第 43 卷 第 5 期
2025 年 10 月
中国民航大学学报
JOURNAL OF CIVIL AVIATION UNIVERSITY OF CHINA
Vol.43 No.5
October 2025

单纯形表与数学模型的对应关系

张宝成[1],康 帅[1,2]
(1. 中国民航大学空中交通管理学院,天津 300000; 2. 大连周水子国际机场现场运营指挥中心,大连 116000)

摘 要: 已有研究未能充分地表现数学原理和单纯形表计算步骤之间的关系,从单纯形表与数学模型的一一对应关系视角能够巧妙展示单纯形算法的数学原理。根据进基变量在约束条件中的系数,提出了进基变量最大取值的确定方法及出基变量的确定方法,进而建立了模型迭代算法。算例分析表明,与单纯形表迭代相比,模型迭代能够更加清晰地展示单纯形算法的数学原理。

关键词: 单纯形算法;单纯形表;进基变量;最大取值
中图分类号: O221.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-5590(2025)05-0090-07

Correspondence relationship between simplex table and mathematical model

ZHANG Baocheng[1], *KANG Shuai*[1,2]
(1. *College of Air Traffic Management, CAUC, Tianjin* 300300, *China*; 2. *On-Site Operation Command Center, Dalian Zhoushuizi International Airport, Dalian* 116000, *Liaoning, China*)

Abstract: Existing studies can not well show the relationship between mathematical principles and calculation steps of the simplex table. The mathematical principle of the simplex algorithm can be effectively demonstrated from the perspective of the one-to-one correspondence relationship between the simplex table and the mathematical model. According to the coefficients of the entering variable in the constraint conditions, the determination method of the maximum value of the entering variable and the determination method of the leaving variable were proposed, and then the model iterative algorithm was established. Case analysis showed that, compared with simplex table iteration, model iteration can more clearly show the mathematical principle of the simplex algorithm.

Key words: simplex algorithm; simplex table; entering variable; maximum value

单纯形算法是求解线性规划问题的经典算法,其核心在于通过迭代逐步逼近最优解。然而,现有文献对算法原理的阐述往往偏重计算步骤而忽视数学本质。

应用单纯形算法求解线性规划问题往往需要多次迭代。文献[1]的例 5 需要经过 2 次迭代找到最优解。文献[2]的例 1 需要 3 次迭代后使所有检验数非正,从而求得最优解。文献[3]的例 1 经过 3 次迭代在所有检验数已满足最优性条件后求解出最优解。文献[4]中通过改进大 M 法并结合两阶段法可以极大降低运算量,但并不能减少迭代次数。

文献[1-9]的单纯形表的计算步骤基本相同,对“唯一最优解、无数个最优解和无界解”的判定方法也基本相同,但对单纯形算法的数学原理的证明过程不尽相同[10]。且上述证明过程过于抽象,从而造成初学者只是死记硬背单纯形表的计算步骤,特别是关于进基变量和出基变量的确定方法。

事实上,从研究中发现,每张表格都对应着一个数学模型,这种一一对应关系巧妙地展现了单纯形算法的本质。为此,首先需要从数学模型的变换视角展示单纯形算法的数学原理。

1 模型变换下的单纯形算法

1.1 模型设定

本文只讨论有可行解的情况,以及线性规划模型含有单位矩阵的情况。

设某线性规划问题有 n 个变量,分别为 $x_1, x_2, \cdots,$

收稿日期: 2023-05-06; **修回日期:** 2023-07-08
基金项目: 国家自然科学基金项目(71571182);中国民航大学教改项目《基于翻转课堂的航空运行运筹学课程体系建设》
作者简介: 张宝成(1979—),男,天津人,博士,副教授,研究方向为运筹学基础理论方法研究、空中交通系统优化与管理.

x_n，有 m 个约束条件，且这 m 个约束条件两两之间线性无关，则可得初始线性规划模型[11-12]，即模型（1）表示为

$$\max z = c_{m+1}x_{m+1} + c_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c_n x_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

式中：c_j 为 x_j 在目标函数中的系数，$j = m+1, m+2, \cdots, n$；$a_{i,j}$ 为第 i 个约束条件中 x_j 的系数，$i = 1,2,\cdots,m$；b_i 为右端项，$i = 1,2,\cdots,m$。

1.2 最优解判定方法

令 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为基变量，$x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 为非基变量，可得初始基本可行解为 $X_1 = (b_1, b_2, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0)$，目标函数值 $z_1 = 0$。

模型（1）目标函数中只包含非基变量（取值为 0 的变量），因此，可由各个变量在目标函数中的系数来判定当前解 X_1 是否为最优解，有 3 种情形：

情形 1 $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 的系数全部小于等于 0，则当前解即为最优解，最优目标函数值为 0；

情形 2 $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 的系数只有 1 个大于 0，当前解不是最优解，需要进一步迭代求解；

情形 3 $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 的系数有若干个（2 个及以上）大于 0，则当前解不是最优解，需要进一步迭代求解。

1.3 进基变量的最大取值

先讨论情形 2，$c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots, c_n$ 只有 1 个大于 0，不妨设 $c_n > 0$。当前基本可行解 X_1 中，为使目标函数值增大，则在下一个基本可行解 X_2 中应当继续保持 $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \cdots, x_{n-1} = 0$，同时使 $x_n > 0$，则 $z_2 = c_n x_n > z_1 = 0$ 成立，因此，x_n 的取值越大越有利于目标函数值的增大，所以要求出 x_n 的最大取值。此时，x_n 为进基变量。

因为在下一个基本可行解 X_2 中 $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \cdots, x_{n-1} = 0$，模型（1）变换为模型（2）。模型（2）表示为

$$\max z = c_n x_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + a_{1,n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ x_m + a_{m,n}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

由模型（2）第 1 个约束条件可得 $x_1 = b_1 - a_{1,n}x_n$。

同理，由模型（2）第 2 个约束条件可得 $x_2 = b_2 - a_{2,n}x_n$。

依此类推，由模型（2）第 m 个约束条件可得 $x_m = b_m - a_{m,n}x_n$。

此时，可以预见到随着 x_n 的逐渐增大，$x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的全部或部分取值变小，直至达到临界条件：其中某个（或某几个）变量取值为 0。显然，x_n 取值不能太大，否则会导致其他变量取值为负数。例如，由模型（2）第 m 个约束条件可知，在 $a_{m,n} > 0$ 的前提下，如果 x_n 取值过大，将导致 x_m 为负数。由上述 m 个约束条件限定了 x_n 的最大取值。

进一步，关于进基变量的最大取值，本文给出如下 3 个定理。

定理 1 如果在模型（2）某个约束条件中，x_n 的系数为 0，则该约束条件对 x_n 的取值无约束。

证明 不妨设 $a_{1,n} = 0$，则由模型（2）第 1 个约束条件可得 $x_1 = b_1$，此时 x_n 的取值为任意正数，$x_1 \geqslant 0$ 始终成立。

证毕。

定理 2 如果在模型（2）某个约束条件中，x_n 的系数为负数，则该约束条件对 x_n 的取值无约束。

证明 不妨设 $a_{2,n} < 0$，则此时 x_n 的取值为任意正数，因为 $x_2 = b_2 - a_{2,n}x_n$，显然 $x_2 \geqslant 0$ 始终成立。

证毕。

定理 3 如果在模型（2）某个约束条件中，x_n 的系数为正数，则该约束条件限定了 x_n 的最大取值为右端项 b 与 x_n 系数的比值。

证明 不妨设 $a_{m,n} > 0$，为使 $x_m \geqslant 0$ 始终成立，由 $x_m = b_m - a_{m,n}x_n \geqslant 0$ 可得 x_n 的最大取值为 $x_n^{\max} = \dfrac{b_m}{a_{m,n}}$。

证毕。

在上述 m 个约束条件中，一般情况下，会存在 2 个及以上约束条件中 x_n 的系数为正数，从每个约束条件都可求出该约束条件限定的 x_n 的最大取值，而最终的最大取值是其中的最小者，由此，本文给出定理 4。

定理 4 如果在模型（2）的 2 个及以上约束条件中，x_n 的系数都为正数，每个约束条件限定 x_n 的最大取值为该约束条件右端项 b 与 x_n 系数的比值，其中最小者最终限定了 x_n 的最大取值。

证明 不妨设第 1 个、第 2 个、第 m 个约束条件中 x_n 的系数都为正数，也即 $a_{1,n} > 0, a_{2,n} > 0, a_{m,n} > 0$，为使 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_m \geqslant 0$ 始终成立，则有：

由 $x_1 = b_1 - a_{1,n}x_n \geqslant 0$ 可得 x_n 的最大取值为 $x_n^{\max} = \dfrac{b_1}{a_{1,n}}$；由 $x_2 = b_2 - a_{2,n}x_n \geqslant 0$ 可得 x_n 的最大取值为 $x_n^{\max} =$

$\frac{b_2}{a_{2,n}}$；由 $x_m=b_m-a_{m,n}x_n\geqslant 0$ 可得 x_n 的最大取值为 $x_n^{\max}=\frac{b_m}{a_{m,n}}$。

最终，$x_n^{\max}=\min\left\{\frac{b_1}{a_{1,n}},\frac{b_2}{a_{2,n}},\frac{b_m}{a_{m,n}}\right\}$，才能保证在新的基本可行解 X_2 中 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_m\geqslant 0$ 成立。

证毕。

1.4　出基变量的确定原理

在模型(2)的 m 个约束条件中，通常情况下会存在 2 个及以上约束条件中 x_n 的系数为正数，不妨设第 1 个、第 2 个、第 m 个约束条件中 x_n 的系数都为正数，即 $a_{1,n}>0$、$a_{2,n}>0$、$a_{m,n}>0$；其他约束条件中 x_n 的系数或小于 0，或等于 0，由定理 1 和定理 2 可知，这些约束条件对 x_n 的取值无约束。

进一步，不妨设在 $\frac{b_1}{a_{1,n}}$、$\frac{b_2}{a_{2,n}}$、$\frac{b_m}{a_{m,n}}$ 三者中，$\frac{b_m}{a_{m,n}}$ 最小，所以第 m 个约束条件限定了 x_n 的最大取值，同时，x_n 重要"身份"是进基变量，在 x_n 达到最大值的同时，"迫使"x_m 取值变为 0，因此，x_m 成为出基变量。

综上，可以提前预见到，在新的基本可行解 X_2 中，x_n 取值为 $\frac{b_m}{a_m}$，x_m 取值为 0，为求得其他变量的取值，接下来要通过一系列的初等行变换得到新模型。

1.5　迭代后的新模型

进基变量 x_n 所在列和第 m 个约束条件所在行的交叉点为"$a_{m,n}x_n$"，接下来实施一系列的初等行变换，只保留第 m 个约束条件中的 x_n，即消去模型(1)目标函数中的 x_n，消去其他约束条件中的 x_n，得到模型(3)。模型(3)表示为

$$
\max z=\frac{b_m}{a_{m,n}}c_n-\frac{c_n}{a_{m,n}}x_m+\left(c_{m+1}-\frac{a_{m,m+1}}{a_{m,n}}c_n\right)x_{m+1}+\left(c_{m+2}-\frac{a_{m,m+2}}{a_{m,n}}c_n\right)x_{m+2}+\cdots+\left(c_{n-1}-\frac{a_{m,n-1}}{a_{m,n}}c_n\right)x_{n-1}
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
x_1-\frac{a_{1,n}}{a_{m,n}}x_m+\left(a_{1,m+1}-\frac{a_{m,m+1}}{a_{m,n}}a_{1,n}\right)x_{m+1}+\left(a_{1,m+2}-\frac{a_{m,m+2}}{a_{m,n}}a_{1,n}\right)x_{m+2}+\cdots+\left(a_{1,n-1}-\frac{a_{m,n-1}}{a_{m,n}}a_{1,n}\right)x_{n-1}=b_1-\frac{b_m}{a_{m,n}}a_{1,n}\\
x_2-\frac{a_{2,n}}{a_{m,n}}x_m+\left(a_{2,m+1}-\frac{a_{m,m+1}}{a_{m,n}}a_{2,n}\right)x_{m+1}+\left(a_{2,m+2}-\frac{a_{m,m+2}}{a_{m,n}}a_{2,n}\right)x_{m+2}+\cdots+\left(a_{2,n-1}-\frac{a_{m,n-1}}{a_{m,n}}a_{2,n}\right)x_{n-1}=b_2-\frac{b_m}{a_{m,n}}a_{2,n}\\
\qquad\vdots\\
x_{m-1}-\frac{a_{m-1,n}}{a_{m,n}}x_{m-1}+\left(a_{m-1,m+1}-\frac{a_{m,m+1}}{a_{m,n}}a_{m-1,n}\right)x_{m+1}+\left(a_{m-1,m+2}-\frac{a_{m,m+2}}{a_{m,n}}a_{m-1,n}\right)x_{m+2}+\cdots+\left(a_{m-1,n-1}-\frac{a_{m,n-1}}{a_{m,n}}a_{m-1,n}\right)x_{n-1}=\\
\qquad b_{m-1}-\frac{b_m}{a_{m,n}}a_{m-1,n}\\
\frac{1}{a_{m,n}}x_m+\frac{a_{m,m+1}}{a_{m,n}}x_{m+1}+\frac{a_{m,m+2}}{a_{m,n}}x_{m+2}+\cdots+\frac{a_{m,n-1}}{a_{m,n}}x_{n-1}+x_n=\frac{b_m}{a_{m,n}}\\
x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0
\end{cases}\tag{3}
$$

具体步骤如下：

步骤 1　模型(1)的第 m 个约束条件除以 $a_{m,n}$，得到模型(3)的第 m 个约束条件；

步骤 2　模型(3)第 m 个约束条件乘以 $-c_n$，加到模型(1)的目标函数中，从而得到模型(3)的目标函数；

步骤 3　模型(3)第 m 个约束条件乘以 $-a_{i,n}$，加到模型(1)的第 i 个约束条件中，从而得到模型(3)的第 i 个约束条件，$i=1,2,\cdots,m-1$；

在模型(3)中，令 $x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x_n$ 为基变量，$x_m,x_{m+1},\cdots,x_{n-1}$ 为非基变量，得到基本可行解 X_2，即 $X_2=\left(b_1-\frac{b_m}{a_{m,n}}a_{1,n},b_2-\frac{b_m}{a_{m,n}}a_{2,n},\cdots,b_{m-1}-\frac{b_m}{a_{m,n}}a_{m-1,n},0,\cdots,\frac{b_m}{a_{m,n}}\right)$。

模型(3)目标函数中只包含非基变量(取值为 0 的变量)，可由各个变量在目标函数中的系数来判定当前解 X_2 是否达到最优解，同样有 3 种情形：

情形 1　$x_m,x_{m+1},\cdots,x_{n-1}$ 的系数全部小于等于 0，则此时当前解即为最优解，最优目标函数值为 $z_2=\frac{b_m}{a_{m,n}}c_n$；

情形 2　$x_m,x_{m+1},\cdots,x_{n-1}$ 的系数，只有 1 个大于 0，则当前解不是最优解，需要进一步迭代求解，迭代方法重复模型(3)的步骤 1 至步骤 3，直至找到最优解；

情形 3　$x_m,x_{m+1},\cdots,x_{n-1}$ 的系数，有若干个(2 个及以上)大于 0，则当前解不是最优解，需要进一步迭代求解。

对于情形 3，不妨设 x_{m+1},x_{m+2} 的系数大于 0，且 x_{m+1} 的系数大于 x_{m+2} 的系数，则此时优先选择 x_{m+1} 为进基变量(使其取值变大)，保留 x_{m+2} 为非基变量(使其取值依

旧为 0），目的是使目标函数为极大化 z 值，优先选择 x_{m+1} 为进基变量很可能会更快地找到最优解。例如，选择 x_{m+1} 为进基变量，迭代 2 次找到最优解，耗时 10 min，而选择 x_{m+2} 为进基变量，迭代 5 次找到最优解，耗时 40 min。

对于情形 2 和情形 3 而言，虽然当前基本可行解 X_2 还不是最优解，但在当前基本可行解 X_2 下，目标函数值 $z_2=\frac{b_m}{a_{m,n}}c_n>z_1=0$，所以经过这次迭代后，目标函数值增大了。按照相同的迭代方法再进行下一次迭代，得到基本可行解 X_3 和目标函数值 z_3，可以预见 $z_3>z_2$。如此反复，每次迭代后，目标函数值都会增大，直至找到最优解。

在本文第 1 节模型设定下，对于形如模型（1）的线性规划问题，求解算法流程图如图 1 所示。

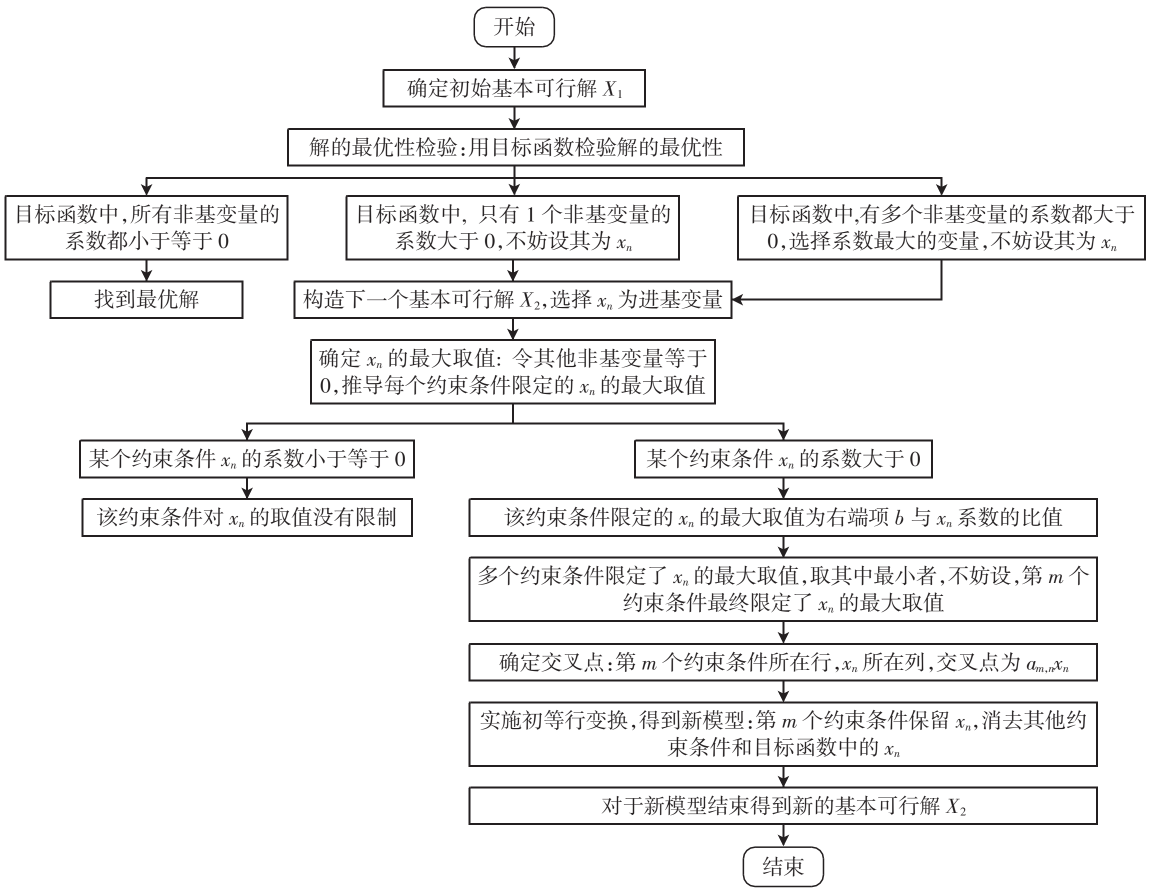

图 1 单纯形算法流程图

Fig.1 Flowchart of simplex algorithm

2 实证研究

2.1 唯一最优解

算例来源于《运筹学教程》[1]。模型（4）表示为

$$\max z=2x_1+x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}5x_2+x_3=15\\6x_1+2x_2+x_4=24\\x_1+x_2+x_5=5\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}\tag{4}$$

选择 x_3,x_4,x_5 为基变量，选择 x_1,x_2 为非基变量，当前基本可行解为 $X_1=(x_1=0,x_2=0,x_3=15,x_4=24,x_5=5)$，此时，目标函数值为 0，即 $z_1=0$。

非基变量 x_1 和 x_2 在目标函数中的系数是正数，x_1 的系数大于 x_2 的系数，所以优先选择 x_1 作为进基变量，使其取值由 0 变成正数，同时保持 x_2 为非基变量（$x_2=0$），可使目标函数值进一步增大。因此，构造新的基本可行解 $X_2=(x_1=\text{正数},x_2=0,x_3\geqslant 0,x_4\geqslant 0,x_5\geqslant 0)$，显然 $z_2>z_1=0$ 成立。

因为新的基本可行解 X_2 中 $x_2=0$，所以模型（4）变为模型（5），即

$$\max z=2x_1$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_3=15\\6x_1+x_4=24\\x_1+x_5=5\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}\tag{5}$$

模型(5)的第 1 个约束条件对 x_1 最大取值无约束；第 2 个约束条件限定了 x_1 的最大取值为 4；第 3 个约束条件限定了 x_1 的最大取值为 5；所以，第 2 个约束条件最终限定了 x_1 的最大取值为 4，同时“迫使”x_4 取值为 0，即 x_4 为出基变量。所以交叉点为第 2 个约束条件中的 x_1。接下来实施一系列的初等行变换[13]，只保留第 2 个约束条件中的 x_1，即消去目标函数中的 x_1，消去其他约束条件中的 x_1，得到模型(6)表示为

$$\max z = 8 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 + \dfrac{2}{6}x_2 + \dfrac{1}{6}x_4 = 4 \\ \dfrac{4}{6}x_2 - \dfrac{1}{6}x_4 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

具体步骤如下：

步骤 1 模型(4)的第 2 个约束条件除以 6，得到模型(6)的第 2 个约束条件；

步骤 2 模型(6)的第 2 个约束条件乘以–2，加到模型(4)的目标函数中，从而得到模型(6)的目标函数；

步骤 3 模型(6)的第 2 个约束条件乘以–1，加到模型(4)的第 3 个约束条件中，从而得到模型(6)的第 3 个约束条件；

步骤 4 模型(4)的第 1 个约束条件没有 x_1，所以直接将其保留为模型(6)的第 1 个约束条件。

对于模型(6)，选择 x_1, x_3, x_5 为基变量，选择 x_2, x_4 为非基变量，此时的基本可行解为 $X_2 = (x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 15, x_4 = 0, x_5 = 1)$，目标函数值 $z_2 = 8 > z_1 = 0$。

对模型(6)，因为只有 x_2 在目标函数中的系数是正数，所以选择 x_2 为进基变量，让 x_2 的取值由 0 变成正数，同时保持 x_4 为非基变量($x_4 = 0$)，可使目标函数值进一步增大。因此，构造新的基本可行解为 $X_3 = (x_1 \geqslant 0, x_2 = \text{正数}, x_3 \geqslant 0, x_4 = 0, x_5 \geqslant 0)$，显然 $z_3 > z_2$ 成立。

因为新的基本可行解 X_3 中 $x_4 = 0$，所以模型(6)变为模型(7)，即

$$\max z = 8 + \frac{1}{3}x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 + \dfrac{2}{6}x_2 = 4 \\ \dfrac{4}{6}x_2 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{7}$$

模型(7)中，第 1 个约束条件限定了 x_2 最大取值为 3；第 2 个约束条件限定了 x_2 最大取值为 12；第 3 个约束条件限定了 x_2 最大取值为 $\frac{3}{2}$，所以，第 3 个约束条件最终限定了 x_2 的最大取值，同时“迫使”x_5 取值为 0，即 x_5 为出基变量。因此，交叉点为第 3 个约束条件中的 x_2。接下来实施一系列的初等行变换，只保留第 3 个约束条件中的 x_2，即消去目标函数中的x_2，消去其他约束条件中的 x_2，得到模型(8)表示为

$$\max z = \frac{17}{2} - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_3 + \dfrac{5}{4}x_4 - \dfrac{15}{2}x_5 = \dfrac{15}{2} \\ x_1 + \dfrac{1}{4}x_4 - \dfrac{1}{2}x_5 = \dfrac{7}{2} \\ x_2 - \dfrac{1}{4}x_4 + \dfrac{3}{2}x_5 = \dfrac{3}{2} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{8}$$

具体步骤如下：

步骤 1 模型(6)的第 3 个约束条件除以$\frac{2}{3}$，得到模型(8)的第 3 个约束条件；

步骤 2 模型(8)的第 3 个约束条件乘以$-\frac{1}{3}$，加到模型(6)的目标函数中，从而得到模型(8)的目标函数；

步骤 3 模型(8)的第 3 个约束条件乘以–5，加到模型(6)的第 1 个约束条件中，从而得到模型(8)的第 1 个约束条件；

步骤 4 模型(8)的第 3 个约束条件乘以$-\frac{1}{3}$，加到模型(6)的第 2 个约束条件中，从而得到模型(8)的第 2 个约束条件。

对于模型(8)，选择 x_1, x_2, x_3 为基变量，选择 x_4, x_5 为非基变量，此时的基本可行解为 $X_3 = (x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{15}{2}, x_4 = 0, x_5 = 0)$，目标函数值 $z_3 = \frac{17}{2} > z_2 = 8$。

由于目标函数中所有非基变量（取值为 0 的变量）的系数都小于 0，所以当前基本可行解 X_3 是最优解；由线性代数中的克莱姆法则[14–15]可知，当前基本可行解是唯一最优解。

至此，从模型(4)出发，经过 2 次迭代（2 次模型转换），每次目标函数值都增大一些，最终找到了最优解。不难发现，数学模型与单纯形表有着一一对应的关系：模型(4)对应表 1，模型(6)对应表 2，模型(8)对

应表3,其中:X_B 为基变量;θ 为计算后的数值。

表 1 求解模型(4)的初始单纯形表

Tab.1 Initial simplex table for solving model (4)

初始检验数		2	1	0	0	0	进基变量最大取值
X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_3	15	0	5	1	0	0	$+\infty$
x_4	24	[6]	2	0	1	0	4
x_5	5	1	1	0	0	1	5
检验数		2	1	0	0	0	

表 2 求解模型(4)的中间单纯形表

Tab.2 Intermediate simplex table for solving model (4)

初始检验数		2	1	0	0	0	进基变量最大取值
X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_3	15	0	5	1	0	0	3
x_1	4	1	$\frac{2}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	12
x_5	1	0	$\frac{4}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{3}{2}$
检验数		0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	

表 3 求解模型(4)的最终单纯形表

Tab.3 Final simplex table for solving model (4)

初始检验数		2	1	0	0	0
X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	$\frac{15}{2}$	0	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{15}{2}$
x_1	$\frac{7}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
检验数		0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$

2.2 无穷多最优解

$$\max z = \frac{5}{2}x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15\\5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10\\x_1,x_2,x_3,x_4 \geqslant 0\end{cases} \tag{9}$$

对于模型(9),选择 x_3,x_4 为基变量,选择 x_1,x_2 为非基变量,当前基本可行解为 $X_1 = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 15, x_4 = 10)$。此时,目标函数值为 0,也即 $z_1 = 0$。

非基变量 x_1 和 x_2 在目标函数中的系数是正数,x_1 的系数大于 x_2 的系数,所以优先选择 x_1 作为进基变量,使其取值由 0 变成正数,同时保持 x_2 为非基变量($x_2 = 0$),可使目标函数值进一步增大。因此,构造新的基本可行解 $X_2 = (x_1 =$ 正数$, x_2 = 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0)$。显然新的目标函数值 $z_2 > z_1 = 0$ 成立。

因为新的基本可行解 X_2 中 $x_2 = 0$,所以,模型(9)变为模型(10)表示为

$$\max z = \frac{5}{2}x_1$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1 + x_3 = 15\\5x_1 + x_4 = 10\\x_1,x_2,x_3,x_4 \geqslant 0\end{cases} \tag{10}$$

模型(10)中,第 1 个约束条件限定了 x_1 的最大取值为 5,第 2 个约束条件限定了 x_1 的最大取值为 2,所以,第 2 个约束条件最终限定了 x_1 的最大取值,同时“迫使”x_4 取值为 0,即 x_4 为出基变量。因此,交叉点为第 2 个约束条件中的 x_1。模型(9)第 2 个约束条件除以 5,可将第 2 个约束条件中的 x_1 的系数变为 1,并利用初等行变换消去目标函数中的 x_1,消去其他约束条件中的 x_1,得到模型(11),即

$$\max z = 5 - \frac{1}{2}x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\frac{19}{5}x_2 + x_3 - \frac{3}{5}x_4 = 9\\x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 2\\x_1,x_2,x_3,x_4 \geqslant 0\end{cases} \tag{11}$$

在模型(11)中,选择 x_1,x_3 为基变量,选择 x_2,x_4 为非基变量,此时的基本可行解 $X_2 = (x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 9, x_4 = 0)$。目标函数值 $z_2 = 5 > z_1 = 0$。

由于此时目标函数中所有非基变量(取值为 0 的变量)的系数都小于等于 0,所以当前基本可行解是最优解;进一步观察目标函数,不难发现,只要 $x_4 = 0$,目标函数值 $z_2 = 5$ 就成立,此时模型(11)的约束条件变为

$$\text{s.t.}\begin{cases}\frac{19}{5}x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow x_3 = 9 - \frac{19}{5}x_2\\x_1 + \frac{2}{5}x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{2}{5}x_2\end{cases}$$

因为要保证 $x_1 \geqslant 0$,$x_3 \geqslant 0$ 始终成立,所以,x_2 的取值范围为 $0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{45}{19}$。

综上,最优解为 $X = (2 - \frac{2}{5}x_2, x_2, 9 - \frac{19}{5}x_2, 0)$,且 $0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{45}{19}$,目标函数值 $z = 5$。因此,原模型具有无数个最优解。模型(9)经过 1 次迭代后变为模型(11),就找到了最优解。模型(9)和模型(11)对应的单纯形表分别为表 4 和表 5。

表 4 求解模型(9)的初始单纯形表

Tab.4 Initial simplex table for solving model (9)

初始检验数		$\frac{5}{2}$	1	0	0	进基变量最大取值
X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	15	3	5	1	0	5
x_4	10	[5]	2	0	1	2
检验数		$\frac{5}{2}$	1	0	0	

表 5　求解模型(9)的最终单纯形表

Tab.5　Final simplex table for solving model (9)

初始检验数		$\frac{5}{2}$	1	0	0
X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	9	0	$\frac{19}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$
x_1	2	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
检验数		0	0	0	$-\frac{1}{2}$

2.3　无界解

如下算例[5],在模型(12)中,第 1 个约束条件中没有 x_2,第 2 个和第 3 个约束条件中 x_2 的系数为负数,即

$$\max z = 7x_1 + 12x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 9x_1 + x_3 = 360 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 - 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{12}$$

选择 x_3, x_4, x_5 为基变量,选择 x_1, x_2 为非基变量,当前基本可行解 $X_1 = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 360, x_4 = 200, x_5 = 300)$。此时,目标函数值为 0,即 $z_1 = 0$。

非基变量 x_1 和 x_2 在目标函数中的系数是正数,x_1 的系数小于 x_2 的系数,所以,优先选择 x_2 作为进基变量,使其取值由 0 变成正数,同时保持 x_1 为非基变量($x_1 = 0$),可使目标函数值进一步增大。因此,构造新的基本可行解 $X_2 = (x_1 = 0, x_2 =$ 正数$, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0)$。显然 $z_2 > z_1 = 0$ 成立。

因为新的基本可行解 X_2 中 $x_1 = 0$,所以,模型(12)变为模型(13)表示为

$$\max z = 12x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_3 = 360 \\ -5x_2 + x_4 = 200 \\ -10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{13}$$

由定理 1 和定理 2 可知,上述 3 个约束条件对 x_2 的最大取值均无约束,x_2 取值可为正无穷大,因此,目标函数值为正无穷大,该模型具有无界解。模型(12)对应的单纯形表如表 6 所示。

表 6　求解模型(12)的无界解单纯形表

Tab.6　Unbounded solution simplex table for solving model (12)

初始检验数		7	12	0	0	0	进基变量最大取值
X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_3	360	9	0	1	0	0	$+\infty$
x_4	200	4	−5	0	1	0	$+\infty$
x_5	300	3	−10	0	0	1	$+\infty$
检验数		7	12	0	0	0	

3　结语

研究表明单纯形算法的数学本质体现为模型与表格的动态映射关系,其迭代过程具有以下特征:

(1) 每张单纯形表都对应着一个数学模型;

(2) 从当前模型(单纯形表)出发,迭代到下一个模型(单纯形表),目标函数值会变大,如此反复迭代,目标函数值不断增大,直至找到最优解;

(3) 对于当前基本可行解,根据非基变量在目标函数中的系数确定进基变量,确定进基变量最大取值的同时确定了出基变量;

(4) 一些约束条件中,进基变量的系数为 0 或负数,则这些约束条件对进基变量的最大取值无约束。

参考文献:

[1] 胡运权. 运筹学教程[M]. 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2018: 20–69.

[2] 钱颂迪. 运筹学[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 1990.

[3] 牛映武. 运筹学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1994.

[4] 吴庆丰. 改进的单纯形法迭代计算方法[J].计算机工程与应用, 2014, 50(18): 59–62, 69.

[5] 吴育华, 杜　纲. 管理科学基础[M]. 3 版. 天津: 天津大学出版社, 2009.

[6] HILLIER F, LIEBERMAN G. Introduction to operations research[M]. New York: McGraw–Hill, 2015.

[7] RARDIN R L. Optimization in operations research[M]. 2nd ed. Boston, MA : Pearson, 2016.

[8] HILLIER F. Introduction to operations research with student access[M]. New York. McGraw–Hill, 2014.

[9] 李　静. 一种基于单纯形法的分布式估计算法[J]. 科学技术与工程, 2014, 14(32): 262–265.

[10] 杨静蕾, 张建勇, 杨君泺. 线性规划单纯形法的三种实现形式探析[J]. 大学数学, 2020, 36(4): 68–73.

[11] VAIDYA N, KASTURIWALE N. Application of quick simplex method (a new approach) on two phase method[J]. British Journal of Mathematics & Computer Science, 2016, 16(1): 1–15.

[12] ZABINYAKO G I. A simplex method algorithm using a double basis[J]. Numerical Analysis and Applications, 2015, 8(4): 285–292.

[13] OMRAN M G H, CLERC M. An adaptive population–based simplex method for continuous optimization[J]. International Journal of Swarm Intelligence Research, 2016, 7(4): 23–51.

[14] TANAKA Y. Using the simplex method for a type of allocation problems[J]. American Journal of Computational Mathematics, 2019, 9(2): 25–31.

[15] 娜　仁. 混合式教学法在《运筹学》课程中的应用研究[J]. 现代计算机, 2020, 26(21): 90–92.

(责任编辑:孟　欣)