. Dynamical behaviors of a stochastic HTLV-I infection model with general infection form and Ornstein-Uhlenbeck process[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2022, 165: 112789.

[13] ZHOU B Q, JIANG D Q, HAN B T, et al. Threshold dynamics and density function of a stochastic epidemic model with media coverage and mean-reverting Ornstein-Uhlenbeck process[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2022, 196: 15-44.

[14] DU H N, NGUYEN H D, YIN G G. Conditions for permanence and ergodicity of certain stochastic predator-prey models[J]. Journal of Applied Probability, 2016, 53(1): 187-202.

[15] MEYNP S, TWEEDIE R L. Stability of Markovian processes Ⅲ: Foster-Lyapunov criteria for continuous-time processes[J]. Advances in Applied Probability, 1993, 25(3): 518-548.

[16] DIEU N T. Asymptotic properties of a stochastic SIR epidemic model with Beddington-Deangelis incidence rate[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2018, 30(1): 93-106.

(责任编辑 赵金环；英文校审 程文华)