

基于顺序熵的时间序列复杂性分析

董科强^{a,b}, 刘敬娜^b

(中国民航大学 a. 民航航空器适航审定技术重点实验室; b. 理学院, 天津 300300)

摘要: 由于传统信息熵在分析时间序列复杂性时未考虑到先后元素的顺序关系, 其分析结果存在一定局限性。针对该问题, 本文提出了一种改进的熵。首先, 定义顺序熵来衡量先后元素顺序的不确定性; 进一步引入联合顺序熵和平均顺序熵, 用于研究两个时间序列之间的复杂依赖关系; 然后, 将这些熵度量方法应用于服从不同分布的随机序列及航空发动机性能参数序列, 以验证改进方法的有效性。结果表明, 该改进熵能够有效度量时间序列中的不确定性, 且时间延迟对顺序熵和平均顺序熵的影响较小。

关键词: 顺序熵; 复杂性分析; 时间序列; 时间延迟; 航空发动机

中图分类号: V239; O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-5590(2026)01-0091-06

Complexity analysis of time series based on order entropy

DONG Keqiang^{a,b}, LIU Jingna^b

(a. Key Laboratory of Airworthiness Certification Technology for Civil Aircraft; b. College of Science, CAUC, Tianjin 300300, China)

Abstract: Traditional information entropy has certain limitations in analyzing the complexity of time series, as it does not take into account the sequential relationship among successive elements. To address this issue, this paper proposes an improved entropy. First, order entropy is defined to measure the uncertainty of the sequence of successive elements, and joint order entropy and average order entropy are further introduced to study the complex dependency between two time series. Then, these entropy-based measurement methods are applied to random sequences following different distributions and to performance parameter sequences of aircraft engines to verify the effectiveness of the improved method. The results show that the improved entropy can effectively measure the uncertainty in time series, and the influence of time delay on order entropy and average order entropy is relatively small.

Key words: order entropy; complexity analysis; time series; time delay; aircraft engine

1948年, 香农开创了信息论, 并将通信过程中信号源信号携带的平均信息量定义为信息熵^[1], 信息熵可用于表示一个随机事件的不确定度。作为信息论中的一个重要概念, 熵已经广泛应用于通信^[2]、生物学^[3]、医学^[4]、经济学^[5]和语言学^[6]等领域, 尤其是在时间序列分析方面受到广泛关注。文献[7]基于熵理论更清晰地表征了非平稳时间序列内部的同步性波动; 文献[8]研究了熵在金融时间序列中的应用。针对时间序列复杂性分析这一研究热点, 学者提出了多种度量时间序列复杂性的算法, 如: 文献[9-10]指出近似熵能用于衡量信号变化的稳定性; 文献[11]利用样本熵检测时间序列

的自相似性; 文献[12]介绍了排列熵通过符号化时间序列中相邻几个元素间的关系来衡量序列的复杂性。

然而, 这些传统熵度量存在一定的局限性, 近似熵与样本熵的稳定性较差, 计算结果会随预设参数的改变而产生显著变化, 且还会受序列长度的限制^[13]; 排列熵在对序列进行符号化时, 只考虑嵌入子序列中元素的排列顺序, 忽视了序列自身取值相关的幅值信息。此外, 这些方法都未考虑序列中先后元素的相互依赖关系和顺序关系, 因此, 有必要针对这一问题对传统方法进行改进。

本文在信息熵的研究基础上, 通过量化时间序列

收稿日期: 2024-03-04; 修回日期: 2024-06-19

基金项目: 天津市科技计划项目(23JCZDJC00070); 民航航空器适航审定技术重点实验室开放基金项目(SH2020112701)

作者简介: 董科强(1979—), 男, 河北邯郸人, 教授, 博士, 研究方向为复杂系统建模与分析。

中先后元素的顺序关系,提出顺序熵(OE, order entropy),将其扩展得到联合顺序熵(JOE, joint order entropy)和平均顺序熵(AOE, average order entropy),并将改进熵应用于服从不同分布的随机序列和航空发动机的性能参数序列,以验证改进方法的有效性。

1 顺序熵的定义及其性质

1.1 顺序熵

一条序列有前向和后向之分,前向序列是指序列中的元素从后向前排列,而后向序列则是指序列中的元素从前向后排列。对于同时出现在给定方向的离散序列 $S = \{u_k, k = 1, 2, \dots, L\}$ (连续序列符号化)中的两元素 u_i 和 u_j ,若 u_i 在 u_j 之前,且两元素之间无时间延迟,则记为元素对 (u_i, u_j) , L 是序列的长度。很明显,序列 S 中共有 $L - 1$ 个这样的元素对。

给定序列 S 中一元素 u_i ,假设满足上述元素对的 u_j 有 a 种,每种元素对 (u_i, u_j) 在所有可能元素对中的概率记为

$$p(u_i, u_j) = \frac{\text{Num}[(u_i, u_j)]}{L - 1} \tag{1}$$

式中, $\text{Num}[(u_i, u_j)]$ 为元素对 (u_i, u_j) 出现的次数。

依据信息熵的公式,元素 u_i 在给定序列 S 中的顺序熵为

$$E_{u_i} = - \sum_j p(u_i, u_j) \log p(u_i, u_j) \tag{2}$$

顺序熵衡量了序列中先后元素顺序的不确定性,即 E_{u_i} 量化了序列中元素 u_i 后面元素 u_j 的不确定性。考虑到序列方向的不同,序列中元素的顺序熵可以分为前向顺序熵和后向顺序熵,在本文中主要考虑后向顺序熵,即序列方向是后向的,除非另有说明,以下顺序熵都是指后向顺序熵。

如给定一条序列:1 2 3 4 2 3 4 3 2 4 5 2 6,求 2 的顺序熵。序列中共有 12 个元素对,各种元素对的概率总和为 1,其中,(2,3)出现 2 次,(2,4)出现 1 次,(2,6)出现 1 次,即 $p(2,3) = \frac{1}{6}$, $p(2,4) = \frac{1}{12}$, $p(2,6) = \frac{1}{12}$,则 $E_2 = - \left(\frac{1}{6} \log \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \log \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \log \frac{1}{12} \right) = 0.3096$ 。

1.2 联合顺序熵

设 Y_1 和 Y_2 为 2 个随机变量, $y_1 = (u_i, u_j)$ 和 $y_2 = (u_m, u_n)$ 分别是 Y_1 和 Y_2 的特定事件,其中, u_i 和 u_m 是

两个确定且不相同的元素,由联合熵的概念^[14], Y_1 和 Y_2 的联合集 $Y_1 Y_2$ 的联合顺序熵可定义为

$$E(Y_1, Y_2) = - \sum_{y_1} \sum_{y_2} p(y_1, y_2) \log p(y_1, y_2) = - \sum_j \sum_n p((u_i, u_j), (u_m, u_n)) \times \log p((u_i, u_j), (u_m, u_n)) \tag{3}$$

其表示随机变量 Y_1 和 Y_2 共同发生时产生的总不确定性,与联合熵性质^[15]相同,联合顺序熵也满足“大于等于每个独立熵,小于等于所有独立熵的和”(证明详见 1.4 节顺序熵的性质 2)。

1.3 平均顺序熵

所有元素顺序熵的平均值记为平均顺序熵,衡量了一条序列关于所有先后元素的整体不确定性,平均顺序熵值越大,序列整体越混乱。平均顺序熵的计算公式为

$$E_A = \frac{1}{L} \sum_{u_i} n_{u_i} E_{u_i} \tag{4}$$

式中: u_i 的取值是序列中互不相同的元素; n_{u_i} 是 u_i 的数量。

1.4 顺序熵的性质

性质 1 非负性与极值性。假设序列长度为 L ,满足元素对 (u_i, u_j) 的 u_j 有 a 种可能,则 u_i 的顺序熵最大值为 $\frac{a \log(L - 1)}{L - 1}$,最小值为 0。

证明 u_i 的顺序熵在 $p(u_i, u_j) = 1$ 时取得最小值 0,此时序列中 u_i 后面的元素 u_j 完全确定,且只有一种可能,相应的序列可以是 $\{u_i, u_j\}$ ($L = 2, u_j \neq u_i$) 或 $\{u_i, u_i, \dots, u_i\}$ ($L > 2, u_j = u_i$)。

当 (u_i, u_j) 的 a 种可能事件等概率出现时,元素 u_i 的顺序熵取得最大值。当 $x > 0$ 时,易知 $\ln x \leq x - 1$,当且仅当 $x = 1$ 时,等号成立。由于 $p(u_i, u_j) > 0$,则

$$\sum_j p(u_i, u_j) \ln \frac{1}{(L - 1)p(u_i, u_j)} \leq \sum_j p(u_i, u_j) \left(\frac{1}{(L - 1)p(u_i, u_j)} - 1 \right) = \sum_j \left(\frac{1}{L - 1} - p(u_i, u_j) \right) = \frac{a}{L - 1} - \sum_j p(u_i, u_j)$$

当且仅当 $\frac{1}{(L - 1)p(u_i, u_j)} = 1$ 时,等号成立。

由于对任意 u_j , 有 $p(u_i, u_j) \geq \frac{1}{L - 1}$, 则 $\frac{a}{L - 1} -$

$$\sum_j p(u_i, u_j) \leq \frac{a}{L-1} - \frac{a}{L-1} = 0, \text{ 即 } \sum_j p(u_i, u_j) \times \ln \frac{1}{(L-1)p(u_i, u_j)} \leq 0.$$

根据对数的性质可得

$$E_{u_i} = - \sum_j p(u_i, u_j) \ln p(u_i, u_j) \leq \sum_j p(u_i, u_j) \ln(L-1) = \ln(L-1) \sum_j p(u_i, u_j)$$

则 $-\sum_j p(u_i, u_j) \log p(u_i, u_j) \leq \log(L-1) \sum_j p(u_i, u_j)$, 当

且仅当 $p(u_i, u_j) = \frac{1}{L-1}$ 时, 等号成立, 此时可得

$$\log(L-1) \sum_j p(u_i, u_j) = \frac{a \log(L-1)}{L-1}$$

综上, E_{u_i} 的最大值为 $\frac{a \log(L-1)}{L-1}$, 且在 (u_i, u_j) 的 a

种可能事件为等概率时取得。

性质 2 对任意随机变量 Y_1 和 Y_2 , $E(Y_1, Y_2)$ 为其联合集 $Y_1 Y_2$ 的联合顺序熵, 则 $\max[E(Y_1), E(Y_2)] \leq E(Y_1, Y_2) \leq E(Y_1) + E(Y_2)$, 当且仅当 Y_1 和 Y_2 独立时, 等号成立。

证明 对于序列中的两个元素 u_i 和 u_m , 记 $y_1 = (u_i, u_j), y_2 = (u_m, u_n)$, 则

$$\begin{aligned} E(Y_1, Y_2) &= - \sum_{y_1} \sum_{y_2} p(y_1 y_2) \log p(y_1 y_2) = \\ &= - \sum_{y_1} p(y_1) \sum_{y_2} p(y_2 | y_1) \times [\log p(y_1) + \\ &= \log p(y_2 | y_1)] = - \sum_{y_1} p(y_1) \log p(y_1) \times \\ &= \sum_{y_2} p(y_2 | y_1) - \sum_{y_1} p(y_1) \times \sum_{y_2} p(y_2 | y_1) \times \\ &= \log p(y_2 | y_1) = E(Y_1) + E(Y_2 | Y_1) \end{aligned}$$

因此, $E(Y_1, Y_2) \geq E(Y_1)$ 。同理可得, $E(Y_1, Y_2) \geq E(Y_2)$ 。

由条件作用使熵变小可得 $E(Y_2 | Y_1) \leq E(Y_2)$, 即 $E(Y_1, Y_2) \leq E(Y_1) + E(Y_2)$, 当且仅当 Y_1 和 Y_2 独立时, 等号成立。

性质 3 给定序列中某元素 u_i , 改变序列中任意两个元素对 (u_i, u_j) 和 (u_i, u_k) 的位置得到一个新序列, 改变前后两序列中 u_i 的顺序熵 E_{u_i} 不变。

证明 根据顺序熵的定义易知, u_i 的顺序熵 E_{u_i} 只与序列中元素对 (u_i, u_j) 的总体分布特性有关, 而与其

出现位置无关。

性质 4 设 u_i 为序列 S 中任一元素, c 为任一不为 0 的实数, 则序列 S 中元素 u_i 的顺序熵 E_{u_i} 、序列 cS 中元素 cu_i 的顺序熵 E_{cu_i} 和序列 $S+c$ 中元素 u_i+c 的顺序熵 E_{u_i+c} 相等。

证明 元素 u_i, cu_i 和 u_i+c 分别在序列 S, cS 和 $S+c$ 中与其后面的元素 u_j, cu_j 和 u_j+c 构成元素对 (u_i, u_j) 、 (cu_i, cu_j) 和 (u_i+c, u_j+c) , 3 种元素对在 3 个序列中的概率分布相同, 所以其顺序熵相等。

2 不同分布中的顺序熵

例 1 设随机变量 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 独立, 服从泊松分布, 泊松分布的概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

若 $S = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 是独立同分布的连续取值型随机变量序列, 即 $S = (0, 1, \dots, n-1)$, 假设对于某序列中一元素 u_i , 其后面元素 u_j 的取值对应随机变量序列 S , 则

$$E_{u_i} = - \sum_{u_j=0}^{n-1} p(u_i, u_j) \ln p(u_i, u_j) = - \sum_{x=0}^{n-1} \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta} \ln \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}$$

当序列 S 的长度为无穷大时, 将求和从有限项推广到无限项, 由泰勒展开式

$$e^\theta = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\theta^x}{x!}$$

可得

$$\begin{aligned} E_{u_i} &= -e^{-\theta} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\theta^x}{x!} (-\theta + x \ln \theta - \ln x!) = \\ &= \theta(1 - \ln \theta) + e^{-\theta} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\theta^x}{x!} \ln x! \end{aligned}$$

例 2 设随机变量 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ 独立, 服从指数分布, 指数分布的概率密度函数为

$$f(y, \lambda) = \lambda e^{-\lambda y} \quad y > 0$$

若 $S = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 是取实数值的连续函数序列, 假设对于某序列中一元素 u_i , 其后面元素 u_j 的取值对应随机变量序列 S , 则

$$\begin{aligned} E_{u_i} &= - \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} \ln(\lambda e^{-\lambda y}) dy = \\ &= -\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} (\ln \lambda - \lambda y) dy = \\ &= -\lambda (\ln \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} dy - \lambda \int_0^{\infty} y e^{-\lambda y} dy) = \\ &= -\lambda (\ln \lambda \times \frac{1}{\lambda} - \lambda \times \frac{1}{\lambda^2}) = 1 - \ln \lambda \end{aligned}$$

例3 选择随机生成服从均匀分布序列 S_1 、几何分布序列 S_2 、泊松分布序列 S_3 和高斯白噪声序列 S_4 作为样本,数据长度均为 400,计算序列中元素的顺序熵。为了消除不同样本数据间数量级的不同,进行数据缩放,使数据处于同一数量级^[16]。4 条序列的顺序熵曲线如图 1 所示。

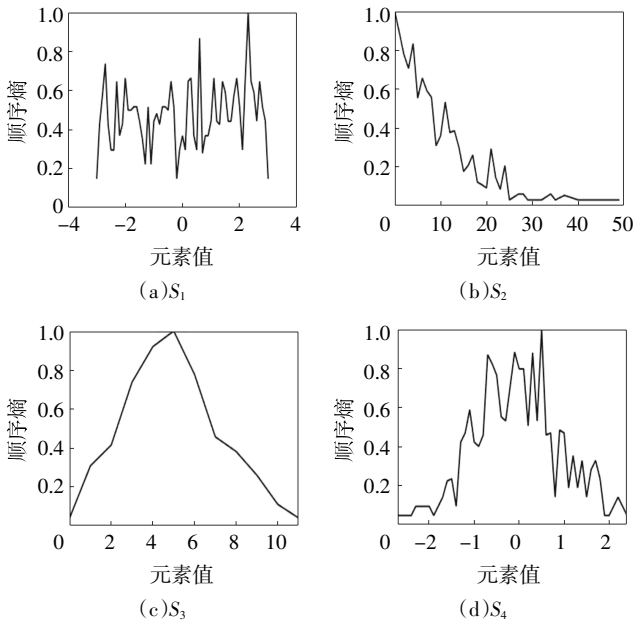


图 1 模拟序列的顺序熵

Fig.1 Order entropy of the simulated sequences

从图 1 中可以看出:序列 S_1 的顺序熵值集中在 (0.3,0.7) 范围内波动;序列 S_2 的顺序熵曲线总体呈下降趋势,速度先快后慢,最后趋于平缓;序列 S_3 和序列 S_4 的顺序熵曲线形状类似,随着序列元素值的增大,元素的顺序熵先增大到峰值后减小,不同的是,序列 S_4 的顺序熵值比 S_3 的变化更混乱, S_3 的顺序熵曲线更平滑,则序列 S_4 中元素先后顺序的不确定性更强。

事实上,高斯白噪声序列在任意两个时刻的随机变量均不相关,序列没有任何有用的规律,是随机性最强的序列^[17]。顺序熵结果与理论上序列复杂性趋势基本相符,说明顺序熵可以在一定程度上反映序列的复杂性。

3 熵测度在航空发动机数据中的应用

本节选取航空发动机性能参数序列验证顺序熵、联合顺序熵和平均顺序熵在时间序列复杂性分析方面的有效性。

航空发动机有若干典型参数可反映发动机的健康状态^[18]: 低压转子转速 $N1$, 高压转子转速 $N2$, 发动

机压力比(EPR, engine pressure ratio), 排气温度(EGT, exhaust gas temperature)。飞机运行一般分为 3 个阶段,即爬升、巡航和下降阶段,因此,每种参数序列可按上述 3 个阶段进行划分。

3.1 航空发动机参数序列的复杂性分析

首先,可利用 Matlab 求得任一海拔高度下每条序列中元素的顺序熵。当巡航阶段海拔高度为 27 597 ft (1 ft = 0.304 8 m) 和 27 599 ft 时,分别对应 EGT 序列中的第 1 个元素 $u_1 = 396.5$ 和第 20 个元素 $u_{20} = 395.5$,则可分别求得 EGT 序列中 2 个随机变量 $Y_1: y_1 = (396.5, u_j)$ 和 $Y_2: y_2 = (395.5, u_n)$ 的顺序熵

$$E_{u_1} = E(Y_1) = 0.222 62$$

$$E_{u_{20}} = E(Y_2) = 0.229 53$$

同时,计算得到 2 个随机变量的联合顺序熵为

$$E_{(u_1, u_{20})} = E(Y_1, Y_2) = E(Y_2) + E(Y_1|Y_2) = 0.229 53 + 0.002 83 = 0.232 36$$

上述结果满足性质 2,即在 EGT 序列中,2 个随机变量 Y_1 和 Y_2 共同出现产生的总不确定性要大于任一变量产生的不确定性,但小于其单独产生的不确定性的和。

然后,分别选取爬升、巡航和下降 3 个阶段中长度为 400 的 $N1$ 、 $N2$ 、EPR 和 EGT 序列,得到图 2—图 4 的顺序熵曲线。

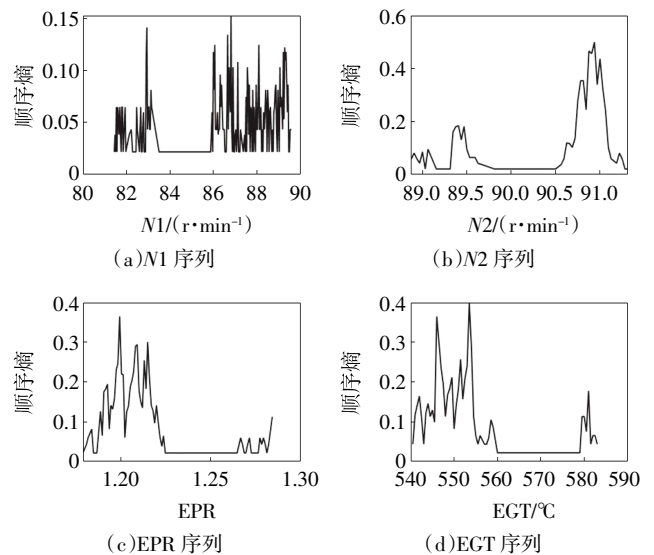


图 2 爬升阶段 4 个序列的顺序熵

Fig.2 Order entropy of the four sequences during the climb phase

从图 2 中可以看出:在爬升阶段中,4 个序列的顺序熵曲线趋势基本相同,中段相对稳定,两侧波动密集,但 $N1$ 和 $N2$ 序列的顺序熵曲线在序列元素值较大时波动更明显,而 EPR 和 EGT 则在序列元素值较小

时波动更明显。

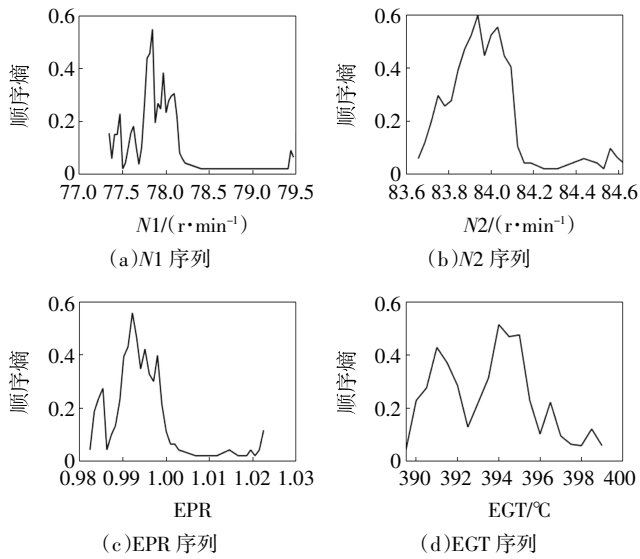


图 3 巡航阶段 4 个序列的顺序熵

Fig.3 Order entropy of the four sequences during the cruise phase

从图 3 中可以看出:在巡航阶段中,随着序列元素值增大, $N1$ 、 $N2$ 、EPR 序列的顺序熵曲线较为接近,都是先局部变化明显随后趋于平缓,而 EGT 序列的顺序熵曲线较不稳定,呈现频繁的升降变化。

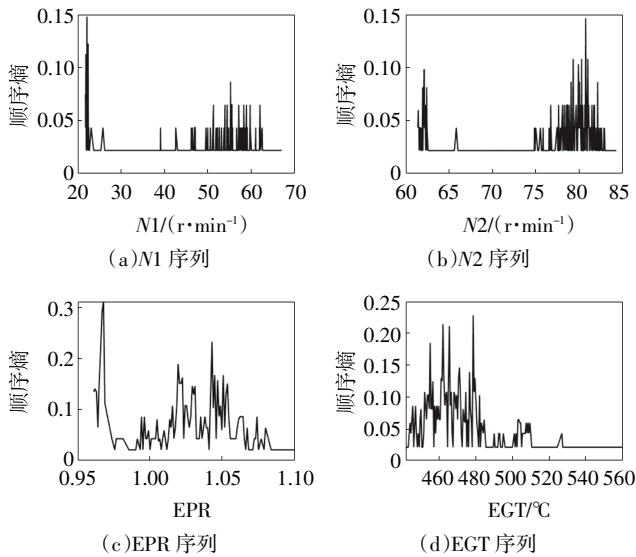


图 4 下降阶段 4 个序列的顺序熵

Fig.4 Order entropy of the four sequences during the descent phase

从图 4 中可以看出:在下降阶段中, $N1$ 和 $N2$ 序列的顺序熵曲线仍较为相似,EPR 和 EGT 也呈现出相似趋势,随着序列元素值增大, $N1$ 和 $N2$ 序列顺序熵曲线变化与爬升阶段一致,EPR 和 EGT 序列的顺序熵值先经历剧烈波动,随后逐渐趋于稳定。

由上述结果看出,在 3 个阶段中, $N1$ 和 $N2$ 序列的顺序熵变化趋势基本一致,且 $N2$ 值整体高于 $N1$ 值。

实际上,当发动机启动时,先启动涡轮带动压气机和燃烧室,使高压转子转动到一定转速才能供油,随后带动低压转子运转,因此, $N1$ 和 $N2$ 序列存在相关性,顺序熵的分析结果也反映了这一联系。

进一步计算巡航阶段 4 条参数序列的平均顺序熵,结果如表 1 所示。其中, $N2$ 序列的平均顺序熵值最大,与图 3 中顺序熵曲线一致,图 3 中 $N2$ 序列具有较高顺序熵值的元素更多,说明其后续元素的不确定性更大,序列复杂性更强。

表 1 巡航阶段 4 条序列的平均顺序熵

Tab.1 Average order entropy of the four sequences during the cruise phase

发动机性能参数序列	平均顺序熵
$N1$ 序列	0.298 70
$N2$ 序列	0.421 02
EPR 序列	0.346 19
EGT 序列	0.357 28

3.2 时间延迟对熵测度的影响

为分析时间延迟 τ 对顺序熵和平均顺序熵的影响,计算爬升阶段 $N1$ 序列各元素在不同时间延迟 τ (τ 从 1~50 等距取 50 个值)下的顺序熵,如图 5 所示。计算爬升阶段 $N1$ 、 $N2$ 、EPR 和 EGT 4 条序列的平均顺序熵,如图 6 所示。

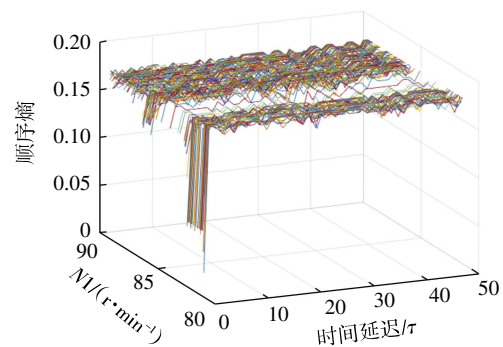


图 5 爬升阶段 $N1$ 序列在 $\tau \in [1, 50]$ 下的顺序熵

Fig.5 Order entropy of the $N1$ sequence for $\tau \in [1, 50]$ during the climb phase

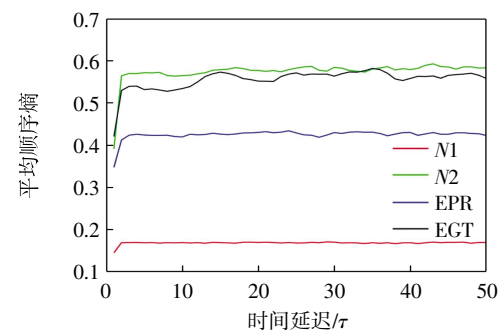


图 6 爬升阶段 4 条序列在 $\tau \in [1, 50]$ 下的平均顺序熵

Fig.6 Average order entropy of the four sequences for $\tau \in [1, 50]$ during the climb phase

随着时间延迟的增加,图5中 $N1$ 序列多数元素的顺序熵趋于一个定值,图6中4条序列的平均顺序熵曲线基本保持稳定。这说明时间延迟对顺序熵和平均顺序熵的影响较小,2种熵均具有较好的鲁棒性。

4 结语

本文从考虑序列中元素先后顺序的角度,提出了一种用于分析时间序列复杂性的改进熵方法。元素 u_i 的顺序熵衡量了序列中先后元素构成的元素对 (u_i, u_j) 的不确定性,元素 u_i 的顺序熵越大,表明其后续元素 u_j 的不确定性越大;平均顺序熵是序列中所有元素顺序熵的平均值,用于衡量一条序列整体的不确定性,序列的平均顺序熵越大,表明序列中有更多元素其后续元素的不确定性越大,序列整体越混乱,即序列的复杂性越强。另外,将改进的熵应用于服从不同分布的序列和航空发动机实际数据,验证了新方法对分析时间序列复杂性的有效性,结果还表明,时间延迟对顺序熵和平均顺序熵的影响较小。

未来的研究可进一步尝试对本文的研究方法进行优化和扩展,如针对数据有限的情况引入可变的时间延迟,或探究本文方法在图和网络上的应用。

参考文献:

- [1] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. Bell System Technical Journal, 1948, 27(4): 623-656.
- [2] 刘旭,刘晴,董武,等.基于熵权-灰色模型的电力通信风险预测研究[J].信息技术,2021,45(7):160-164.
- [3] CHANDA P, COSTA E, HU J, et al. Information theory in computational biology: where we stand today[J]. Entropy, 2020, 22(6): 627.
- [4] 李梅.表面肌电信号的信息熵分析[D].西安:西安电子科技大学,2022.
- [5] 崔彦哲,赵林丹.基于交叉熵的无偏赋权法[J].数量经济技术经济研究,2020,37(3):181-197.
- [6] DEBOWSKI Ł, BENTZ C. Information theory and language[J]. Entropy, 2020, 22(4): 435.
- [7] 秦古月.基于熵理论的非平稳时间序列复杂性和同步性研究[D].北京:北京交通大学,2022.
- [8] 李金阳.金融时间序列的熵理论研究与应用[D].北京:北京交通大学,2020.
- [9] STEVE P. Approximate entropy (ApEn) as a complexity measure[J]. Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 1995, 5(1): 110-117.
- [10] 王会议.基于模糊近似熵的高速动车组粘着控制研究[D].成都:西南交通大学,2019.
- [11] 赵泉华,张杰,李玉.多尺度样本熵高光谱图像分类[J].测绘科学,2023,48(1):117-126.
- [12] 马城.基于多尺度排列熵和IOTA的睡眠脑电信号研究[D].南京:南京邮电大学,2022.
- [13] LI P, LIU C Y, WANG X P, et al. Testing pattern synchronization in coupled systems through different entropy-based measures[J]. Medical & Biological Engineering & Computing, 2013, 51(5): 581-591.
- [14] YAO W P, WANG J. Double symbolic joint entropy in nonlinear dynamic complexity analysis[J]. AIP Advances, 2017, 7(7): 075313.
- [15] MADIMAN M, TETALI P. Information inequalities for joint distributions, with interpretations and applications[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(6): 2699-2713.
- [16] CHEN Y H. Improvement of accuracy of fixed-width booth multipliers using data scaling technology[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2021, 68(3): 1018-1022.
- [17] HAYASHI T, MAEDA T, KANEMOTO S, et al. Low-peak-factor pseudo-white-noise sequence set with optimal zero-correlation zone[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2014, E97. A(12): 2343-2351.
- [18] ALTUNTAS O, KARAKOC T H, HEPBASLI A. A parametric study of a piston-prop aircraft engine using exergy and exergoeconomic analysis methods[J]. International Journal of Green Energy, 2015, 12(1): 2-14.

(责任编辑:孟欣)