doi:10. 11920/xnmdzk. 2025. 04. 013

单值中智集的改进得分函数及其 TOPSIS 决策方法

田中文[1,2],张贤勇[1,2],陈　江[1,2,3]

(1.四川师范大学数学科学学院,四川 成都 610066;2.四川师范大学智能信息与量子信息研究所,四川 成都 610066;
3.四川轻化工大学数学与统计学院,四川 自贡 643000)

摘　要:单值中智集作为模糊集的一种推广,深入描述现实世界中大量存在的不确定信息.但是,单值中智集的现有得分函数区分效果不佳,而传统模糊评价方法在解决多属性决策问题上也不够准确.对此,提出一种基于单值中智集的改进得分函数及相应 TOPSIS 决策方法,有效实施多属性决策.首先基于中智集,分析现有得分函数缺陷,提出改进得分函数;研究新得分函数的单调性、取值范围,并分析与得到四种得分函数的大小关系.接着基于单值中智集的改进得分函数,建立 TOPSIS 决策方法,设计相关实现算法.最后,采用投资选择的具体实例,进行多方法对比分析,表明基于改进得分函数的新决策方法的合理性与有效性.

关键词:中智集;单值中智集;得分函数;TOPSIS;多属性决策

中图分类号:O159;O225　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:2095-4271(2025)04-0455-09

An improved score function and its TOPSIS decision method based on single-valued neutrosophic sets

TIAN Zhongwen[1,2], ZHANG Xianyong[1,2], CHENG jiang[1,2,3]

(1.School of Mathematical Sciences, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China;
2.Institute of Intelligent Information and Quantum Information, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China;
3.School of Mathematics and Statistics, Sichuan University of Science and Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: As a generalization of fuzzy set, single-valued neutrosophic sets (SVNSs) deeply characterize uncertainty information, which extensively exists in the real world. However, current score functions of SVNSs usually have poor discrimination effects, whereas the traditional method of fuzzy evaluation is not accurate enough for solving multi-attribute decision-making problems. Thus, an improved score function of SVNSs was proposed to establish a corresponding TOPSIS decision method, so as to implement multi-attribute decision-making. First based on SVNSs, defects of existing scoring functions were analyzed and revealed, and thus an improved scoring function was proposed; the new scoring function got its monotonicity and value ranges, and four types of scoring functions acquired their size relationships. Then according to the improved score function of SVNSs, the corresponding TOPSIS decision method was established, and its implementation algorithm was designed. Finally, a concrete example of investment selection was performed for comparative analysis of multiple decision approaches, and thus the rationality and effectiveness of new decision method driven by improved score function were demonstrated well.

Keywords: neutrosophic set; single-valued neutrosophic set; score function; TOPSIS; MADM

收稿日期:2024-06-06

通信作者:张贤勇(1978-),男,教授,博士后,博士生导师,研究方向:不确定性分析与智能信息处理.E-mail:zhangxy@sicnu.edu.cn

基金项目:教育部人文社科规划基金项目(23YJA630114);四川省自然科学基金项目(2024NSFSC0486);四川省科技计划项目(2022ZYD0001)

多属性决策是现代决策科学的一个重要组成部分,广泛应用于项目评估、投资决策、效益排序、供应商选择等.但在这些实际活动中,由于决策问题的模糊性和复杂性,人们有时很难用准确数字来表达出自己的观点[1-2].Zadeh 最先提出模糊集概念,解决具有模糊属性的决策问题[3].为了更好描述不确定信息,Smarandache 对模糊集和直觉模糊集做了推广,借助真理、不确定、谬误三个组件提出了中智集概念[4].中智集定义在非标准的子区间上,不方便科学研究与工程应用.对此,Wang 等推广中智集,提出单值中智集[5-6].单值中智集用真隶属度函数、假隶属度函数、不确定隶属度函数共同描述决策信息,且三种隶属度函数都表示为闭区间[0,1]中的精确数,这样便于实际描述与应用.

单值中智集接近实际的决策问题,在不确定信息处理上具有很多优点,故得到大量研究.文献[7]提出解决单值中智集多属性决策 TOPSIS 方法;文献[8]用单值中智集表示决策信息,采用加权平均算子集合群体意见,结合 TOPSIS 方法进行供应商选择的多属性决策;文献[9]提出改进的单值中智集交叉熵,拓展到区间中智集的交叉熵,有效处理多属性决策问题.特别地,文献[10-12]将得分函数引入单值中智集决策方法,而来源于模糊决策的 TOPSIS 方法在单值中智集决策中仍然发挥重要作用[11-13].可见,TOPSIS 决策方法已经与单值中智集相结合,并可以利用得分函数来有效解决相关的多属性决策问题.

文献[10-11]所建得分函数存在不合理性,导致较低区分度.文献[12]改进文献[10-11]得分函数从而优化区分度,但只考虑了不确定隶属函数的加权提取,忽略了具有结构对称的假隶属度的加权提取;进而,相关双项加权组合能够带来更强的融合刻画与系统鲁棒性,值得考虑与构建.总之,存在的得分函数[11-13]值得改进与研究,从而促进单值中智集的多属性决策,特别是从 TOPSIS 决策方法的角度[11-13].对此,本文针对单值中智集背景及其现有得分函数[11-13],主要构建一种改进得分函数,进而提出相应的 TOPSIS 决策方法并进行多属性决策.具体地,第 1 节简单介绍单值中智集;第 2 节揭示现有得分函数缺点从而提出改进得分函数,并研究新得分函数的单调性、取值范围以及与三种旧得分函数的大小关系;第 3 节依托改进得分函数来建立 TOPSIS 决策方法;第 4 节采用投资选择具体实例,对比分析多种决策方法,证实新决策方法的合理性与有效性;第 5 节给出结论.

1 单值中智集

定义 1[14] 设U是一个论域,U上的单值中智集A由真隶属函数T_A、不确定隶属函数I_A和假隶属函数F_A构成,其中$\forall x\in U$, $T_A(x)$, $I_A(x)$, $F_A(x)\in[0,1]$.U上的单值中智集A可以表示为:

$$A=\left\{\left\langle x,T_A(x),I_A(x),F_A(x)\right\rangle \middle| x\in U\right\}.$$

称$\left(T_A(x),I_A(x),F_A(x)\right)$为一个单值中智数.在不混淆的情况下,一个单值中智数n 可以表示为:

$$n=\left(T_A(x),I_A(x),F_A(x)\right).$$

定义 2[15] 设m,n为两个单值中智数,k是一个大于0的实数,定义下述运算:

①$m\oplus n=\left\langle T_m+T_n-T_m\cdot T_n,I_m\cdot I_n,F_m\cdot F_n\right\rangle$,

②$km=\left\langle 1-(1-T_m)^k,(I_m)^k,(F_m)^k\right\rangle$,

③$m\otimes n=\left\langle T_m\cdot T_n I_m+I_n-I_m\cdot I_n,F_m+F_n-F_m\cdot F_n\right\rangle$.

定义 3[1] 设p为任意非零正实数.设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$上的两个单值中智集为:

$$A=\sum_{i=1}^{n}\left(T_A\left(x_i\right),I_A\left(x_i\right),F_A\left(x_i\right)\right),$$

$$B=\sum_{i=1}^{n}\left(T_B\left(x_i\right),I_B\left(x_i\right),F_B\left(x_i\right)\right),$$

则它们的距离定义为:

$$D_1(A,B)=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left|T_A\left(x_i\right)-T_B\left(x_i\right)\right|^p+\left|I_A\left(x_i\right)-I_B\left(x_i\right)\right|^p+\left|F_A\left(x_i\right)-F_B\left(x_i\right)\right|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}(i=1,2,\cdots,n),$$

它们的标准化距离定义为

$$D_2(A,B)=\left[\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|T_A\left(x_i\right)-T_B\left(x_i\right)\right|^p+\left|I_A\left(x_i\right)-I_B\left(x_i\right)\right|^p+\left|F_A\left(x_i\right)-F_B\left(x_i\right)\right|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}(i=1,2,\cdots,n).$$

定义 4[13]　设$a_j=\left(T_j,I_j,F_j\right)\left(j=1,2,\cdots,n\right)$为一个单值中智数集合,令 $SVNWA:Q^n\rightarrow Q$,若$SVNWA_\omega\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j a_j$,其中 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$为属性的权重,满足$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$和$\omega_j\in\left[0,1\right]$,则称函数 SVNWA 为单值中智加权平均算子.

根据单值中智数的运算法则,可以得到:

$$SVNWA_\omega\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-T_j\right)^{\omega_j},\prod_{j=1}^{n}I_j^{\omega_j},\prod_{j=1}^{n}F_j^{\omega_j}\right).$$

2　单值中智集的改进得分函数

得分函数能够反映模型预测结果的概率分布,在单值中智集中依然起着关键作用.本节从现有得分函数[11-13]出发,分析相关缺陷从而构建改进得分函数,研究新得分函数的性质,将不同得分函数进行比较并揭示潜在的大小关系.为此,主要依托单值中智数$A=\left(T_A,I_A,F_A\right)$来呈现与描述得分函数.

2.1　现有得分函数的缺陷

基于单值中智集,下面聚焦文献[10-11]的两种得分函数,并揭示相关刻画缺陷.

定义 5[10]　单值中智数$A=\left(T_A,I_A,F_A\right)$的$S_1$得分函数定义为

$$S_1(A)=\frac{\left(1+T_A-2I_A-F_A\right)}{3}.\tag{1}$$

由定义 5 可知,$S_1\left(A\right)\in\left(-1,1\right)$.假如$T_A$越大且$I_A$与$F_A$越小,那么该得分函数越大.但是,该得分函数的区分效果并不佳[16].

例 1　设两个单值中智数$A=\left(0.8,0.2,0.2\right)$和$B=\left(0.8,0.1,0.4\right)$,根据定义 5 得分函数有:

$$S_1(A)=\frac{\left(1+T_A-2I_A-F_A\right)}{3}=0.4,$$

$$S_1(B)=\frac{\left(1+T_B-2I_B-F_B\right)}{3}=0.4,$$

则$A\sim B$,即S_1无法区分这两个单值中智数的大小.

定义 6[11]　单值中智数$A=\left(T_A,I_A,F_A\right)$的$S_2$得分函数定义为

$$S_2(A)=\frac{\left(T_A+1-I_A+1-F_A\right)}{3}.\tag{2}$$

定义 6 中的S_2得分函数改进了文献[10]的S_1得分函数,将区分范围更精准的控制在$\left(0,1\right)$上(即$S_2\left(A\right)\in\left(0,1\right)$),但区分效果仍然不佳.

例 2　设两个单值中智数$C=\left(0.9,0.6,0.4\right)$和$D=\left(0.9,0.3,0.7\right)$,根据$S_2$得分函数有:

$$S_2(C)=\frac{\left(T_C+1-I_C+1-F_C\right)}{3}=0.633,$$

$$S_2(D)=\frac{\left(T_D+1-I_D+1-F_D\right)}{3}=0.633,$$

则$C\sim D$,即S_2无法区分这两个单值中智数的大小.

2.2　改进得分函数

下面,提出与研究单值中智集的改进得分函数.作为依托,首先提供文献[12]的得分函数,这里标注为S_3.

定义 7[12]　单值中智数$A=\left(T_A,I_A,F_A\right)$的$S_3$得分函数定义为:

$$S_3(A)=\frac{T_A+1-\alpha I_A+1-F_A}{3},\tag{3}$$

其中,$\alpha=\dfrac{F_A}{T_A+F_A}$.

例 3　针对例 1 与 2 的单值中智数对(A,B)与(C,D),计算可得:

$$S_3(A)=\frac{2}{3}+\frac{0.8}{3}-\frac{0.2}{0.8+0.2}\cdot\frac{0.2}{3}-\frac{0.2}{3}=0.7333,$$

$$S_3(B)=\frac{2}{3}+\frac{0.8}{3}-\frac{0.4}{0.8+0.4}\cdot\frac{0.1}{3}-\frac{0.4}{3}=0.7889,$$

$$S_3(C)=\frac{2}{3}+\frac{0.9}{3}-\frac{0.4}{0.9+0.4}\cdot\frac{0.6}{3}-\frac{0.4}{3}=0.7718,$$

$$S_3(D)=\frac{2}{3}+\frac{0.9}{3}-\frac{0.7}{0.9+0.7}\cdot\frac{0.3}{3}-\frac{0.7}{3}=0.6896,$$

故有$S_3(A)<S_3(B),S_3(C)>S_3(D)$.可见,$S_3$得分函数可以同时区分$A$、$B$与$C$、$D$,从而对$S_1$、$S_2$得分函数都有所改进.

对比文献[10-11]的得分函数,文献[12]改进提出了新得分函数S_3,主要对S_2[11]中的不确定隶属函数I_A增添了可确定系数$\alpha=\dfrac{F_A}{T_A+F_A}$.基于例 3,$S_3$具有更好的区分性,改进了$S_1$与$S_2$.观测$S_2$(式(2)),信息原子$I_A$与$F_A$具有结构对称性.$S_3$(式(3))采用系数

$\alpha=\dfrac{F_A}{T_A+F_A}\in[0,1]$提取$I_A$,则对称地可以采用系数$\beta=\dfrac{I_A}{T_A+I_A}\in[0,1]$提取$F_A$,进而关于$\alpha\times I_A+\beta\times F_A$集成组合的得分函数构造能够获取更好的结构平衡性与系统鲁棒性.下面由此构造单值中智数的改进得分函数,标注为S.

定义 8 单值中智数$A=\left(T_A,I_A,F_A\right)$的$S$得分函数定义为:

$$S(A)=\frac{T_A+1-\alpha I_A+1-\beta F_A}{3}. \tag{4}$$

其中,$\alpha=\dfrac{F_A}{T_A+F_A}$,$\beta=\dfrac{I_A}{T_A+I_A}$.

例 4 针对例 1 与 2 的单值中智数对(A,B)与(C,D),将新得分函数计算可得:

$$S(A)=\frac{2}{3}+\frac{0.8}{3}-\frac{0.2}{0.8+0.2}\cdot\frac{0.2}{3}-\frac{0.2}{0.8+0.2}\cdot\frac{0.2}{3}=0.9067,$$

$$S(B)=\frac{2}{3}+\frac{0.8}{3}-\frac{0.4}{0.8+0.4}\cdot\frac{0.1}{3}-\frac{0.1}{0.8+0.1}\cdot\frac{0.4}{3}=0.9074,$$

$$S(C)=\frac{2}{3}+\frac{0.9}{3}-\frac{0.4}{0.9+0.4}\cdot\frac{0.6}{3}-\frac{0.6}{0.9+0.6}\cdot\frac{0.4}{3}=0.8519,$$

$$S(D)=\frac{2}{3}+\frac{0.9}{3}-\frac{0.7}{0.9+0.7}\cdot\frac{0.3}{3}-\frac{0.3}{0.9+0.3}\cdot\frac{0.7}{3}=0.8646,$$

故有$S(A)<S(B),S(C)<S(D)$.可见S得分函数可以同时区分A、B与C、D,从而对S_1、S_2得分函数都有所改进,这个改进结论与S_3类似(例 3).

定理 1 针对单值中智数$A=\left(T_A,I_A,F_A\right)$,得分函数$S(A)$关于$T_A$单调递增,关于$I_A$, F_A单调递减.

证明:由定义 8,

$$S(A)=\frac{T_A+1-\alpha I_A+1-\beta F_A}{3}=\frac{2}{3}+\frac{T_A}{3}-\frac{F_A}{T_A+F_A}\cdot\frac{I_A}{3}-\frac{I_A}{T_A+I_A}\cdot\frac{F_A}{3}\left(T_A,I_A,F_A\in[0,1]\right),$$

$$\frac{\partial S\left(A\right)}{\partial T_A}=\frac{1}{3}+\frac{I_AF_A}{3\left(T_A+F_A\right)^2}+\frac{I_AF_A}{3\left(I_A+F_A\right)^2}>0,$$

故$S(A)$关于T_A单调递增.同理可得

$$\frac{\partial S\left(A\right)}{\partial I_A}=-\frac{F_A}{3\left(T_A+F_A\right)}-\frac{I_AF_A}{3\left(T_A+I_A\right)^2}<0,$$

$$\frac{\partial S\left(A\right)}{\partial F_A}=-\frac{F_A}{3\left(T_A+I_A\right)}-\frac{I_AT_A}{3\left(T_A+F_A\right)^2}<0,$$

故$S(A)$关于I_A, F_A单调递减.证毕

推论 1 得分函数S具有值域范围[0,1],即对任意单值中智数$A=\left(T_A,I_A,F_A\right)$有$S(A)\in[0,1]$.

证明:得分函数的范围主要来源于定理 1 的单调性及$0\le T_A\le1,0\le I_A\le1,0\le F_A\le1$,即

$$S(A)\le\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{0}{1+0}\cdot\frac{0}{3}-\frac{0}{1+0}\cdot\frac{0}{3}=1,$$

$$S(A)\ge\frac{2}{3}+\frac{0}{3}-\frac{1}{0+1}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{0+1}\cdot\frac{1}{3}=0,$$

这里$(1,0,0)$和$(0,1,1)$是取得最值 1、0 的两个理想单值中智数,故$0\le S(A)\le1$.证毕

2.3 四种得分函数的大小比较

关于单值中智集,四种得分函数具有改进线索$S_1\to S_2\to S_3\to S$,其中前 3 种是存在的[10-12],最后的S是新提出的改进得分函数.下面,研究它们的大小关系.

定理 2 四种得分函数具有大小关系$S_1\leqslant S_2\leqslant S_3\leqslant S$.

证明:针对$A=\left(T_A,I_A,F_A\right)$有:

$T(A),I(A),F(A)\in[0,1]$,则

$$S_1(A)-S_2(A)=\frac{1+T_A-2I_A-F_A}{3}-\frac{2+T_A-I_A-F_A}{3}=\frac{-1-I_A}{3}\le0.$$

$$S_2-S_3=\frac{2+T_A-I_A-F_A}{3}-\frac{2+T_A-\frac{F_A}{T_A+F_A}I_A-F_A}{3}=\frac{\left(\frac{F_A}{T_A+F_A}-1\right)I_A}{3}=-\frac{\frac{T_A}{T_A+F_A}I_A}{3}\le0.$$

$$S_3-S=\frac{2+T_A-\frac{F_A}{T_A+F_A}I_A-F_A}{3}-\frac{2+T_A-\frac{F_A}{T_A+F_A}I_A-\frac{I_A}{T_A+I_A}F_A}{3}=\frac{\left(\frac{I_A}{T_A+I_A}-1\right)F_A}{3}=-\frac{\frac{T_A}{T_A+I_A}F_A}{3}\le0.$$

因此有$S_1(A)\leqslant S_2(A)\leqslant S_3(A)\leqslant S(A)$,即有$S_1<S_2<S_3<S$恒成立.证毕

定理 2 揭示了四种得分函数的稳定大小关系,表明它们的相关改进具有函数增大的趋势.下面描述

S_1, S_2, S_3, S四种不同得分函数的图像.为此,将关于(T, I, F)的 3 元得分函数取定 1 个变量值,从而描绘基于双变量的得分函数 3 维曲面.这里,图 1、2、3 分别确定$T = 0.5, I = 0.5, F = 0.5$,从而描述 4 种得分函数.

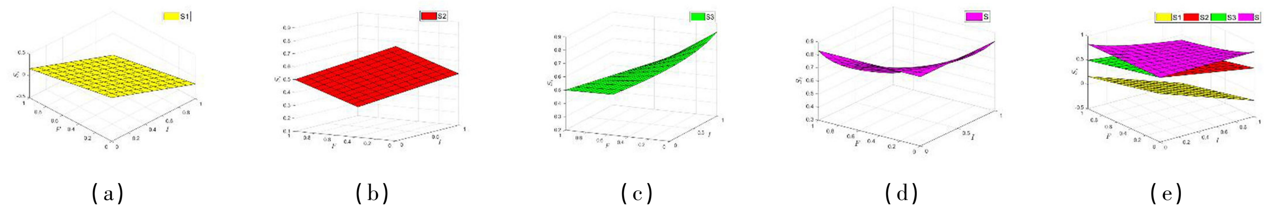

图 1　T=0.5 时 4 种得分函数的分布

Fig.1　Distributions of 4 score functions on T=0.5

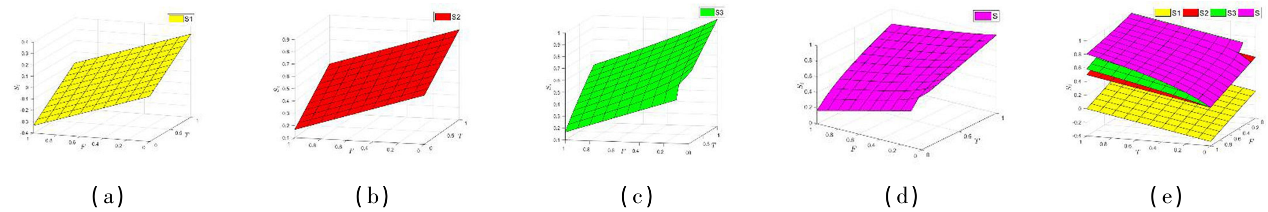

图 2　I=0.5 时 4 种得分函数的分布

Fig.2　Distributions of 4 score functions on I=0.5

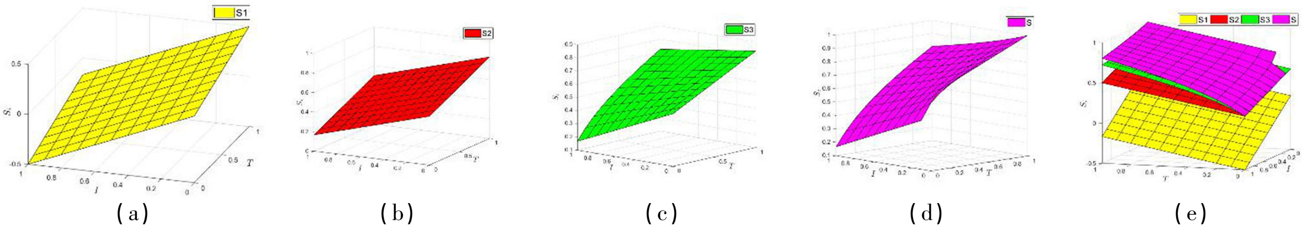

图 3　F=0.5 时 4 种得分函数的分布

Fig.3　Distributions of 4 score functions on F=0.5

基于图 1~3,能够观测四种得分函数的大小排序(定理 2)以及改进得分函数 S 的单调性(定理 1).

1)图 1 固定$T = 0.5$从而具有I、F变化,子图(a)(b)(c)(d)分别展现 4 种得分函数.关于图形变化,子图(a)(b)都是平面,而子图(c)(d)是曲面且(d)的曲面更弯曲,这种二元函数面的平弯变化及弯曲程度对应与反映了 4 种得分函数的改进变化,即得分函数的区分度再增加.观测可见,改进得分函数S在T不变时,其曲面的弯曲程度最大,故其区分度最好.子图(a)(b)(c)(d)可以分析得分函数的单调性.例如,子图(a)显示 T 不变时,I 增大激发得分函数S_1减小;又如,子图(d) 显示T不变时,不论I增大还是F增大,得分函数S会减小,这说明$S(A)$关于I_A、F_A单调递减(定理 1).进而,子图(e)汇总了子图(a)(b)(c)(d),即把 4 种得分函数画在一起,由此自然显示了它们的大小关系:$S_1 \le S_2 \le S_3 \le S$(定理 2),这个也能相对支持得分函数的区分性改进.

2)图 2 固定$I = 0.5$从而给出T、F变化,图 3 固定$F = 0.5$从而给出T、I变化.两种相关子图的情况与分析类似上述图 1,从而验证定理 1 与 2.此外,得分函数 S 不论是在I不变还是F不变的情况下,其多的曲面弯曲程度也意味着更好的区分度,这也表明其对于存在得分函数S_1, S_2, S_3[10-12]的改进性.

3　基于单值中智集改进得分函数的 TOPSIS 决策方法

单值中智集改进得分函数S已经构建与研究,其可以用于多属性决策.参考当前的 TOPSIS 决策方法[11-13],下面自然建立对应的 TOPSIS 决策方法.为此,设在某决策问题中,m 个决策方案分别为 $A_1, A_2 \cdots A_m$,n个决策属性分别为 $C_1, C_2 \cdots C_3$,属性权重为$\{\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_n\}$,决策者给出决策矩阵

$D=\left[d_{ij}\right]_{m\times n}\left(i=1,2\ \cdots\ m, j=1,2\ \cdots\ n\right)$, 其中 d_{ij} 为单值模糊数.相关的 TOPSIS 流程图参见图 4.首先,根据给定的决策矩阵,计算属性权重;其次,结合属性权重计算加权决策矩阵的单值中智集;然后,利用得分函数得到正理想方案和负理想方案;最后,利用 TOPSIS 方法对所有的决策方案进行由大到小排序,筛选出最佳决策方案.

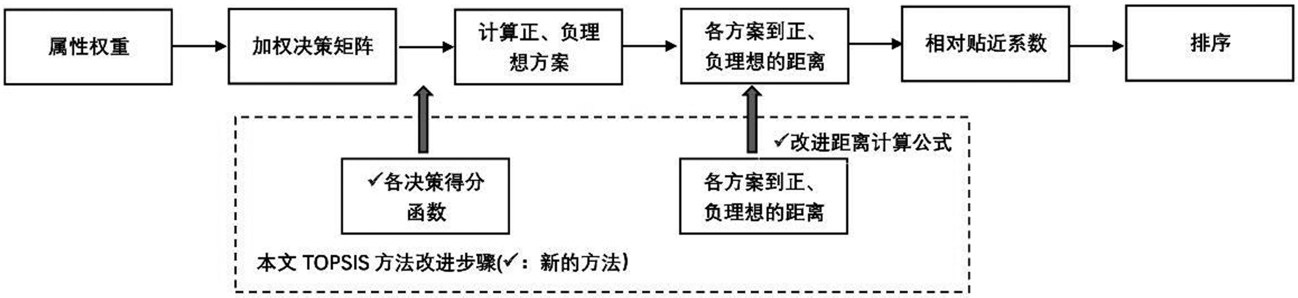

图 4 TOPSIS 决策方法流程图

Fig.4 Flow chart of TOPSIS decision method

步骤 1 单值中智决策问题属性权重的计算采用单值中智加权平均算子集成的方式.设 $\omega_j^k=\left(\omega_j^{(1)},\omega_j^{(2)}\ \cdots \omega_j^{(p)}\right)$ 是由第 k 个决策者分配给属性 C_j 的概率数,则组合权重 $\Omega=\left\{\omega_1,\omega_2\ \cdots\ \omega_n\right\}$ 可以通过 SVNWA 来确定[7],即

$$\begin{aligned}\omega_j &= SVNWA_\psi\left(\omega_j^{(1)},\omega_j^{(2)}\ \cdots \omega_j^{(p)}\right)=\\ &\psi_1\omega_j^{(1)}\oplus\psi_2\omega_j^{(2)}\oplus\cdots\oplus\psi_p\omega_j^{(p)}=\\ &\left\langle 1-\prod_{k=1}^{p}\left(1-T_j^p\right)^{\psi_k},\prod_{k=1}^{p}\left(I_j^p\right)^{\psi_k},\prod_{k=1}^{p}\left(F_j^p\right)^{\psi_k}\right\rangle,\end{aligned}\tag{5}$$

其中第 k 个决策者的权重为:

$$\psi_k=\frac{1-\sqrt{\left\{\left(1-T_k\left(x\right)\right)^2+I_k\left(x\right)^2+F_k\left(x\right)^2\right\}/3}}{\sum_{k=1}^{p}\left(1-\sqrt{\left\{\left(1-T_k\left(x\right)\right)^2+I_k\left(x\right)^2+F_k\left(x\right)^2\right\}/3}\right)},$$

(满足 $\sum_{k=1}^{p}\psi_k=1$).

步骤 2 根据步骤 1 计算出的属性权重结合公式,计算加权决策矩阵的单值中智集.

步骤 3 根据新得分函数 S,计算加权决策矩阵的得分函数值.

步骤 4

设 $d_{ij}^{\omega+}=(d_1,d_2\ \cdots d_n)$,其中 $d_j^{w+}=\max_i\{d_{ij}\}$.

设 $d_{ij}^{\omega-}=(d_1,d_2\ \cdots d_n)$,其中 $d_j^{w-}=\min_i\{d_{ij}\}$.

步骤 5 通过改变正数 p 的取值,可以调节运算的精度,但不影响最终结果,故取 $p=2$ 方便计算.备选方案 d_{ij}^{ω} 到正理想方案 $d_{ij}^{\omega+}$ 与负理想方案 $d_{ij}^{\omega-}$ 的距离分别为:

$$\begin{aligned}&D_i^+=D(d^{w+},d^w)=\\ &\sqrt{\frac{1}{3}\sum_i^n\{(T^{w+}-T_i^w)^2+(I^{w+}-I_i^w)^2+(F^{w+}-F_i^w)^2\}}\cdot\\ &D_i^-=D(d^{w-},d^w)=\\ &\sqrt{\frac{1}{3}\sum_i^n\{(T^{w-}-T_i^w)^2+(I^{w-}-I_i^w)^2+(F^{w-}-F_i^w)^2\}}\cdot\end{aligned}\ ,\tag{6}$$

步骤 6 相对贴近系数为:

$$Q_i=\frac{D_i^-}{D_i^++D_i^-}\left(i=1,2,\cdots,n\right),0\le Q_i\le 1\ .\tag{7}$$

分子分母同时除以 D_i^-,容易看出 D_i^+ 越小,D_i^- 越大,Q_i 就相对较大,方案越接近理想值.

步骤 7 按 Q_i 由大到小排列.

针对改进得分函数的 TOPSIS 决策方法,相关算法具有 7 个步骤.具体地,步骤 1 计算属性权重,步骤 2 计算加权决策矩阵,步骤 3 计算各决策得分函数,步骤 4 计算正理想方案 $d_{ij}^{\omega+}$ 和负理想方案 $d_{ij}^{\omega-}$,步骤 5 计算各方案 d_{ij}^{ω} 到正理想方案 $d_{ij}^{\omega+}$ 与负理想方案 $d_{ij}^{\omega-}$ 的距离,步骤 6 计算各方案的相对贴近系数,步骤 7 对方案进行排序.特别地,上述算法中的得分函数 S 替换为得分函数 S_1,S_2,S_3 时,则可以衍生出 3 种 TOPSIS 决策方法.

4 TOPSIS 决策方法的应用实例

本节使用一个备选方案多准则决策问题,说明依托得分函数提出的 TOPSIS 决策方法在多属性决策中

的应用,并通过对比分析不同方法来验证关于改进得分函数S的决策方法的合理性与有效性.

4.1　改进得分函数 TOPSIS 决策方法的计算呈现

有一家投资公司,想在 4 个备选的公司中投入一笔资金,但不知道如何选择使得这笔资金的投资成功的可能性最大.现给出 4 家备选公司:A_1为一家汽车公司、A_2为一家食品公司、A_3为一家电脑公司、A_4为一家保险公司.根据投资公司过往的经验,选择 6 个评估指标,分别为利润分析C_1、知识和业务分析C_2、客户分析C_3、环境分析C_4、风险分析C_5、成长性分析C_6.相关的单值中智集数据如表 1.

下面基于改进得分函数S,考虑相关的 TOPSIS 决策方法,具体算法的 7 个步骤实施如下.根据步骤 1,计算出单值中智集的属性权重值,如表 2 所示.按照步骤 2,把表 2 计算出的权重利用下述公式

$$D^w=(d_{ij}^w)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}=\left(T_{ij}^w,I_{ij}^w,F_{ij}^w\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}},\tag{8}$$

$$d_{ij}^w=(a_jT_{ij},b_j+I_{ij}-b_jI_{ij},c_j+F_{ij}-c_jF_{ij}),\tag{9}$$

进行加权得到单值中智集加权决策矩阵,如表 3 所示.按照步骤 3,根据改进得分函数S计算加权决策矩阵的得分函数值,如表 4 所示.按照步骤 4,根据得分函数表,确定正理想方案和负理想方案,如表 5 所示.按照步骤 5,根据公式(7)计算正负理想方案与加权决策之间的距离,再根据公式(8)计算各方案的相对贴近系数,如表 6 所示.最后,根据相对贴近系数大小$Q_3>Q_1>Q_4>Q_2$,对方案进行排序:$A_3>A_1>A_4>A_2$.所以,综合表现最好的公司是A_3,作为优化选择.

表 1　单值中智集评估指标决策

Table 1　Single-valued Neutrosophic sets evaluation index decision

备选公司	评估指标					
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	(0.864,0.136,0.081)	(0.853,0.147,0.092)	(0.800,0.200,0.150)	(0.704,0.296,0.241)	(0.823,0.177,0.123)	(0.864,0.136,0.081)
A_2	(0.667,0.333,0.277)	(0.727,0.273,0.219)	(0.667,0.333,0.277)	(0.744,0.256,0.204)	(0.652,0.348,0.293)	(0.608,0.392,0.336)
A_3	(0.880,0.120,0.067)	(0.887,0.113,0.064)	(0.834,0.166,0.112)	(0.779,0.256,0.204)	(0.811,0.189,0.109)	(0.850,0.150,0.092)
A_4	(0.667,0.333,0.277)	(0.735,0.265,0.195)	(0.768,0.232,0.180)	(0.727,0.273,0.221)	(0.791,0.209,0.148)	(0.808,0.192,0.127)

表 2　属性权重

Table 2　Attribute weights

属性权重	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
ω	(0.755,0.222,0.217)	(0.887,0.113,0.107)	(0.765,0.226,0.182)	(0.692,0.277,0.251)	(0.788,0.200,0.180)	(0.700,0.272,0.244)

表 3　评估指标加权决策

Table 3　The evaluation metrics weight the decision

d_{ij}^{ω}	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	(0.652,0.328,0.280)	(0.757,0.243,0.189)	(0.612,0.381,0.305)	(0.487,0.491,0.432)	(0.649,0.342,0.281)	(0.605,0.371,0.305)
A_2	(0.504,0.481,0.434)	(0.645,0.355,0.303)	(0.510,0.484,0.409)	(0.515,0.462,0.404)	(0.514,0.478,0.420)	(0.426,0.557,0.498)
A_3	(0.664,0.315,0.269)	(0.787,0.213,0.164)	(0.638,0.354,0.274)	(0.539,0.462,0.404)	(0.639,0.351,0.269)	(0.595,0.381,0.314)
A_4	(0.504,0.481,0.434)	(0.652,0.348,0.281)	(0.588,0.406,0.329)	(0.503,0.474,0.417)	(0.623,0.367,0.301)	(0.566,0.412,0.340)

表 4　各决策得分函数结果

Table 4　Results of each decision scoring function

S	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	0.820	0.886	0.790	0.680	0.816
A_2	0.690	0.807	0.699	0.707	0.699
A_3	0.829	0.904	0.811	0.718	0.813
A_4	0.690	0.815	0.769	0.695	0.797

表 5 正/负理想方案

Table 5 Positive/Negative ideal solution

理想方案	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$d_{ij}^{\omega+}$	(0.664,0.315,0.269)	(0.787,0.213,0.164)	(0.638,0.354,0.274)	(0.539,0.462,0.404)	(0.649,0.342,0.281)	(0.605,0.371,0.305)
$d_{ij}^{\omega-}$	(0.504,0.481,0.434)	(0.645,0.355,0.303)	(0.510,0.484,0.409)	(0.487,0.491,0.432)	(0.514,0.478,0.420)	(0.426,0.557,0.498)

表 6 备选方案距离及相对贴近系数

Table 6 Alternative distance and relative proximity coefficient

距离及系数	D_i^+	D_i^-	Q_i
A_1	0.05624	0.31564	0.84876
A_2	0.34329	0.02811	0.07587
A_3	0.01393	0.33837	0.96045
A_4	0.22075	0.20326	0.47938

4.2 多种决策方法的对比分析

为了验证本文所提方法的合理性和有效性,下面针对上述算例,考虑文献[7,17-19]所建决策方法以及基于得分函数S_1,S_2,S_3的决策方法[10-12],相关决策排序与结果如表 7.

表 7 不同决策方法的对比分析

Table 7 Comparative analysis of different decision methods

方法	排序	最优方案	最差方案
文献[7]	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3	A_2
文献[17]	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3	A_2
文献[18]	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3	A_2
文献[19]	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3	A_2
本文方法(得分函数S)	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3	A_2
得分函数S_1	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3	A_2
得分函数S_2	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3	A_2
得分函数S_3	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3	A_2

由表 7 可以得出,本文方法和文献[7,17-19]所建立的决策方法得到的最优结果相同,关于不同得分函数[10-12]得到的最优结果也相同,这可以验证改进得分函数的合理性及其决策的有效性.在机制上,利用得分函数来得到正理想方案和负理想方案比去观察真隶属函数值的最大值,假隶属函数和不确定隶属函数的最小值应用范围更广,因为比较各个方案的隶属函数值来区分限制了中智集的不确定性,对数值的选取要求较大,而用得分函数可以克服这一缺陷.总之,通过表 7 的对比分析,充分说明本文所提方法的有效性和合理性.

5 结论

本文针对单值中智集背景及其现有得分函数,主要构建一种改进得分函数,进而提出相应的 TOPSIS 决策方法并进行多属性决策.具体地,揭示现有得分函数缺点从而提出改进得分函数,并研究新得分函数的单调性、取值范围以及与三种旧得分函数的大小关系.其次依托改进得分函数来建立 TOPSIS 决策方法,设计相关实现算法.最后采用投资选择具体实例,对比分析多种决策方法,证实新决策方法的合理性与有效性.本文只在单值中智集中依托改进得分函数来建立 TOPSIS 决策方法,设计相关实现算法去进行多属性决策,但这种改进的方法可以推广,并结合其他多属性决策方法去讨论,这将是一个有意义的研究课题.

参考文献

[1]刘庆,化小会.一种基于 TOPSIS 法的单值中智多属性决策新方法[J].模糊系统与数学,2020,34(1):122-132.

[2]王茜,张贤勇,吕智颖.不完备决策信息系统的混合条件熵与多属性决策[J].系统工程理论与实践,2022,42(12):3401-3411.

[3]ZADEH L A.Fuzzy sets[J].Information and Control,1965,8(3):338-353.

[4]SMARANDACHE F.A unifying field in logics:neutrosophic Logic.Neutrosophy,neutrosophic Set,neutrosophic Probability[M].3rd ed.Pittsburgh:American Research Press,2003.

[5]WANG H B,SMARANDACHE F,ZHANG Y Q,et al.Single valued

neutrosophic sets[C].8th Joint Conference on Information Sciences, 2005:94-97.

[6] WANG H B, SMARANDACHE F, ZHANG Y Q, et al. Interval neutrosophic sets and logic: Theory and applications in computing[J]. Computer Science, 2005, 65(4):87-90.

[7] BISWAS P, PRAMANIK S, GIRI B C. TOPSIS method for multi-attribute group decision-making under single-valued neutrosophic environment[J]. Neural Computing and Applications, 2016, 27(3):727-737.

[8] SAHIN R, YIGIDER M. A multi-criteria neutrosophic group decision making method based TOPSIS for supplier selection[J]. Applied Mathematics & Information Sciences, 2016, 10(5):1843-1852.

[9] YE J. Improved cross entropy measures of single valued neutrosophic sets and interval neutrosophic sets and their multicriteria decision making methods[J]. Cybernetics and Information Technologies, 2015, 15(4):13-26.

[10] SAHIN R. Multi-criteria neutrosophic decision making method based on score and accuracy functions under neutrosophic environment[J]. Computer Science, 2014(12):2333-9721.

[11] PENG J J, WANG J Q, WANG J, et al. Simplified neutrosophic sets and their applications in multi-criteria group decision-making problems[J]. International Journal of Systems Science, 2016, 47(10):2342-2358.

[12] 叶万红,耿娟娟,徐东胜.基于聚合单值中智集的多属性决策新方法及其应用[J].模糊系统与数学,2022,36(4):124-130.

[13] 卫村.基于中智数的多属性决策方法研究[D].成都:西南石油大学,2019.

[14] 杨海龙,任欢欢,焦丽.单值中智信息下的一种新型三支决策模型[J].陕西师范大学学报(自然科学版),2022,50(3):1-6+141.

[15] MAJUMDAR P, SAMANTA S K. On similarity and entropy of neutrosophic sets[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2014, 26(3):1245-1252.

[16] 李鹏,霍礼勇,刘菊.基于新记分函数与熵的犹豫中智 VIKOR 方法[J].江苏科技大学学报(自然科学版),2020,34(3):60-68.

[17] ELHASSOUNY A, SMARANDACHE F. Neutrosophic-simplified-TOPSIS Multi-Criteria Decision-Making using combined Simplified-TOPSIS method and Neutrosophics[C]//2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems(FUZZ-IEEE). 2016. Vancouver, BC, Canada: EEE, 2016:2468-2474.

[18] YE J. Single valued neutrosophic cross-entropy for multicriteria decision making problems[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(3):1170-1175.

[19] YE J. Multicriteria decision-making method using the correlation coefficient under single-valued neutrosophic environment[J]. International Journal of General Systems, 2013, 42(4):386-394.

(责任编辑:张阳,殷锋,付强,和力新,肖丽;英文编辑:周序林,郑玉才)