

doi:10.11920/xnmdzk.2025.04.012

# 具有两个独立 Markov 过程的线性时滞正系统的 $L_1$ -增益性能分析与设计

苏松,贾杨,张俊,杨军

(西南民族大学电气工程学院,四川成都 610225)

**摘要:**研究了具有两个独立 Markov 过程的 Markov 跳变线性时滞正系统(MJLPDSs)的随机稳定性、 $L_1$ -增益性能分析和保正  $L_1$ -增益控制器设计问题.首先,通过构造一个新的基于双转移概率的线性协正随机李雅普诺夫泛函,并建立一个与原系统对应的 Markov 化系统方程(该方程的状态变量由 Markov 化状态的数学期望组成,其系数矩阵依赖于时滞和转移概率),得到了系统随机稳定和  $L_1$ -随机内稳定的时滞依赖型充要条件.其次,提出一种  $L_1$ -控制设计的迭代优化算法,将求解  $L_1$ -增益控制器的双线性矩阵不等式(BMIs)难题转化为求解受 LP(线性规划)约束的凸优化问题.最后给出了一个仿真例子,验证了提出的保正  $L_1$ -控制器设计方法的可行性和有效性.

**关键词:** $L_1$ -增益;Markov 跳变线性时滞正系统;随机稳定性;两个独立 Markov 过程

中图分类号:TP13;O211.63

文献标志码:A

文章编号:2095-4271(2025)04-0446-09

## $L_1$ -gain performance analysis and design of linear time-delay positive systems with two independent Markov processes

SU Song, JIA Yang, ZHANG Jun, YANG Jun

(School of Electrical Engineering, Southwest Minzu University, Chengdu 610225, China)

**Abstract:** This paper is concerned with stochastic stability,  $L_1$ -gain performance analysis, and positivity-preserving  $L_1$ -gain controller design for Markov jump linear positive delayed systems(MJLPDSs) with two independent Markov chains. First, a corresponding system equation was established whose state variables consisted of the mathematical expectation of the Markovianized states and whose coefficient matrices depended on time-delay and the transition probability, and some necessary and sufficient delay-dependent conditions for  $L_1$ -stochastic internal stability were presented in terms of LP(linear programming) by constructing a new linear co-positive stochastic Lyapunov functional based on the dual transition probability and positivity of the considered system. Secondly, an iterative optimization algorithm for  $L_1$ -control design was proposed, which transformed the bilinear matrix inequalities(BMIs) problem for solving  $L_1$ -gain controllers into a convex optimization problem constrained by LP(linear programming). Finally, a simulation example was given to verify the feasibility and effectiveness of the  $L_1$ -gain controller design scheme proposed in this paper.

**Keywords:**  $L_1$ -gain; Markov jump linear positive delayed system; stochastic stability; two independent Markov processes

正 Markov 跳变线性系统(MJLSs)是一类特殊的随机混杂正系统.它可以用来描述由突发环境扰动、随机部件故障、失控配置变化等引起的正子系统之间的随机跳变<sup>[1]</sup>.不同于一般的 MJLSs,正 MJLSs 中正性的存在导致

收稿日期:2024-04-01

通信作者:杨军(1981-),男,教授,博士,研究方向:随机系统与控制.E-mail:yj\_uestc@126.com

基金项目:四川省科技计划资助(2023ZYD0006);四川省教育厅创新团队(15TD0050);西南民族大学中央高校基金(2021HQZZ02)

了其系统稳定性和性能具有特定意义.同时,正系统的正性有助于形成其独特的稳定性分析方法和设计结果<sup>[2]</sup>.

然而,上述文献未考虑时滞.时滞在系统动力学中不可避免,因为系统需要时间来获取信息和执行控制信号<sup>[3]</sup>.对于具有时滞的正线性系统,文献[4]主要讨论了时滞对稳定性的影响,并证明了时滞的大小不影响具有常数时滞或有界时变时滞的正线性系统的渐近稳定性<sup>[5]</sup>.由于随机 Markov 跳变导致复杂系统动力学,研究时滞是否影响时滞正 MJLSs 的随机稳定性和性能具有重要意义.文献[6]揭示了时滞正 MJLSs 的  $L_1$ -随机稳定性和  $L_1$ -增益性能与时滞大小相关.

上述结果仅适用于单一 Markov 跳变过程的正系统.鉴于系统动力学和控制过程的多维突变,许多参数可能随机跳变或切换<sup>[7]</sup>.有必要研究具有两个或多个 Markov 跳变过程的正系统<sup>[2]</sup>.具有两个 Markov 跳变参数的系统经常应用于现代控制系统建模,如随机切换神经网络<sup>[8]</sup>、随机网络诱导控制系统(NCS)和 MJLSs 的 NCS 建模<sup>[9]</sup>.近年来,文献[10]则在已知转移概率的情况下,研究了具有时变时滞和两个 Markov 链的离散时间 Markov 跳变系统的随机镇定问题.利用具有两个或多个 Markov 跳跃参数的系统的预期结果,解决具有 Markov 通信网络的时滞正系统的网络控制问题是令人鼓舞和有希望的.

在现有文献中,通过输入和输出信号的  $L_2/l_2$  范数推导出的  $H_\infty$  性能指标被认为是最受欢迎的<sup>[11]</sup>.对于正系统,由于所有变量都是非负的,使用  $L_1/l_1$  范数来描述输入和输出信号的大小更为自然,因此  $L_1$  诱导范数(或  $l_1$  诱导范数)(也称为  $L_1/l_1$ -增益)被用于评估性能.另一方法是使用线性李雅普诺夫函数,文献[12]讨论了确定性线性正系统和 T-S 模糊正系统的  $L_1$ -增益性能分析和控制.近年来的研究关注时滞 Markov 跳变线性正系统的  $L_1$ -增益随机稳定性和  $L_1$ -增益性能条件<sup>[6]</sup>,以及时滞对离散时滞 Markov 跳变线性正系统随机稳定性的影响和  $l_1$ -增益控制器的设计<sup>[13]</sup>.

本文中我们将用  $L_1$ -增益来表征具有两个独立 Markov 过程的 MJLPDSs 的性能,并给出相应的  $L_1$ -增益性能准则和  $L_1$ -增益控制器设计方法.

符号说明:在本文中, $N$  和  $N^+$  分别表示自然数和非负自然数. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times m}$  分别表示实数集, $n$ -维和  $n \times m$ -维欧氏空间. $\mathbb{R}_+^n$  表示  $\mathbb{R}^n$  的正象限.符号  $I_n$  表示  $n$  阶单位矩阵, $\mathbf{e}_n$  表示  $\mathbb{R}^n$  中的全 1 向量. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  为概率空间,其中  $\Omega$  为样本空间, $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  子集的  $\sigma$ -代数, $\mathcal{P}$  为  $\mathcal{F}$  上的概率测度.对于矩阵  $A, A^T, [A]_{ij}([A]_{r,i})$  分别表示  $A$  的转置、矩阵  $A$  的  $(i,j)$ -项元素(第  $i$  行), $A \succ 0 (\geq 0, < 0, \leq 0)$  表示所有  $[A]_{ij}$  都为正的(非负,负,非正).如果  $A$  的非对角线项是非负的,则  $A$  是 Metzler.对于方阵  $A, \varsigma(A)$  表示  $A$  的谱横坐标.对于向量  $x \in \mathbb{R}^n, x_i$  表示  $x$  的第  $i$  个分量,

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  是  $x$  的 1-范数, $x \succ 0 (\geq 0)$  表示所有  $x_i$  都是正的(非负的). $C^{1,2}$  表示  $\mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n$  上所有关于  $t$  一次连续可微,关于  $x$  二次连续可微的非负函数  $V(t, x)$  族. $C_{n,\tau}^+$  表示将区间  $[-\tau, 0]$  映射到  $\mathbb{R}_{0,+}^n$  的连续函数 Banach 空间.

$w(t)$  的  $L_1$  范数定义为  $\|w\|_{L_1} = \int_0^\infty \|w(t)\|_1 dt$ , 且记  $L_1^+ = \{w(t) | w(t) \in L_1, w(t) \geq 0, \forall t \geq 0\}$ .

$\|z\|_{\mathbf{E}_1} = \int_0^\infty \|\mathbf{E}\{z(t)\}\|_1 dt$  代表  $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  中随机信号  $z(t)$  的范数,其中  $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) = \{z(t), t \geq 0 | \|z\|_{\mathbf{E}_1} < \infty\}$ .  $\otimes$  表示 Kronecker 积,且  $A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B$ , 其中

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . 集合  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$  上的 Dirac 测度定义为  $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{if } \omega \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

## 1 问题阐述和预备知识

考虑如下具有两个独立 Markov 过程的 Markov 跳变线性时滞正系统(MJLPDSs):

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{(r_t, \rho_t)} x(t) + B_{(r_t, \rho_t)} x(t - \tau) + C_{(r_t, \rho_t)} w(t), \\ z(t) = D_{(r_t, \rho_t)} x(t) + E_{(r_t, \rho_t)} x(t - \tau) + F_{(r_t, \rho_t)} w(t), \\ x(s) = \varphi(s), s \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  为系统状态,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  为属于  $L_1$  的扰动输入,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  为被控输出.  $\varphi \in \mathbb{C}_{n_x, \tau}^+$  是初始函数.  $\tau \geq 0$  表示常时滞.  $\{r_t\}_{t \geq 0}$  和  $\{\rho_t\}_{t \geq 0}$  是两个独立的连续时间离散状态齐次 Markov 过程, 其轨道右连续且分别在有限集  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  和  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$  中取值. 当  $r_t = i, \rho_t = k, i \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{M}$  时, MJLPDSs(1) 的系数矩阵(适当维数)分别简记为  $A_{(i,k)}, B_{(i,k)}, C_{(i,k)}, D_{(i,k)}, E_{(i,k)}$  和  $F_{(i,k)}$ .

令  $\vartheta(t) = (x^T(t), r_t, \rho_t)^T$  和  $\mathcal{F}_t = \sigma(\vartheta(s) : 0 \leq s \leq t)$ . 假定  $\{r_t\}_{t \geq 0}$  和  $\{\rho_t\}_{t \geq 0}$  分别具有转移率  $[\Pi]_{ij} = \pi_{ij}, i, j \in \mathcal{N}$  和  $[\Lambda]_{kl} = \lambda_{kl}, k, l \in \mathcal{M}$ , 则其转移概率可以由下式分别给出:

$$\mathcal{P}\{r_{t+\Delta} = j | r_t = i\} = \delta_{ij} + \pi_{ij} \Delta + o(\Delta), \quad (2)$$

$$\mathcal{P}\{\rho_{t+\Delta} = l | \rho_t = k\} = \delta_{kl} + \lambda_{kl} \Delta + o(\Delta). \quad (3)$$

其中,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & l = k, \\ 0, & l \neq k, \end{cases} \Delta > 0, \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0$ , 并且  $\pi_{ij} \geq 0 (j \neq i), \pi_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij}$ ,

$i, j \in \mathcal{N}, \lambda_{kl} \geq 0 (l \neq k), \lambda_{kk} = - \sum_{l=1, l \neq k}^M \lambda_{kl}, c, d \in \mathcal{M}$ . 初始条件通过指定初始模态  $(r_0, \rho_0) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$  和初始函

数  $\varphi(s)$  给出. 由于  $r(t)$  和  $\rho(t), t \geq 0$  是相互独立的, 有:

$$\mathcal{P}_{(i,k),(j,l)}(\Delta) := \mathcal{P}\{r_{t+\Delta} = j, \rho_{t+\Delta} = l | r_t = i, \rho_t = k\} = \begin{cases} o(\Delta), & j \neq i, l \neq k, \\ \lambda_{ki} \Delta + o(\Delta), & j = i, l \neq k, \\ \pi_{ij} \Delta + o(\Delta), & j \neq i, l = k, \\ 1 + \pi_{ii} \Delta + \lambda_{kk} \Delta + o(\Delta), & j = i, l = k. \end{cases} \quad (4)$$

令  $P_r(t)$  和  $P_\rho(t)$  分别表示  $r(t)$  和  $\rho(t)$  这两个 Markov 过程的转移概率矩阵. 则  $[P_r(t)]_{ij} = \mathcal{P}\{r_{s+t} = j | r_s = i\}, [P_\rho(t)]_{kl} = \mathcal{P}\{\rho_{s+t} = l | \rho_s = k\}, i, j \in \mathcal{N}, k, l \in \mathcal{M}, s \geq 0, t \geq 0$ . 由  $r(t)$  和  $\rho(t)$  的独立性, 可以求得

$$\mathcal{P}_{(i,k),(j,l)}(\tau) = [e^{\Pi \tau}]_{ij} [e^{\Lambda \tau}]_{kl}. \quad (5)$$

在本文中, 假设  $A_{(i,k)}$  是一个 Metzler 矩阵,  $B_{(i,k)} \geq 0, C_{(i,k)} \geq 0, D_{(i,k)} \geq 0, E_{(i,k)} \geq 0$  和  $F_{(i,k)} \geq 0, \forall (i,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ . 那么对于任意的  $\varphi \in \mathbb{C}_{n_x, \tau}^+, (r_0, \rho_0) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ , 以及  $w(t) \geq 0, t \geq 0$ , 我们有  $x(t) \geq 0, z(t) \geq 0, t \geq 0$ , 这意味着系统(1)是具有时滞的正系统.

定义 1<sup>[3]</sup> 对于  $w(t) = 0$  的 MJLPDSs(1), 如果对任意的初始函数  $\varphi \in \mathbb{C}_{n_x, \tau}^+$  和初始模态  $(r_0, \rho_0) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ , 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|\mathbf{E}\{x(s) | \varphi(\cdot), r_0, \rho_0\}\|_1 ds < \infty$ , 则称系统(1)是  $L_1$ -随机内稳定的.

定义 2<sup>[6]</sup> 假设 MJLPDSs(1) 是  $L_1$ -随机内稳定的, 令  $\varphi(s) = 0, s \in [-\tau, 0]$ , 定义系统  $\Sigma$  的  $L_1$ -增益为

$$\|\Sigma\|_{L_1 - L_1} := \sup_{0 \neq w \in L_1^+, (r_0, \rho_0) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}} \frac{\|z\|_{L_1}}{\|w\|_{L_1}}.$$

引理 1<sup>[14]</sup> 考虑一个  $\mathcal{F}_t$ -可测的随机过程  $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ , 令  $\mathbf{x}_{(i,k)}(t) := \mathbf{E}\{x(t) \cdot \mathbf{1}_{\{r_t = i, \rho_t = k\}}\}$ , 则有

$$\mathbf{E}\{x(t) d\mathbf{1}_{\{r_t = i, \rho_t = k\}}\} = \left[ \sum_{j=1}^N \pi_{ji} \mathbf{x}_{(j,k)}(t) + \sum_{l=1}^M \lambda_{lk} \mathbf{x}_{(i,l)}(t) \right] dt. \quad (6)$$

考虑如下具有时滞的确定性线性正系统:

$$\Sigma_0: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + Cw(t), \\ z(t) = Dx(t) + Ex(t - \tau) + Fw(t), \\ x(s) = \varphi(s), s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (7)$$

其中  $A$  为 Metzler 矩阵,  $B \geq 0, C \geq 0, D \geq 0, E \geq 0$  和  $F \geq 0$ . 下面给出正线性系统  $\Sigma_0$  的相关定义和引理.

**定义 3**<sup>[6]</sup> 设线性时滞正系统  $\Sigma_0$  是内稳定的(即当  $w(t) \equiv 0$  时渐近稳定), 令  $\varphi(s) = 0, s \in [-\tau, 0]$ , 定义

系统  $\Sigma_0$  的  $L_1$ -增益为  $\|\Sigma\|_{L_1-L_1} := \sup_{0 \neq w \in L_1^+} \frac{\|z\|_{L_1}}{\|w\|_{L_1}}$ .

**引理 2**<sup>[15]</sup> 对于正线性系统  $\Sigma_0$ , 以下叙述是等价的: *i*) 系统  $\Sigma_0$  是内稳定的(即当  $w(t) \equiv 0$  时渐近稳定); *ii*)  $A + B$  为 Hurwitz 矩阵, 即  $\varsigma(A + B) < 0$ ; *iii*) 存在一个向量  $q \in \mathbb{R}_+^{n_x}$ , 使得  $(A + B)^T q < 0$ .

**引理 3**<sup>[6]</sup> 对于正线性系统  $\Sigma_0$ , 有: *i*) 如果系统  $\Sigma_0$  是内稳定的, 那么  $\|\Sigma_0\|_{L_1-L_1} = \|F - (D + E)(A + B)^{-1} \times C\|_1$ ; *ii*) 对于给定的  $\gamma > 0$ , 系统  $\Sigma_0$  是内稳定的, 它满足  $\|\Sigma_0\|_{L_1-L_1} < \gamma$  当且仅当存在向量  $q \in \mathbb{R}_+^{n_x}$ , 使得

$$\begin{bmatrix} (A + B)^T q + (D + E)^T e_{n_x} \\ C^T q + F^T e_{n_x} - \gamma e_{n_w} \end{bmatrix} < 0.$$

## 2 主要结果

### 2.1 $L_1$ -随机内稳定性分析

为了简单起见, 对于任意的  $v \in \mathcal{N}$ , 记

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_v &= \text{diag}\{A_{(v,1)}, A_{(v,2)}, \dots, A_{(v,M)}\}, \mathbb{B}_v = \text{diag}\{B_{(v,1)}, B_{(v,2)}, \dots, B_{(v,M)}\}, \\ \mathbb{A} &= \text{diag}\{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_N\} + (\Pi \oplus \Lambda)^T \otimes I_{n_x}, \mathbb{B} = \text{diag}\{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_N\} [(e^{\Pi\tau} \otimes e^{\Lambda\tau})^T \otimes I_{n_x}]. \end{aligned} \quad (8)$$

接下来, 通过以下结果给出具有两个独立 Markov 过程的 MJLPDS(1)  $L_1$ -随机内稳定性的充分必要条件.

**定理 1** 对于  $w(t) = 0$  的 MJLPDSs(1), 设  $A_{(i,k)}$  为 Metzler 矩阵且  $B_{(i,k)} \geq 0$ , 则对于任意的  $(i, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ , 下列陈述是等价的: *(i)* 系统 (1) 是  $L_1$ -随机内稳定的; *(ii)*  $\varsigma(\mathbb{A} + \mathbb{B}) < 0$ ; *(iii)* 存在正向量  $q_{(i,k)} \succ 0 \forall (i, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ , 使得下列线性规划(LP)问题是可解的

$$A_{(i,k)}^T q_{(i,k)} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} q_{(j,k)} + \sum_{l=1}^M \lambda_{kl} q_{(i,l)} + \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^M \mathcal{P}_{(i,k),(j,l)}(\tau) B_{(j,l)}^T q_{(j,l)} < 0. \quad (9)$$

定理 1 的证明参考文献[6]中定理 1 证明.

### 2.2 $L_1$ -增益性能分析

在本节中, 将给出 MJLPDSs(1) 的  $L_1$ -增益性能分析结果. 对于任意的  $v \in \mathcal{N}$ , 设

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_v &= \text{diag}\{C_{(v,1)}, C_{(v,2)}, \dots, C_{(v,M)}\}, \mathbb{D}_v = \text{diag}\{D_{(v,1)}, D_{(v,2)}, \dots, D_{(v,M)}\}, \\ \mathbb{E}_v &= \text{diag}\{E_{(v,1)}, E_{(v,2)}, \dots, E_{(v,M)}\}, \mathbb{F}_v = \text{diag}\{F_{(v,1)}, F_{(v,2)}, \dots, F_{(v,M)}\}, \\ \mathbb{C} &= \text{diag}\{\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \dots, \mathbb{C}_N\}, \mathbb{D} = \text{diag}\{\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \dots, \mathbb{D}_N\}, \\ \mathbb{F} &= \text{diag}\{\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_N\}, \mathbb{E} = \text{diag}\{\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \dots, \mathbb{E}_N\} [(e^{\Pi\tau} \otimes e^{\Lambda\tau})^T \otimes I_{n_x}]. \end{aligned} \quad (10)$$

**定理 2** 对于 MJLPDSs(1), 有如下结论:

*i*) 如果系统  $\Sigma$  是  $L_1$ -随机内稳定的, 那么

$$\|\Sigma\|_{L_1-L_1} = \|\mathbb{F} - (\mathbb{D} + \mathbb{E})(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1} \mathbb{C}\|_1;$$

*ii*) 对于给定的  $\gamma > 0$ , 系统  $\Sigma$  是  $L_1$ -随机内稳定的且满足  $\|\Sigma\|_{L_1-L_1} < \gamma$  当且仅当存在向量  $q_{(i,k)} \in \mathbb{R}_+^{n_x}, \forall (i, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ , 使得

$$\left[ \begin{array}{c} \Xi_{(i,k)} \\ C_{(i,k)}^T q_{(i,k)} + F_{(i,k)}^T e_{n_z} - \gamma e_{n_w} \end{array} \right] < 0, \forall (i,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}, \tag{11}$$

其中  $\Xi_{(i,k)} = A_{(i,k)}^T q_{(i,k)} + D_{(i,k)}^T e_{n_z} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} q_{(j,k)} + \sum_{l=1}^M \lambda_{kl} q_{(i,l)} + \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^M [e^{\Pi\tau}]_{ij} [e^{\Lambda\tau}]_{kl} [B_{(i,k)}^T q_{(i,k)} + E_{(i,k)}^T e_{n_z}]$ .

证明:(i)定义如下变量

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{(i,k)}(t) &= \mathbf{E}\{z(t) \mathbf{1}_{\{r_t=i, \rho_t=k\}}\}, \mathbf{w}_{(i,k)}(t) = \mathbf{E}\{w(t) \mathbf{1}_{\{r_t=i, \rho_t=k\}}\}, \\ \mathbf{Z}(t) &= [\mathbf{z}_{(1,1)}^T(t), \mathbf{z}_{(1,2)}^T(t), \dots, \mathbf{z}_{(1,M)}^T(t), \dots, \mathbf{z}_{(N,1)}^T(t), \mathbf{z}_{(N,2)}^T(t), \dots, \mathbf{z}_{(N,M)}^T(t)]^T, \\ \mathbf{W}(t) &= [\mathbf{w}_{(1,1)}^T(t), \mathbf{w}_{(1,2)}^T(t), \dots, \mathbf{w}_{(1,M)}^T(t), \dots, \mathbf{w}_{(N,1)}^T(t), \mathbf{w}_{(N,2)}^T(t), \dots, \mathbf{w}_{(N,M)}^T(t)]^T. \end{aligned} \tag{12}$$

然后,利用引理 1,可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{(i,k)}(t) &= A_{(i,k)} \mathbf{x}_{(i,k)}(t) dt + C_{(i,k)} \mathbf{w}_{(i,k)}(t) + \left[ \sum_{j=1}^N \pi_{ji} \mathbf{x}_{(j,k)}(t) + \sum_{l=1}^M \lambda_{lk} \mathbf{x}_{(i,l)}(t) \right] + \\ & B_{(i,k)} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^M [e^{\Pi\tau}]_{ji} [e^{\Lambda\tau}]_{lk} \mathbf{x}_{(j,l)}(t - \tau), \end{aligned} \tag{13}$$

并且

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{(i,k)}(t) &= \mathbf{E}\{[D_{(i,k)} x(t) + E_{(i,k)} x(t - d) + F_{(i,k)} w(t)] \times \mathbf{1}_{\{r_t=i, \rho_t=k\}}\} = \\ & D_{(i,k)} \mathbf{x}_{(i,k)}(t) dt + F_{(i,k)} \mathbf{w}_{(i,k)}(t) + E_{(i,k)} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^M [e^{\Pi\tau}]_{ji} [e^{\Lambda\tau}]_{lk} \mathbf{x}_{(j,l)}(t - \tau). \end{aligned} \tag{14}$$

由(8)式和(12)式,可得如下关于 $\mathbf{X}(t)$ 和 $\mathbf{W}(t)$ 等式:

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{X}(t - \tau) + \mathbf{C}\mathbf{W}(t) \\ \mathbf{Z}(t) = \mathbf{D}\mathbf{X}(t) + \mathbf{E}\mathbf{X}(t - \tau) + \mathbf{F}\mathbf{W}(t). \end{cases}$$

由定理 1 可知, MJLPDSs (1) 是  $L_1$ -随机内稳定的当且仅当正系统  $\Sigma_1$  是内稳定的. 由  $\|\mathbf{Z}(t)\|_1 = \|\mathbf{E}\{z(t)\}\|_1, \|\mathbf{W}(t)\|_1 = \|w(t)\|_1$ , 再利用引理 3, 我们有

$$\|\Sigma\|_{L_1-L_1} = \sup_{0 \neq w \in L_1^+, (r_0, \rho_0) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}} \frac{\|z\|_{\mathbf{E}_1}}{\|w\|_{L_1}} = \sup_{0 \neq \mathbf{W} \in L_1^+} \frac{\|\mathbf{Z}\|_{L_1}}{\|\mathbf{W}\|_{L_1}} = \|\Sigma_1\|_{L_1-L_1} = \|\mathbf{F} - (\mathbf{D} + \mathbf{E})(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C}\|_1.$$

(ii)由定理 1 和上述证明可知,对于给定的 $\gamma > 0$ ,当且仅当系统 $\Sigma_1$ 是内稳定的且满足 $\|\Sigma\|_{L_1-L_1} < \gamma$ ,则系统 $\Sigma$ 是  $L_1$ -随机内稳定的且满足 $\|\Sigma\|_{L_1-L_1} < \gamma$ . 由引理 3, 上述结论等价存在向量  $q := [q_{(1,1)}^T, q_{(1,2)}^T, \dots, q_{(1,M)}^T, \dots, q_{(N,1)}^T, q_{(N,2)}^T, \dots, q_{(N,M)}^T]^T$ , 其中  $q_{(i,k)} \in \mathbb{R}_+^{n_z}, \forall (i,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ , 使得

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T q + (\mathbf{D} + \mathbf{E})^T e_{NMn_z} \\ \mathbf{C}^T q + \mathbf{F}^T e_{NMn_z} - \gamma e_{NMn_w} \end{bmatrix} < 0. \tag{15}$$

将(8)式代入(14)式可得 $q_{(i,k)} \in \mathbb{R}_+^{n_z}$ 其中 $\forall (i,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ , 满足(11).即证.

### 2.3 $L_1$ -增益控制器设计

在本节中,讨论保正  $L_1$ -增益控制器设计问题:考虑如下具有两个独立 Markov 过程和反馈控制器的 MJLP-DSs:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{(r_t, \rho_t)} x(t) + B_{(r_t, \rho_t)} x(t - \tau) + G_{(r_t, \rho_t)} u(t) + C_{(r_t, \rho_t)} w(t), \\ z(t) = D_{(r_t, \rho_t)} x(t) + E_{(r_t, \rho_t)} x(t - \tau) + H_{(r_t, \rho_t)} u(t) + F_{(r_t, \rho_t)} w(t), \\ x(s) = \varphi(s), s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{16}$$

设计双模态依赖的状态反馈控制器为 $u(t) = K_{(r_t, \rho_t)} x(t)$ , 使得对于 $\gamma > 0$ ,由此产生的闭环系统为

$$\tilde{\Sigma}: \begin{cases} \dot{x}(t) = (A_{(r_t, \rho_t)} + G_{(r_t, \rho_t)} K_{(r_t, \rho_t)})x(t) + B_{(r_t, \rho_t)}x(t - \tau) + C_{(r_t, \rho_t)}w(t), \\ z(t) = (D_{(r_t, \rho_t)} + H_{(r_t, \rho_t)} K_{(r_t, \rho_t)})x(t) + E_{(r_t, \rho_t)}x(t - \tau) + F_{(r_t, \rho_t)}w(t), \\ x(s) = \varphi(s), s \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (17)$$

是正的,  $L_1$ -随机内稳定的且满足  $\|\tilde{\Sigma}\|_{L_1-L_1} < \gamma$ . 为此在系统  $\tilde{\Sigma}$  中, 对  $(r_t, \rho_t) = (i, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ , 假设  $B_{(i, k)} \geq 0, C_{(i, k)} \geq 0, E_{(i, k)} \geq 0$  和  $F_{(i, k)} \geq 0$ . 借助于定理 2, 可得如下定理.

**定理 3** 对于给定的  $\gamma > 0$ , 闭环系统  $\tilde{\Sigma}$  是正的,  $L_1$ -随机内稳定的且满足  $\|\tilde{\Sigma}\|_{L_1-L_1} < \gamma$ , 当且仅当存在矩阵  $K_{(i, k)}$  和向量  $p_{(i, k)} \in \mathbb{R}_+^{n_x}, \forall (i, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ , 使得,

$$[A_{(i, k)} + G_{(i, k)} K_{(i, k)}]_{m_x n} \geq 0, n \neq m_x, \quad (18)$$

$$D_{(i, k)} + H_{(i, k)} K_{(i, k)} \geq 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{(i, k)} \\ C_{(i, k)}^T p_{(i, k)} + F_{(i, k)}^T e_{n_z} - \gamma e_{n_w} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (20)$$

其中  $m_x = 1, \dots, n_x$  且

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_{(i, k)} = & (A_{(i, k)} + G_{(i, k)} K_{(i, k)})^T p_{(i, k)} + (D_{(i, k)} + H_{(i, k)} K_{(i, k)})^T e_{n_z} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} p_{(j, k)} + \sum_{l=1}^M \lambda_{kl} p_{(i, l)} + \\ & \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^M [e^{\Pi\tau}]_{ij} [e^{\Lambda\tau}]_{kl} [B_{(i, k)}^T q_{(i, k)} + E_{(i, k)}^T e_{n_z}]. \end{aligned}$$

下面采用文献中提出的控制器设计迭代算法并加以修改, 将本文求解  $L_1$ -增益控制器的双线性矩阵不等式 (BMIs) 问题转化为求解一系列受 LP 约束的凸优化问题<sup>[3]</sup>. 具体算法如下.

**$L_1$ -增益设计的迭代算法:**

步骤 1: 令  $\theta = 1$ , 并选择如下 (24) 式的初始控制增益矩阵  $K_{(i, k)}^{(1)}, (i, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ .

若存在向量  $p_{(i, k)} \in \mathbb{R}_+^{n_x}, \eta_{(i, k)}^{(n)} \in \mathbb{R}^{n_z}, n \in \{1, 2, \dots, n_x\}$ , 使得下面的 LP 问题是可解的:

$$[A_{(i, k)}]_{m_x n} [p_{(i, k)}]_n + [G_{(i, k)}]_{r, m_x} \eta_{(i, k)}^{(n)} \geq 0, n \neq m_1, \quad (21)$$

$$[D_{(i, k)}]_{m_z n} [p_{(i, k)}]_n + [H_{(i, k)}]_{r, m_z} \eta_{(i, k)}^{(n)} \geq 0, \quad (22)$$

$$A_{(i, k)} p_{(i, k)} + G_{(i, k)} \sum_{n=1}^{n_x} \eta_{(i, k)}^{(n)} + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} p_{(j, k)} + \sum_{l=1}^M \lambda_{lk} p_{(i, l)} + B_{(i, k)} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^M [e^{\Pi\tau}]_{ji} [e^{\Lambda\tau}]_{lk} p_{(j, l)} \prec 0. \quad (23)$$

式中  $m_x = 1, \dots, n_x, m_z = 1, \dots, n_z, (i, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ , 则  $K_{(i, k)}^{(1)}$  可表示为

$$K_{(i, k)}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\eta_{(i, k)}^{(1)}}{[p_{(i, k)}]_1} & \frac{\eta_{(i, k)}^{(2)}}{[p_{(i, k)}]_2} & \dots & \frac{\eta_{(i, k)}^{(n_x)}}{[p_{(i, k)}]_{n_x}} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

步骤 2: 对于固定的  $K_{(i, k)}^{(\theta)}$ , 求解如下关于  $\gamma^{(\theta)}$  和  $p_{(i, k)}^{(\theta)} \in \mathbb{R}_+^{n_x}, (i, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$  的凸优化问题:

OP1:  $\min \{ \gamma^{(\theta)} \}$

$$s.t. \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{(i, k)}^{(\theta)} \\ C_{(i, k)}^T p_{(i, k)}^{(\theta)} + F_{(i, k)}^T e_{n_z} - \gamma^{(\theta)} e_{n_w} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_{(i, k)}^{(\theta)} = & (A_{(i, k)} + G_{(i, k)} K_{(i, k)}^{(\theta)})^T p_{(i, k)}^{(\theta)} + (D_{(i, k)} + H_{(i, k)} K_{(i, k)}^{(\theta)})^T e_{n_z} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} p_{(j, k)}^{(\theta)} + \sum_{l=1}^M \lambda_{kl} p_{(i, l)}^{(\theta)} + \\ & \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^M [e^{\Pi\tau}]_{ij} [e^{\Lambda\tau}]_{kl} [B_{(i, k)}^T q_{(i, k)}^{(\theta)} + E_{(i, k)}^T e_{n_z}]. \end{aligned}$$

记  $\gamma_*^{(\theta)}$  和  $p_{(i,k)}^{(\theta)}$  为 OP1 的解. 如果  $\frac{\gamma_*^{(\theta)} - \gamma_*^{(\theta-1)}}{\gamma_*^{(\theta)}} \leq \varepsilon_1$ , 其中  $\varepsilon_1$  是预设的迭代误差界, 则

$K_{(i,k)} = K_{(i,k)}^{(\theta)}, p_{(i,k)} = p_{(i,k)}^{(\theta)}$ . STOP. 否则转下一步.

步骤 3: 对于固定的  $p_{(i,k)}^{(\theta)}$ , 求解如下关于  $\gamma^{(\theta)}$  和  $K_{(i,k)}^{(\theta)}, (i,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$  的凸优化问题:

$$\text{OP2: } \min \gamma^{(\theta)}$$

s. t. (25) 成立;

$$D_{(i,k)} + H_{(i,k)} K_{(i,k)}^{(\theta)} \geq 0, [A_{(i,k)} + G_{(i,k)} K_{(i,k)}^{(\theta)}]_{m_x n} \geq 0, n \neq m_x. \quad (26)$$

记  $\gamma^{(\theta)}$  和  $K_{(i,k)}^{(\theta)}$  为 OP2 的解. 设  $\theta = \theta + 1$  和  $K_{(i,k)}^{(\theta)} = K_{(i,k)}^{(\theta-1)}$ , 然后转到步骤 2.

文献[6]考虑的是具有一个 Markov 过程 MJLPDSs 的  $L_1$ -随机内稳定性和  $L_1$ -增益性能, 本文将文献[6]的结论推广至具有两个独立 Markov 过程的 MJLPDSs 的情形, 且基于双转移概率构造了线性协正随机李雅普诺夫泛函, 进而建立了所考虑系统的  $L_1$ -随机内稳定性和  $L_1$ -增益性能的充分必要条件.

### 3 数值仿真

例 1: 考虑具有两个相互独立 Markov 过程的连续时间 MJLPDSs(17), 其系统参数取值如下:

$$A_{(1,1)} = \begin{bmatrix} -1.342 & 0.5 \\ 0.058 & -1.83 \end{bmatrix}, B_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0.32 & 0 \\ 0.1 & 0.16 \end{bmatrix}, C_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix},$$

$$A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} -2.469 & 0.64 \\ 0.85 & -1.222 \end{bmatrix}, B_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.12 \\ 0 & 0.22 \end{bmatrix}, C_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.15 \end{bmatrix},$$

$$A_{(1,2)} = \begin{bmatrix} -0.158 & 0.6 \\ 0.142 & -1.72 \end{bmatrix}, B_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0.24 & 0 \\ 0 & 0.32 \end{bmatrix}, C_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.06 \end{bmatrix},$$

$$A_{(2,1)} = \begin{bmatrix} -1.364 & 0.7 \\ 0.8 & -2.7 \end{bmatrix}, B_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0.36 & 0 \\ 0 & 0.18 \end{bmatrix}, C_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.04 \end{bmatrix},$$

$$D_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}^T, E_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.03 \end{bmatrix}^T, F_{(1,1)} = 0.1, G_{(1,1)} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, H_{(1,1)} = 0.12,$$

$$D_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.1 \end{bmatrix}^T, E_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.05 \end{bmatrix}^T, F_{(1,2)} = 0.12, G_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}, H_{(1,2)} = 0.14,$$

$$D_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.05 \end{bmatrix}^T, E_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.035 \end{bmatrix}^T, F_{(2,1)} = 0.16, G_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.5 \end{bmatrix}, H_{(2,1)} = 0.2,$$

$$D_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.16 \end{bmatrix}^T, E_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 0.046 \\ 0.04 \end{bmatrix}^T, F_{(2,2)} = 0.13, G_{(2,2)} = \begin{bmatrix} -0.36 \\ 0.52 \end{bmatrix}, H_{(2,2)} = 0.16,$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} -1.5 & 1.5 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0.6 & -0.6 \end{bmatrix}, N = M = \{1, 2\}, \tau = 0.2.$$

接下来, 利用 YALMIP 工具箱对  $L_1$ -增益设计迭代算法中的线性矩阵不等式(LMIs)(21)~(26)进行求解, 最终经过 12 次迭代, 得到以下可行解:

$$p_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0.2310 \\ 0.1681 \end{bmatrix}, p_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0.2627 \\ 0.1671 \end{bmatrix}, p_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0.1681 \\ 0.1028 \end{bmatrix}, p_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 0.1671 \\ 0.1376 \end{bmatrix},$$

$$\eta_{(1,1)}^{(1)} = 83.8117, \eta_{(1,1)}^{(2)} = 9.7010, \eta_{(1,2)}^{(1)} = 2.3480, \eta_{(1,2)}^{(2)} = -36.7712,$$

$$\eta_{(2,1)}^{(1)} = -14.3006, \eta_{(2,1)}^{(2)} = -8.3581, \eta_{(2,2)}^{(1)} = 20.3801, \eta_{(2,2)}^{(2)} = 70.7227,$$

且  $L_1$ -性能指标参数  $\gamma$  的最小优化取值为  $\gamma_{\min} = 0.1843$ . 同时可求得系统(17)的  $L_1$ -增益为:

$$K_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0.5273 \\ 0.2756 \end{bmatrix}^T, K_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0.7371 \\ 0.6765 \end{bmatrix}^T, K_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0.2756 \\ 0.2501 \end{bmatrix}^T, K_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 0.6765 \\ -0.9986 \end{bmatrix}^T.$$

利用 MATLAB 对系统 (17) 进行仿真. 取初始函数和初始模态分别为  $\varphi(s)=[2, 1.5]^T$ ,  $r(s)=\rho(s)=1, s \in [-0.2, 0]$ , 可得仿真结果如图 1~3 所示. 图 1 描述了两个相互独立的 Markov 切换信号, 其中切换信号  $r(t)$  如图 1(a), 切换信号  $\rho(t)$  如图 1(b). 系统控制输入信号  $u(t)$  如图 2 所示. 闭环系统的状态轨迹如图 3 所示, 由图 3 可知闭环系统 (17) 的状态是随机稳定的. 仿真结果验证了本文针对具有两个相互的独立 Markov 过程的 MJLPDSs 提出的保证  $L_1$ -控制设计方案是可行和有效的.

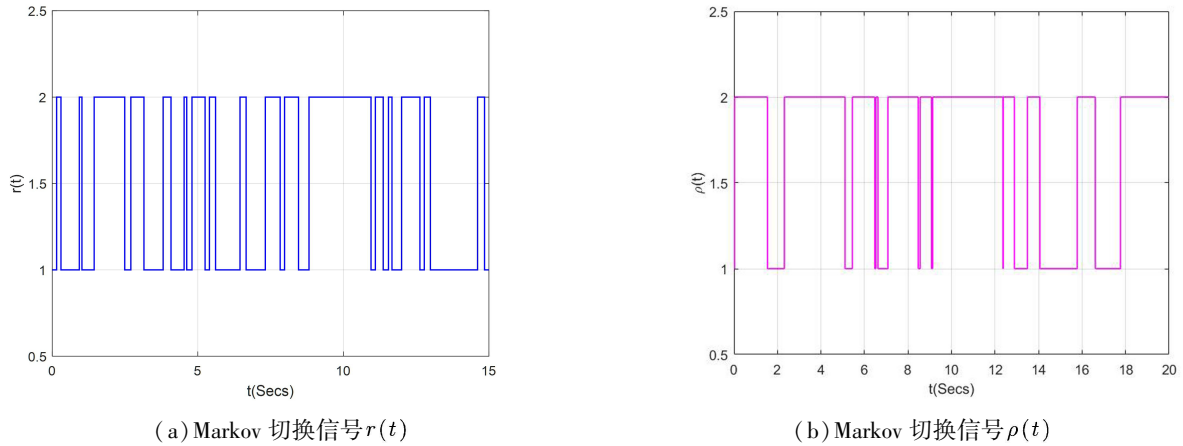


图 1 系统(17)的 Markov 切换信号图

Fig.1 Markov switch signals of system (17)

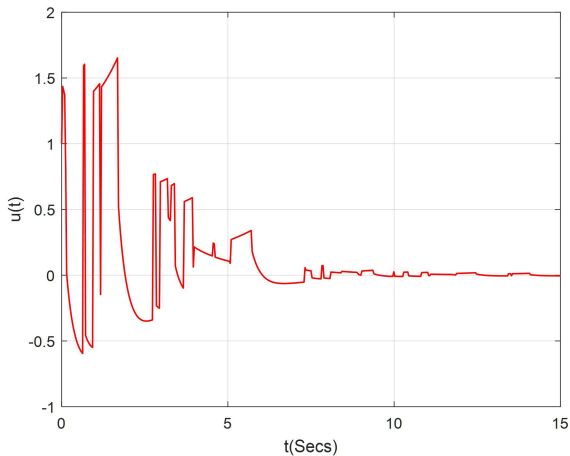


图 2 控制输入信号  $u(t)$

Fig.2 Control input signal  $u(t)$

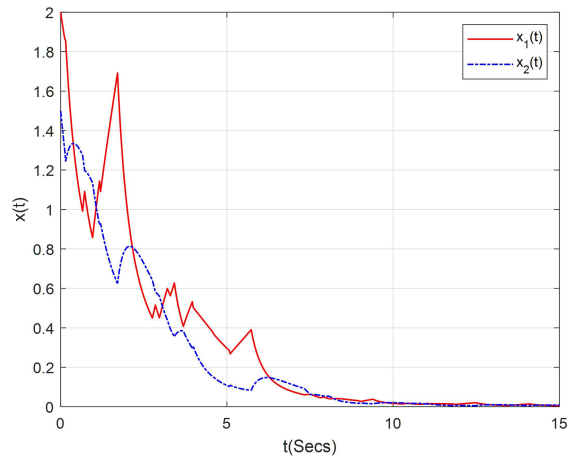


图 3 系统(17)状态响应图

Fig.3 State responses of system(17)

### 4 结论

本文研究了具有两个独立 Markov 过程的 MJLPDSs 的随机稳定性分析、 $L_1$ -增益性能分析和保证  $L_1$ -增益控制器设计问题. 利用线性协正随机李雅普诺夫泛函和 Markov 化方法, 建立了系统  $L_1$ -随机内稳定性和  $L_1$ -增益性能的充分必要条件, 并且从理论上揭示了具有两个 Markov 跳变参数的 MJLPDSs 的  $L_1$ -随机内稳定性和  $L_1$ -增益性能条件依赖于系统时滞的大小和转移速率. 此外, 提出了一种适用于具有两个独立 Markov 过程 MJLPDSs 的保证  $L_1$  的保证  $L_1$ -控制设计的迭代优化算法, 将求解  $L_1$ -增益控制器的双线性矩阵不等式 (BMIs) 难题转化为求解受 LP 约束的凸优化问题. 最后给出的仿真例子验证了本文提出的保证  $L_1$ -增益控制设计方法的可行性和有效性.

## 参考文献

- [1] COSTA O L V, FRAGOSO M D, MARQUES R P. Discrete-time Markov jump linear systems[M]. Springer Science & Business Media, 2005.
- [2] ZHANG D W. Necessary and sufficient conditions for stochastic stability and stabilization of positive systems with two independent Markov processes[J]. IEEE Access, 2020, 8: 226662-226670.
- [3] NGOC P H A. Stability of positive differential systems with delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(1): 203-209.
- [4] BRIAT C. Linear parameter-varying and time-delay systems[J]. Analysis, observation, filtering & control, 2014, 3: 5-7.
- [5] AIT RAMI M. Stability analysis and synthesis for linear positive systems with time-varying delays[C]. Positive Systems: Proceedings of the third Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 2009). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009: 205-215.
- [6] ZHU S Q, HAN Q L, ZHANG C H.  $L_1$ -stochastic stability and  $L_1$ -gain performance of positive Markov jump linear systems with time-delays: necessary and sufficient conditions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(7): 3634-3639.
- [7] ASHKENAZI-GOLAN G, RAINER C, SOLAN E. Solving two-state Markov games with incomplete information on one side[J]. Games and Economic Behavior, 2020, 122: 83-104.
- [8] REN J J, LIU X Z, ZHU H, et al. State estimation of neural networks with two Markovian jumping parameters and multiple time delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(2): 812-833.
- [9] ZHANG D W, XIE J Y, NING B D. Network-based filtering for positive systems with random communication delays and deception attacks[J]. Neurocomputing, 2020, 400: 450-457.
- [10] LI Y, YU Z X, LIU Y, et al. Stochastic stabilization for discrete-time Markovian jump systems with time-varying delay and two Markov chains under partly known transition probabilities[J]. IEEE Access, 2021, 9: 26937-26947.
- [11] ZHANG X M, HAN Q L. Robust  $H_1$ -filtering for a class of uncertain linear systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2008, 44(1): 157-166.
- [12] ZOU L, WANG Z D, GAO H J. Observer-based  $H_1$ -control of networked systems with stochastic communication protocol: The finite-horizon case[J]. Automatica, 2016, 63: 366-373.
- [13] ZHU S Q, HAN Q L, ZHANG C H. Investigating the effects of time-delays on stochastic stability and designing  $l_1$ -gain controllers for positive discrete-time Markov jump linear systems with time-delay[J]. Information Sciences, 2016, 355: 265-281.
- [14] WANG Y N, YANG J, ZHU D J. Stochastic stability and stabilization of linear time-delay positive systems with two independent Markov processes[C]// 2021 China Automation Congress (CAC). Beijing: IEEE, 2021: 5056-5061.
- [15] AIT RAMI M, HELMKE U, TADEO F. Positive observation problem for linear time-delay positive systems[C]// 2007 Mediterranean Conference on Control & Automation. Athens: IEEE, 2007: 1-6.

(责任编辑:张阳,殷锋,付强,和力新,肖丽;英文编辑:周序林,郑玉才)