

DOI:10.19479/j.2095-719x.2404254

基于几种有限元时域积分法的三角桁架结构 位移响应辨识准确性分析

杨宽信¹, 刘思南²

(1. 碧桂园集团房地产广西区域, 广西 贵港 537399; 2. 天津城建大学, 天津 300384)

摘要: 本文推导了四种有限元时域积分法, 并将其应用于三角桁架结构, 进行位移识别响应的计算模拟和准确性分析。采用有限元法分别建立刚度矩阵和质量矩阵, 确定时间步长大小, 并根据模态叠加法的解来确定不同时域积分法的自由度位移误差计算。结果显示, 通常情况下时间步长系数 $\tau=1/3$ 可以提供最佳的准确性。与其他方法相比, Wooram Kim 两阶段显式时域积分法能够保证较高的位移识别准确性, 在拐点处呈现小超调量, 使其在模拟计算中具有较高的稳定性。

关键词: 时域积分法; 结构动力学; 三角形桁架结构; 有限元法

中图分类号: TU311.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 2095-719X(2024)04-0254-07

Accuracy Analysis of Displacement Response Identification in Truss Structure Using Finite Element Time-domain Integration Methods

YANG Kuanxin¹, LIU Sinan²

(1. Guangxi Area of Country Garden Group Real Estate, Guigang 537399, China; 2. Tianjin Chengjian University, Tianjin 300384, China)

Abstract: This article derived four finite element time-domain integration methods and applied them to calculate and analyze the accuracy of displacement identification response in triangular truss structures through simulation. The stiffness matrix and mass matrix were established separately by using the finite element method, and the size of the time step was determined. The degree of freedom displacement error calculation of different time-domain integration methods was determined based on the solution of the modal superposition method. The results show that under normal circumstances, a time step coefficient of $\tau=1/3$ can provide the best accuracy. Compared with other methods, Wooram Kim's two-stage explicit time-domain integration method can ensure higher accuracy of displacement identification, present small overshoot at inflection points, and have higher stability in simulation calculations.

Key words: time integration method; structure dynamics; triangular truss structure; finite element method

有限元方法已经被广泛应用于结构动力学中, 解决空间结构的离散问题^[1-2]。与空间离散化类似, 应用时域积分需要对时间离散化, 然后积分得到每个有限元的运动解, 此过程被称为时域积分^[3]。不同的时间离散及积分方法决定了不同的时域积分法。针对不同的实际应用场景, 广大专家学者开发了多种显式和隐式时域积分方法, 但都具有一定的局限性。时域积分法的选择取决于很多应用条件, 如采用有限元的方法和所解决动态问题的特征。隐式方法的主要优点为它们是无条件稳定的, 其精度控制允许其采用更大的时间步长^[4]。在显式方法中, 从时间 t 的平衡条件求解时间

$t+1$ 的解 $u(t+1)$, 而不使用时间 t 的平衡条件。相反, 隐式方法是使用时间 $t+1$ 时的平衡条件来求解时间 $t+1$ ^[5]。显式方法的主要优点是容易实现, 并且只需要少量存储容量。因此, 显式方法更广泛地应用于大型系统的分析, 如波浪传播和冲击问题^[6]。此外, 显式方法避免迭代和收敛问题, 所以通常用于具有许多自由度的高频问题, 对于这些问题, 迭代成本高, 且收敛问题频繁^[7]。然而, 在分析中不能超过临界时间步长 Δt_{cr} ^[8]。因此, 有必要融合结构动力学计算, 系统分析现有典型时域积分法在不同结构系统中的准确性和稳定性。

本文将时间积分离散推导出有限元时间积分法,

收稿日期: 2023-02-27; 修订日期: 2023-04-15

作者简介: 杨宽信(1994—), 男, 天津人, 硕士, 工程师。

并把几种典型时域积分方法应用于三角形桁架结构中,系统对比和验证它们对自由度位移识别的准确性和稳定性。

1 有限元时域积分法推导

1.1 显式时域积分法

1.1.1 中心差分法(CDM)

二阶中心差分法可以提供相对较高的精度和稳定性,但它需要较小的时间步长.中心差分的方法公式参见文献[9].运用代入法, $\dot{\mathbf{u}}_i$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}_i$ 可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{2\Delta t}(\mathbf{u}_{i+\Delta t} - \mathbf{u}_{i-\Delta t}) \\ \ddot{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{(\Delta t)^2}(\mathbf{u}_{i+\Delta t} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-\Delta t}) \end{cases} \quad (1)$$

$\mathbf{u}_{i-\Delta t}$ 的解可以表示为

$$\mathbf{u}_{i-\Delta t} = \mathbf{u}_i - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (2)$$

考虑到非线性方程的离散化较难实现,而中心差分法是依靠线性化的差分方法进行时间离散化,因此该方法对于非线性方程的求解效果可能不够理想。

1.1.2 Wooram Kim 两阶段显式积分法

(1) 方法推导

Wooram Kim 在采集法、位移和速度矢量系统近似的基础上提出了一种精确的两阶段显式积分法,以克服现有显式方法的缺点^[10].其主要优点是:如果求解问题与速度无关,则可以提供四阶精度,而无需复杂的计算.在桥梁和高层建筑的地震响应分析中,该方法可以模拟大型结构在地震载荷下的响应以评估结构安全性.在建筑结构设计中,可用于分析结构的固有频率、振型及变形模式等重要参数,进行非线性破坏性分析以及影响结构抗震性能分析。

为了使结构动力学常微分方程在时间上进行离散,位移矢量在时间区间 $t_s \leq t \leq t_s + \Delta t$ 上可被近似地表示为

$${}^k \bar{\mathbf{u}}(\bar{t}) = \bar{t}^0 \cdot {}^k \mathbf{c}_0 + \bar{t}^1 \cdot {}^k \mathbf{c}_1 + \cdots + \bar{t}^{k+1} \cdot {}^k \mathbf{c}_{k+1} \quad (3)$$

在 $t = t_s + \tau \Delta t$,位移、速度和加速度矢量可以分别表示为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} = \mathbf{u}_i + \tau \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{1}{2}(\tau \Delta t)^2 \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{i+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_i + \tau \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{i+\Delta t} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_{i+\Delta t}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{i+\Delta t}, t_s + \tau \Delta t) \end{cases} \quad (4)$$

因此,在 $t = t_s + \Delta t$ 处的总力矢量可以表示为

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_{i+\Delta t}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{i+\Delta t}, t_s + \Delta t) = \mathbf{f}_{i+\Delta t} - \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} - \mathbf{C} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{i+\Delta t} \quad (5)$$

位移和速度矢量可以修正为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{i+\Delta t} = \mathbf{u}_i + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left(\frac{4\tau-1}{6\tau} \ddot{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{6\tau(\tau-1)} \ddot{\mathbf{u}}_{i+\tau\Delta t} + \frac{2\tau-1}{6(\tau-1)} \ddot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} \right) \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_i \Delta t \left(\frac{3\tau-1}{6\tau} \ddot{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{6\tau(\tau-1)} \ddot{\mathbf{u}}_{i+\tau\Delta t} + \frac{3\tau-2}{6(\tau-1)} \ddot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} \right) \end{cases} \quad (6)$$

(2) 系数 τ 的确定

完全离散关系可以表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i+\Delta t} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \dot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \\ l_{31} & l_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{i+\tau\Delta t} \\ f_{i+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (7)$$

通过计算 $t = t_s + 2\Delta t$ 和 $t = t_s + \Delta t$ 之间完全离散关系,得到第一个离散关系为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i+2\Delta t} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+2\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+2\Delta t} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i+\Delta t} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} \end{bmatrix} + \mathbf{L} \begin{bmatrix} f_{i+(1+\tau)\Delta t} \\ f_{i+2\Delta t} \end{bmatrix} \quad (8)$$

通过计算 $t = t_s + \Delta t$ 和 $t = t_s$ 之间的完全离散关系,得到第二个离散关系为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i+\Delta t} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i+\Delta t} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \dot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_i \end{bmatrix} + \mathbf{L} \begin{bmatrix} f_{i+\tau\Delta t} \\ f_{i+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (9)$$

通过计算 $t = t_s$ 和 $t = t_s - \Delta t$ 之间的完全离散关系,得到第三个离散关系为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \dot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_i \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i-\Delta t} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i-\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{i-\Delta t} \end{bmatrix} + \mathbf{L} \begin{bmatrix} f_{i+(\tau-1)\Delta t} \\ f_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

设 $f(t) = 0$,在相邻位移下的离散差分表达式为

$$\frac{1}{\Delta t^2}(\mathbf{u}_{i+2\Delta t} - 2\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_{i+\Delta t} + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_i - \mathbf{A}_3 \mathbf{u}_{i-\Delta t}) = 0 \quad (11)$$

通过将精确解 $\mathbf{u}(t_s + 2\Delta t)$, $\mathbf{u}(t_s + \Delta t)$, $\mathbf{u}(t_s)$ 和 $\mathbf{u}(t_s - \Delta t)$ 代入式(11)代替 $\mathbf{u}_{i+2\Delta t}$, $\mathbf{u}_{i+\Delta t}$, \mathbf{u}_i 和 $\mathbf{u}_{i-\Delta t}$,确定的局部截断误差可以表示为

$$e_\tau^{\text{proposed}} = \frac{1}{\Delta t^2}(\mathbf{u}(t_s + 2\Delta t) - 2\mathbf{A}_1 \mathbf{u}(t_s + \Delta t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}(t_s) - \mathbf{A}_3 \mathbf{u}(t_s - \Delta t)) \quad (12)$$

式(12)表明,该方法在 $\xi \neq 0$ 时具有二阶精度.若 $\xi = 0$,则局部截断误差为

$$e_\tau^{\text{proposed}} = \frac{3\tau-1}{72(\tau-1)} \omega^4 \dot{\mathbf{u}}_0 \Delta t^3 + O(\Delta t^4) \quad (13)$$

式(13)表明,所提出的方法对于 τ 的所有允许值都是三阶精确的.设 $\tau = 1/3$ 和 $\xi = 0$,局部截断误差可

以表示为

$$e_{\tau}^{\text{proposed}} = \frac{1}{360} \omega^6 u_0 \Delta t^4 + O(\Delta t^5) \quad (14)$$

式中： ω 为固有频率，该方法应用于无阻尼系统时，选取 $\tau = 1/3$ 可以提供更高的精度。

因此，在 $t_s \leq t \leq t_s + \Delta t$ 区间内，Wooram Kim 显式时域积分法在 $\tau = 1/3$ 时可以表示为

$$\begin{cases} \bar{u}_{t+\frac{\Delta t}{3}} = u_t + \left(\frac{\Delta t}{3}\right) \dot{u}_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{3}\right)^2 \ddot{u}_t \\ \dot{\bar{u}}_{t+\frac{\Delta t}{3}} = \dot{u}_t + \left(\frac{\Delta t}{3}\right) \ddot{u}_t \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \ddot{u}_{t+\frac{\Delta t}{3}} = M^{-1} f(\bar{u}_{t+\frac{\Delta t}{3}}, \dot{\bar{u}}_{t+\frac{\Delta t}{3}}, t_s + \frac{\Delta t}{3}) \\ \bar{u}_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \dot{u}_t + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{u}_{t+\frac{\Delta t}{3}} \\ \dot{\bar{u}}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \Delta t \left(\frac{3}{2} \ddot{u}_{t+\frac{\Delta t}{3}} - \frac{1}{2} \ddot{u}_t \right) \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \ddot{u}_{t+\Delta t} = M^{-1} f(\bar{u}_{t+\Delta t}, \dot{\bar{u}}_{t+\Delta t}, t_s + \Delta t) \\ u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \dot{u}_t + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left(\frac{1}{6} \ddot{u}_t + \frac{3}{4} \ddot{u}_{t+\frac{\Delta t}{3}} + \frac{1}{12} \ddot{u}_{t+\Delta t} \right) \\ \dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \Delta t \left(\frac{3}{4} \ddot{u}_{t+\frac{\Delta t}{3}} + \frac{1}{4} \ddot{u}_{t+\Delta t} \right) \end{cases} \quad (17)$$

可以看出，Wooram Kim 显式时域积分法需要评估 $M^{-1}f$ 两次。

1.2 隐式时域积分法

Bathe-Baig 法、Newmarks 法是结构工程领域常用的时域积分方法^[11-12]。隐式方法的主要优点为无条件稳定，其精度控制允许更大的时间步长。

1.2.1 Bathe-Baig 法

设解在时间上是已知的，要求在 $t + \Delta t$ 上的解。 $t + \gamma \Delta t$ ($\gamma \in (0, 1)$) 为时间 t 和时间 $t + \Delta t$ 之间的一个瞬间。通过在时间区间 $\gamma \Delta t$ 内使用梯形法则，可以设为

$$\begin{cases} \dot{u}_{t+\gamma\Delta t} = \dot{u}_t + \frac{\ddot{u}_t + \ddot{u}_{t+\gamma\Delta t}}{2} \gamma \Delta t \\ u_{t+\gamma\Delta t} = u_t + \frac{\dot{u}_t + \dot{u}_{t+\gamma\Delta t}}{2} \gamma \Delta t \end{cases} \quad (18)$$

在时间上控制的半离散运动方程在时间 $t = t + \gamma \Delta t$ 上可以表示为

$$M_{t+\gamma\Delta t} \ddot{u} + C_{t+\gamma\Delta t} \dot{u} = N_{t+\gamma\Delta t} - f_{t+\gamma\Delta t} \quad (19)$$

则可以得到

$$\begin{aligned} & \left(K_{t+\gamma\Delta t} + M \frac{4}{\gamma^2 \Delta t^2} + C \frac{2}{\gamma \Delta t} \right) \Delta u^i = \\ & f_{t+\gamma\Delta t} - N_{t+\gamma\Delta t}^{(i-1)} - M \left(\frac{4}{\gamma^2 \Delta t^2} (u_{t+\gamma\Delta t}^{(i-1)} - u_t) - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{4}{\gamma \Delta t} \dot{u}_t - \ddot{u}_t \right) - C \left(\frac{2}{\gamma \Delta t} (u_{t+\gamma\Delta t}^{(i-1)} - u_t) - \dot{u}_t \right) \quad (20)$$

用位移表示的速度和用速度表示的加速度表示为

$$\begin{cases} \dot{u}_{t+\Delta t} = c_1 u_t + c_2 u_{t+\gamma\Delta t} + c_3 u_{t+\Delta t} \\ \ddot{u}_{t+\Delta t} = c_1 \dot{u}_t + c_2 \dot{u}_{t+\gamma\Delta t} + c_3 \dot{u}_{t+\Delta t} \end{cases} \quad (21)$$

则式(20)可以重写为

$$\begin{aligned} & \left(K_{t+\gamma\Delta t}^{(i-1)} + c_3 c_3 M + c_3 C \right) \Delta u^i = \\ & f_{t+\Delta t} - N_{t+\Delta t}^{(i-1)} - M \left(c_1 \ddot{u}_t + c_2 \ddot{u}_{t+\gamma\Delta t} + c_3 c_1 u_t + c_3 c_2 u_{t+\gamma\Delta t} + \right. \\ & \left. c_3 c_3 u_{t+\gamma\Delta t}^{(i-1)} \right) - C \left(c_1 \dot{u}_t + c_2 \dot{u}_{t+\gamma\Delta t} + c_3 \dot{u}_{t+\gamma\Delta t}^{(i-1)} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

1.2.2 Newmarks 法

Newmarks 法基于

$$\begin{cases} \dot{u}_{t+1} = \dot{u}_t + [(1-\gamma)\Delta t] \ddot{u}_t + (\gamma \Delta t) \ddot{u}_{t+1} \\ u_{t+1} = u_t + (\Delta t) \dot{u}_t + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2] \ddot{u}_t + \\ \quad [\beta(\Delta t)^2] \ddot{u}_{t+1} \end{cases} \quad (23)$$

式中：参数 β 和 γ 定义了加速度在一个时间步长中的变化，它们决定了稳定性和准确性特征。

通常， $\gamma = \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$ 。在 Newmarks 法中，需要先计算静态刚度矩阵 K 、质量矩阵 M 和阻尼矩阵 C ，并指定其参数。

通过简化计算，可得以下积分常数

$$b_1 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}, b_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}, b_3 = \beta - \frac{1}{2}, b_4 = \gamma \Delta t b_1,$$

$$b_5 = 1 + \gamma \Delta t b_2, b_6 = \Delta t (1 + \gamma b_3 - \gamma)$$

有效载荷向量计算的表达式为

$$\begin{aligned} \bar{f}_{t+\Delta t} = & f_{t+\Delta t} + M(a_0 u_t + a_2 \dot{u}_t + a_3 \ddot{u}_t) + \\ & C(a_1 u_t + a_4 \dot{u}_t + a_5 \ddot{u}_t) \end{aligned} \quad (24)$$

进而得到加速度和速度的表达式为

$$\begin{cases} \ddot{u}_{t+\Delta t} = a_0 (u_{t+\Delta t} - u_t) - a_2 \dot{u}_t - a_3 \ddot{u}_t \\ \dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + a_0 \ddot{u}_t - a_3 \ddot{u}_{t+\Delta t} \end{cases} \quad (25)$$

1.3 模态叠加法

模态叠加法是评价线性结构系统响应的有效方法。为了对比不同时域积分法计算模拟的自由度位移，本文将模态叠加法的解作为精确解。

任意位移矢量 u 的模态表达式为

$$u(t) = \sum_{r=1}^N \Phi_r q_r = \Phi q(t) \quad (26)$$

根据运动方程，将耦合方程转化为非耦合方程，可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^N M \Phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N K \Phi_r q_r(t) + \\ & \sum_{r=1}^N C \Phi_r \dot{q}_r(t) = f(t) \end{aligned} \quad (27)$$

考虑到存在正交关系和经典阻尼系统模态等特性,可以得到

$$M_p \ddot{q}_n(t) + C_p \dot{q}_n + K_p q_n(t) = f_p(t) \quad (28)$$

通过采用 Duhamel 积分,响应 q_n 可以表示为

$$q_n(t) = e^{-\xi_n \omega_n t} [q_n(0) \cos \omega_d t + \frac{\dot{q}_n(0) + \xi_n \omega_n q_n(0)}{\omega_d} \sin \omega_d t + \frac{1}{\omega_d} \int_0^t f_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau] \quad (29)$$

式中: $\omega_d = \sqrt{(1-\xi^2)} \omega_n$, ω_n 是第 n 阶模态的固有频率. 如果将初始条件定义为: $q_n = 0, \dot{q}_n = 0$ 则可以得到

$$q_n(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t f_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau \quad (30)$$

通过使用卷积法,可以得到 Duhamel 积分的解. 再将各模态的响应变换为物理坐标,得到结构的运动状态.

2 三角桁架结构计算模拟

利用上述几种有限元时域积分法,对三角形桁架系统进行计算模拟,以分析不同方法对自由度位移准确性问题的效果. 图 1 为典型的无阻尼三角桁架结构的力学模型,桁架单元①和③的长度均为 1.0 m. 已知该桁架系统具有以下特性:

$$E = 220 \text{ GPa}, A = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\rho = 7.85 \text{ kg/m}^3$$

其中, E 为桁架材料的弹性模量; A 为振幅矩阵; ρ 为材料密度.

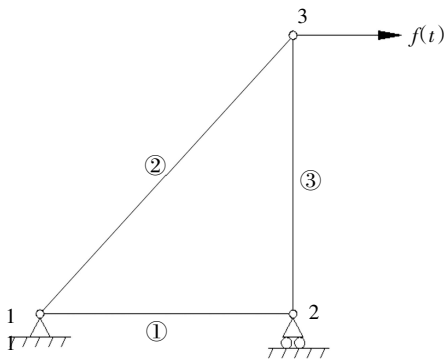


图 1 三角桁架结构力学模型示意图

定义所有节点移动所需的独立位移数量为自由度. 如图 1 所示,位移 x_1, y_1 和 y_2 被约束. 因此,该三

$$m^e = \frac{A \cdot \rho \cdot l}{6} \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & c & s & c \end{bmatrix} = \frac{A \cdot \rho \cdot l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

角桁架系统的自由度数为 3, 自由度位移分别为位移 x_1, x_2 和 y_3 .

2.1 力学模型

考虑到一个单元在时间 t 的静态平衡,可以得到控制半离散运动方程

$$F^l(t) + F^D(t) + F^{INT}(t) = F^{EXT}(t) \quad (31)$$

式中: $F^l(t)$ 是惯性力,根据达朗贝尔原理 $F^l(t) = M\ddot{u}$;

$F^D(t) = C\dot{u}$ 是阻尼力; $F^{INT}(t)$ 是外部载荷, $F^{INT}(t) = Ku$.

因此,控制半离散方程可以改写为

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t) \quad (32)$$

假设该桁架系统为无阻尼系统,所以控制半离散方程为

$$M\ddot{u} + Ku = f(t) \quad (33)$$

式中: M 为质量矩阵; C 为阻尼矩阵; K 为刚度矩阵; $f(t)$ 为外部载荷向量.

2.1.1 刚度矩阵

通过能量法,一个桁架单元的刚度矩阵可以表示为

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

式中: l 和 m 是桁架单元的方向余弦. 将上述方程应用于 3 个单元,可以得到单元 1 至单元 3 的结构刚度矩阵,进而可以得到该三角桁架系统的结构刚度矩阵

$$K = \begin{bmatrix} 11.911 & 3.111 & -8.8 & 0 & -3.111 & -3.111 \\ 3.111 & 3.111 & 0 & 0 & -3.111 & -3.111 \\ -8.8 & 0 & 8.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.8 & 0 & -8.8 \\ -3.111 & -3.111 & 0 & 0 & 3.111 & 3.111 \\ -3.111 & -3.111 & 0 & -8.8 & 3.111 & 11.911 \end{bmatrix} \times 10^7 \quad (35)$$

在考虑边界条件时,结构刚度矩阵可以进一步简化为

$$K = \begin{bmatrix} 8.8 & 0 & 0 \\ 0 & 3.111 & 3.111 \\ 0 & 3.111 & 11.911 \end{bmatrix} \times 10^7 \quad (36)$$

2.1.2 质量矩阵

质量矩阵的计算为

式中: $c = \cos\theta$; $s = \sin\theta$.

因此,该桁架系统单元的结构质量矩阵可以表示为

$$m = \frac{A \cdot \rho \cdot l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

将上述方程应用于3个单元,可以得到单元1至单元3的结构质量矩阵

$$\begin{aligned} m^1 &= 0.523 \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ m^2 &= 0.74 \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ m^3 &= 0.523 \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

因此,可以得到结构质量矩阵

$$M = \begin{bmatrix} 2.526 & 0 & 0.523 & 0 & 0.74 & 0 \\ 0 & 2.526 & 0 & 0.523 & 0 & 0.74 \\ 0.523 & 0 & 2.092 & 0 & 0.523 & 0 \\ 0 & 0.523 & 0 & 2.092 & 0 & 0.523 \\ 0.74 & 0 & 0.523 & 0 & 2.526 & 0 \\ 0 & 0.74 & 0 & 0.523 & 0.523 & 2.526 \end{bmatrix} \quad (40)$$

通过考虑主动自由度,结构质量矩阵可以简化为

$$M = \begin{bmatrix} 2.092 & 0.523 & 0 \\ 0.523 & 2.526 & 0 \\ 0 & 0 & 2.526 \end{bmatrix} \quad (41)$$

2.1.3 外加激振力

作用于节点3处的外加激振力 $f(t)$ 可以表示为

$$f(t) = 400\sin(5000\pi t) \quad (42)$$

2.2 三角桁架结构位移响应计算

2.2.1 时间步长的确定

确定时间步长的大小是影响时域积分法准确性的关键因素之一.对于显式积分法,其时间步长必须低于临界时间步长,否则解将呈指数增长^[13].对于隐式积分法,由于其是无条件稳定的,因此时间步长可能会很大,而不受临界时间步长的限制.确定时间步长时,必须考虑 Courant-Friedrichs-Levy(CFL)条件^[14],时

间步长的大小应满足.其中 $\Delta t \leq C\Delta x/v$,其中 C 为 CFL 数, v 为最大波速, Δx 为长度间隔.

通过对单个单元的最大特征值估计,可以得到有限元分析中稳定性的充分条件.如果使用集中质量来形成质量矩阵,那么可以得到

$$\omega_{\max}^h = \frac{2c}{h} \quad (43)$$

式中: h 为单元长度; $c = \sqrt{E/\rho}$ 为条形波速.因此,中心差分法的临界时间步长为

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} = \frac{c}{h} \quad (44)$$

式中: ω_{\max} 为整个有限元装配的最大特征频率.找到整个结构的最大特征频率成本太高,因此使用质量最小的单元来估算时间步长的临界值.

如果使用一致质量矩阵,可以得到

$$\omega_{\max}^h = \frac{2\sqrt{3}c}{h} \quad (45)$$

关键步长可以表示为

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{3}c} \quad (46)$$

实现自适应时间步长的精确方法是采取原始步长的一半来检查是否存在显著的差异.图2描述了根据频率来选择时间步长大小的过程.

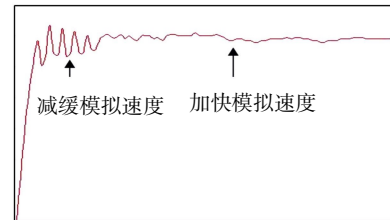


图2 自适应时间步长

快速傅里叶变换可以将信号从时域向频域转换为分段正弦和余弦信号^[15].根据最大频率,可得到有效时间步长.选取的时间步长大小表示为

$$\Delta T = 1/(25FH) \quad (47)$$

式中: FH 是最大频率.

对于无阻尼三角桁架系统,本文主要考虑了中心差分法的临界时间步长和最大频率的限制.激振力最大频率为 2500 Hz,因此

$$\Delta T = \frac{1}{25FH} = 1.6 \times 10^{-5} \quad (48)$$

除了系统中的单元长度外,每个单元质量是均匀分布的,所以采用最短单元来计算时间步长的临界值.该系统中最短单元是单元1和单元3.可以得到

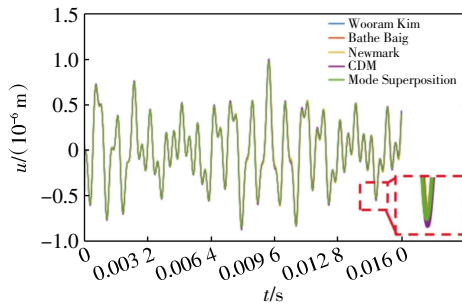
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8.8 \times 10^7}{0.523}} = 12971.508 \quad (49)$$

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} = \frac{2}{12\,971.508} = 1.541 \times 10^{-4} \quad (50)$$

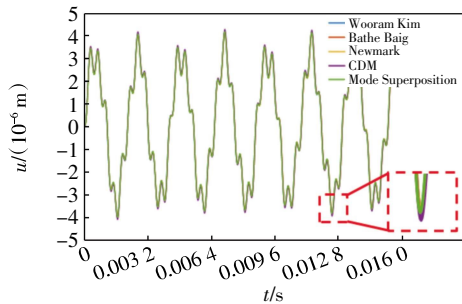
因此,对于该桁架系统,时间步长的大小被确定为 1.6×10^{-5} .

2.2.2 位移响应计算

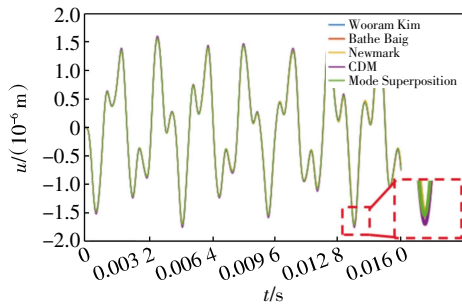
图3显示了采用几种有限元时域积分法进行三角桁架结构模拟计算得到的3个自由度位移响应情况.上述有限元时域积分法在3个自由度的位移曲线均表现出相似性,说明几种时域积分法对于外力的响应方面表现出相似的稳态响应特性.



(a) 第一自由度位移



(b) 第二自由度位移



(c) 第三自由度位移

图3 3个自由度的位移响应

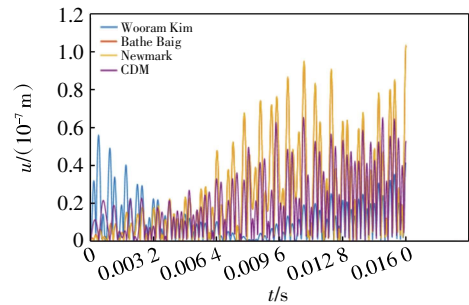
2.3 自由度位移响应误差计算

本文将模态叠加法的解作为精确解来计算不同时间域积分法的自由度位移误差.误差定义为

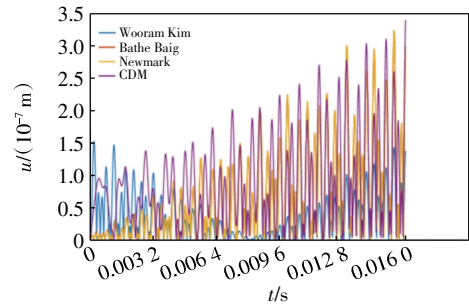
$$\text{error} = |u_{\text{numerical}} - u_{\text{exact}}| \quad (51)$$

图4显示了采用几种时域积分法进行三角桁架结构模拟计算得到的3个自由度位移误差响应情况.几种时域积分法明显不同于自由度位移特征.如图4a

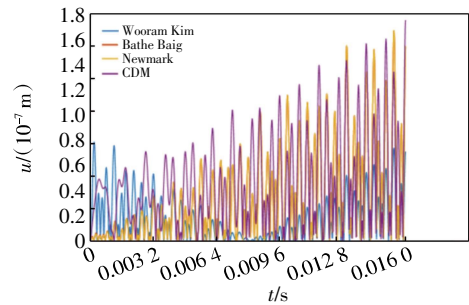
所示,在第一自由度位移误差曲线中可以明显看出Newmarks法的位移误差最大,而Wooram Kim两阶段显式时域积分法在开始时呈现出较高误差,但在系统趋于稳定后的误差最低.如图4b所示,在第二自由度位移误差曲线中几种方法计算得到的自由度位移误差均高于第一自由度.其中,CDM法与Newmarks法的位移误差相对更高,而Wooram Kim两阶段显式时域积分法的位移误差最低,虽然在开始时表现出较高的误差,但误差随着系统的稳定而明显降低.如图4c所示,第三自由度上的位移误差曲线仍呈现相似的趋势.



(a) 第一自由度位移误差



(b) 第二自由度位移误差



(c) 第三自由度位移误差

图4 3个自由度的位移响应误差

针对三角桁架系统,Wooram Kim两阶段显式时域积分法初始阶段表现出不稳定的情况,但第二阶段稳定后能够准确计算系统的位移及其误差.虽然Wooram Kim两阶段显式时域积分法在初始阶段需要一些时间才能变得更加稳定和准确,但能够为该三角桁架系统提供更加准确的解决方案.而Newmarks法在三个自由度中均表现出较差的准确性,因此并不适用于类似

的三角桁架结构。

几种时域积分法的超调量对比情况如图5所示。从第一个拐点处可以发现，Wooram Kim 两阶段显式时域积分法的超调很小，这使得该方法在计算模拟中表现更加稳定。

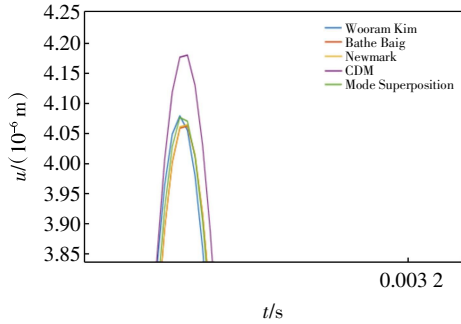


图5 几种时域积分法的超调量对比

3 结论

本文将几种典型的有限元时域积分方法应用于三角桁架结构的自由度位移及其误差的计算模拟。采用有限元法建立了刚度矩阵和质量矩阵，采用中心差分法的临界时间步长来确定时间步长的大小，并将模态叠加法的解作为精确解来计算不同时域积分法的自由度位移误差。从而得出以下结论：

(1) 通过分析 Wooram Kim 两阶段显式积分法在不同结构系统中的稳定性和准确性，可以得出在通常情况下， $\tau=1/3$ 可以提供最佳的准确性，为工程应用提供有价值的指导。

(2) Wooram Kim 两阶段显式时域积分法应用于三角桁架结构的计算模拟，能保证相对较高的位移识别准确性和稳定性。而其他方法对于三角桁架结构系统的准确性表现差异较大。

(3) 与其他几种方法相比，Wooram Kim 两阶段显式时域积分法在拐点处呈现小超调量，使其在模拟计算中具有较高的稳定性。

参考文献：

[1] 孟宇,毛毳,吴素琼,等.钢筋混凝土静力等效简化模型的数值模拟[J].天津城市建设学院学报,2011,17(1):21-

24.
 [2] 诸德超,李敏.结构弹性碰撞分析三种隐式时间积分法结果的比较[J].航空报,1998(4):10-16.
 [3] BAJER C. Time integration methods—still questions[J]. Polish Academy of Science, 2022, 1: 45-54.
 [4] KIM W. High-order explicit time integration methods for numerical analyses of structural dynamics[J]. Solids Structure, 2019, 16: 199848098.
 [5] CHOPRA A K. Dynamics of structures: theory and applications to earthquakes engineering[M]. 3rd ed. NJ: Prentice Hall, 2007.
 [6] CHANG S Y. Improved implicit method for structural dynamics[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133: 748.
 [7] NOELS L, STAINIER L, PONTHOT J P. Combined implicit/explicit time-integration algorithms for the numerical simulation of sheet metal forming[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 168: 331-339.
 [8] AHIRWAR P, DUBEY G. Response of structural dynamics by wilson method—A review[J]. International Journal for Research in Applied Science & Engineering, 2017, 5: 1-3.
 [9] DOKAINISH M A, SUBBARAJ K. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—I. Explicit methods[J]. Computers and Structures, 1989, 32(6): 1371-1386.
 [10] BATHE K J. Finite element procedures [M]. 2nd ed. Boston: Krieger Publishing Company, 2014.
 [11] HULBERT G M, CHUNG J. The unimportant of the spurious root of time integration algorithms for Structural Dynamics[J]. Communication in Numerical Methods in Engineering, 1994, 10(8): 591-597.
 [12] KIM W, LEE J H. An improved explicit time integration method for linear and nonlinear structural dynamic [J]. Computers and Structures, 2018, 26: 42-53.
 [13] WUBS F W. Stabilization of explicit methods for hyperbolic partial differential equations [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1986, 6(9):641-657.
 [14] LANEY C B. Computational Gasdynamics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
 [15] 张祥,毛毳,刘磊,等.梯形截面斜拉桥竖向涡振分析数值模拟方法比较[J].天津城建大学学报,2019,25(5): 311-316.