

刘洪涛,梁嘉璐,韩子俊,等. 基于 Drucker-Prager 准则的三维应力场下围岩塑性区近似解[J]. 矿业科学学报, 2024, 9(6): 909-920. DOI: 10.19606/j.cnki.jmst.2024924

LIU Hongtao, LIANG Jialu, HAN Zijun, et al. Approximate solution of plastic zone in surrounding rock under three-dimensional stress field based on Drucker-Prager strength criterion[J]. Journal of Mining Science and Technology, 2024, 9(6): 909-920. DOI: 10.19606/j.cnki.jmst.2024924

## 基于 Drucker-Prager 准则的三维应力场下 围岩塑性区近似解

刘洪涛<sup>1,2</sup>, 梁嘉璐<sup>1,2</sup>, 韩子俊<sup>1,2</sup>, 刘勤裕<sup>1,2</sup>, 乔钟瑾<sup>1</sup>

1. 中国矿业大学(北京)能源与矿业学院, 北京 100083;
2. 煤炭行业巷道支护与围岩控制工程研究中心, 北京 100083

**摘要:**为了研究三维应力场下巷道围岩的稳定性,基于 Drucker-Prager 准则,以弹塑性力学为理论基础,通过引入轴向应力解推导了三维应力场下的巷道围岩塑性区边界方程,对不同应力场条件下的围岩塑性区形态及尺寸展开分析,对比分析了巷道围岩的内聚力、内摩擦角、泊松比和巷道半径变化的条件下,5种 Drucker-Prager 系列屈服准则对塑性区形态及尺寸的影响,并基于演化特性提出实际工程意义。结果表明:水平侧压的增减对巷道围岩的塑性区形态影响程度较大,过高或过低的水平侧压会使巷道围岩呈蝶形扩展;轴向侧压的增减对巷道围岩的塑性区形态影响较小,对围岩的塑性区尺寸影响较大,相同水平侧压下,不同轴向侧压会使围岩的塑性区尺寸变化呈碗状发展;内聚力、内摩擦角和巷道半径变化时,不同 Drucker-Prager 准则下巷道围岩塑性区尺寸变化规律具有一致性,选取不同 Drucker-Prager 准则会对巷道围岩塑性区的计算结果产生影响。

**关键词:**塑性区;蝶形破坏;Drucker-Prager 准则;三维应力场;巷道支护

中图分类号:TD 32

文献标志码:A

文章编号:2096-2193(2024)06-0909-12

## Approximate solution of plastic zone in surrounding rock under three-dimensional stress field based on Drucker-Prager strength criterion

LIU Hongtao<sup>1,2</sup>, LIANG Jialu<sup>1,2</sup>, HAN Zijun<sup>1,2</sup>, LIU Qinyu<sup>1,2</sup>, QIAO Zhongjin<sup>1</sup>

1. School of Energy and Mining Engineering, China University of Mining and Technology-Beijing, Beijing 100083, China;
2. Research Center of Roadway Support and Surrounding Rock Control Engineering in Coal Industry, Beijing 100083, China

**Abstract:** This study proposes to address the stability of roadway surrounding rock under three-dimensional stress field based on the Drucker-Prager criterion and the theory of elastic-plastic mechanics. Specifically, we deduced the boundary equation of plastic zone of roadway surrounding rock under three-dimensional stress field by introducing the axial stress solution, and analyzed the shape and size of plastic zone of surrounding rock under different stress field conditions. We compared the effect of five Drucker-Prager yield criteria on the shape and size of plastic zone under variations of cohesion, internal friction angle, Poisson's ratio and roadway radius in roadway surrounding rock. We then analyzed its implications for engineering practice based on the evolution characteristics. Results show that ① Varia-

收稿日期:2024-06-17 修回日期:2024-07-24

基金项目:国家自然科学基金(U22A20165, 52004289);中央高校基本科研业务费(2022XJNY01)

作者简介:刘洪涛(1981—),男,内蒙古牙克石人,博士,教授,主要从事矿山压力与围岩控制、矿山顶板灾害预警等方面的研究工作。E-mail: 108925@cumtb.edu.cn

tions in horizontal stress exerts significant impact on the plastic zone morphology of roadway surrounding rock; too high or too low horizontal stress will lead to a butterfly-shaped expansion in the roadway surrounding rock. ② Variations in axial pressure has little effect on the plastic zone shape of roadway surrounding rock, yet exerts major influence on the plastic zone size of surrounding rock; under the same horizontal stress, different axial stress will lead to a bowl-shaped development in the plastic zone size of surrounding rock. With variations in the cohesion, internal friction angle and roadway radius, we observed consistency in the size variation of plastic zone in roadway surrounding rock under different Drucker-Prager criteria. Therefore, the choice of different Drucker-Prager criteria will affect the calculation results of plastic zone in surrounding rock of roadway.

**Key words:** plastic zone; butterfly failure; Drucker-Prager criterion; three-dimensional stress field; roadway support

随着矿井深度的增加,煤矿开采所处的应力环境越来越复杂,深部矿井面临更为严重的地质灾害,如巷道围岩的大变形、支护失效和冒顶等<sup>[1-2]</sup>。巷道围岩变形破坏是围岩塑性区形成与发展的结果,巷道围岩塑性区的形态和发展决定了围岩破坏的形式及破坏程度。因此,研究巷道围岩塑性区演化特征是评价围岩稳定性和设计巷道支护方案具有重要的理论基础和依据<sup>[3-4]</sup>。

在塑性区求解方面,KASTENER 首先对静水压力条件下孔洞围岩的塑性区边界展开了计算,推导出了圆孔周围弹塑性应力解和巷道围岩塑性区半径的解析解<sup>[5]</sup>。随后,KASTENER 在静水压力解的基础上提出了将圆孔周围弹性应力解代入到 M-C 准则中的非均匀应力场下的塑性区求解思想<sup>[6-7]</sup>。陈立伟等<sup>[8]</sup>基于统一强度理论推导了非均匀应力场下的巷道围岩塑性区边界解析解。赵志强等<sup>[9-10]</sup>对 KASTENER 公式展开重新推导,对非均匀应力场下的围岩塑性区形态展开分析,提出了巷道围岩蝶形破坏理论,对巷道围岩控制研究具有重要的指导意义。刘洪涛等<sup>[11-12]</sup>基于三维 M-C 准则,通过引入 Lode 角参数,推导出考虑轴向应力作用的圆形巷道围岩塑性区边界隐性方程,并分析了不同应力场下的围岩塑性区尺寸及形态。

应用较为广泛的 M-C 准则没有考虑中间主应力对巷道围岩变形与破坏的影响,不能很好地解释岩土材料在静水压力下也能屈服或破坏的现象。D-P (Drucker-Prager) 准则为三维强度准则,许多研究表明 D-P 准则在求解巷道围岩问题上的可行性<sup>[13-15]</sup>。鲁稳<sup>[16]</sup>基于 D-P 准则,通过分析岩石由加载到破坏的全过程,根据岩石的应力-应变曲线将隧道围岩的状态分为松动区、塑性区和弹性区,并运用数值模拟和现场实测的方法探究分区稳定

性演进规律。张小波等<sup>[17]</sup>基于 D-P 准则和非关联流动法则,推导出圆形巷道围岩塑性区半径的解析式,并通过理论计算得出在一定的范围内可通过提高中间主应力减小塑性区范围和巷道围岩位移的大小。陈梁等<sup>[18]</sup>基于 D-P 准则和非关联流动法则推导出圆形巷道围岩应力场、位移及塑性区半径的封闭解析解,得出选择 D-P 准则时计算出的塑性区范围偏大,从而使评估结果更具有安全性。高永涛等<sup>[19]</sup>对比了各准则效应对应变软化隧道围岩稳定性的影响,认为内角点外接圆 D-P 准则、内切圆 D-P 准则、等面积圆 D-P 准则、匹配圆 D-P 准则及 M-C 准则对应的计算结果相对保守。

上述研究对巷道围岩边界的求解问题展开了深入分析,同时基于 D-P 准则进行塑性区求解也展开了大量系统性分析。然而,在三轴应力的求解问题中,引入的轴向应力均为平面应变模型下最大、最小主应力的平均应力,而非真正三维应力场下的轴向应力解,使得三维塑性区的求解问题存在较大误差。因此,基于 D-P 准则,通过引入轴向应力解,推导三维应力场下的巷道围岩塑性区边界方程,对不同应力条件下的围岩塑性区形态及尺寸展开分析,对比分析 5 种 D-P 系列屈服准则下的塑性区形态及尺寸演化规律,并基于演化特性提出实际工程意义。

## 1 三维应力场中围岩塑性区解析解

### 1.1 巷道周边任意点的应力状态

全平面应变模型是平面应变、面外剪切和单轴压缩的叠加,考虑了与巷道轴向应力有关的应力分量。根据弹性力学理论,得到极坐标系下巷道围岩任意点的应力计算公式为<sup>[20]</sup>

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \left( 1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right) + \\
 &\quad \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \left( 1 - 4 \frac{R_0^2}{r^2} + 3 \frac{R_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\
 \sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \left( 1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right) - \\
 &\quad \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \left( 1 + 3 \frac{R_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\
 \sigma_v &= \sigma_y - 2\nu(\sigma_x - \sigma_z) \frac{R_0^2}{r^2} \cos 2\theta \\
 \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \left( 1 + 2 \frac{R_0^2}{r^2} - 3 \frac{R_0^4}{r^4} \right) \sin 2\theta
 \end{aligned} \tag{1}$$

式中,  $\sigma_\theta$  为任意点的环向应力, MPa;  $\sigma_r$  为任意点的径向应力, MPa;  $\sigma_v$  为巷道轴向的应力, MPa;  $\tau_{r\theta}$  为任意点的剪应力, MPa;  $\sigma_x$  为垂直巷道帮部的水平应力, MPa;  $\sigma_y$  为与巷道轴向平行的应力, MPa;  $\sigma_z$  为巷道围岩的铅垂应力, MPa;  $\nu$  为巷道围岩泊松比;  $R_0$  为圆形巷道半径, m;  $r, \theta$  为任意点的极坐标。

为了简化推导过程, 令

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \left( 1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right) \\
 B &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \left( 1 - 4 \frac{R_0^2}{r^2} + 3 \frac{R_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\
 C &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \left( 1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right) \\
 D &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \left( 1 + 3 \frac{R_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\
 E &= \sigma_y - 2\nu(\sigma_x - \sigma_z) \frac{R_0^2}{r^2} \cos 2\theta \\
 F &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \left( 1 + 2 \frac{R_0^2}{r^2} - 3 \frac{R_0^4}{r^4} \right) \sin 2\theta
 \end{aligned} \tag{2}$$

则式(1)简化为

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= A + B \\
 \sigma_\theta &= C - D \\
 \sigma_v &= E \\
 \tau_{r\theta} &= F
 \end{aligned} \tag{3}$$

### 1.2 Drucker-Prager 准则

Mises 在对金属材料试验资料分析的基础上, 于 1913 年提出了同时考虑 3 个主应力影响的能量屈服准则, 即 Mises 准则。为了克服 Mises 准则没有考虑静水压力对屈服与破坏的影响, Drucker 与 Prager 于 1952 年提出了考虑静水压力影响的广义 Mises 准则, 简称 D-P 准则。D-P 准则或广义 Mises 准则的屈服函数为<sup>[22]</sup>

$$\begin{aligned}
 f(I_1, \sqrt{J_2}) &= \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k = 0 \\
 I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

式中,  $I_1$  为应力张量第一不变量;  $J_2$  为偏应力第二不变量;  $\alpha$  和  $k$  为 D-P 准则材料常数。

按照平面应变条件下的应力和塑性变形条件, Drucker 与 Prager 推导出了  $\alpha, k$  与 M-C 准则的材料常数  $\varphi, c$  之间的关系:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3} \sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}} \\
 k &= \frac{\sqrt{3} c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}}
 \end{aligned} \tag{5}$$

在主应力空间, D-P 准则的屈服面为一个以空间对角线为轴的圆锥面; 在  $\sigma_2 = 0$  平面上, D-P 准则的屈服曲线为一个圆心在  $\sigma_1 = \sigma_3$  轴上但偏离了原点的椭圆, 如图 1 所示。当  $\alpha = 0$  时, D-P 准则就还原为 Mises 准则。因此, D-P 准则是同时考虑了平均应力或体应变能及偏应力第二不变量或形状变化能的能量屈服准则。

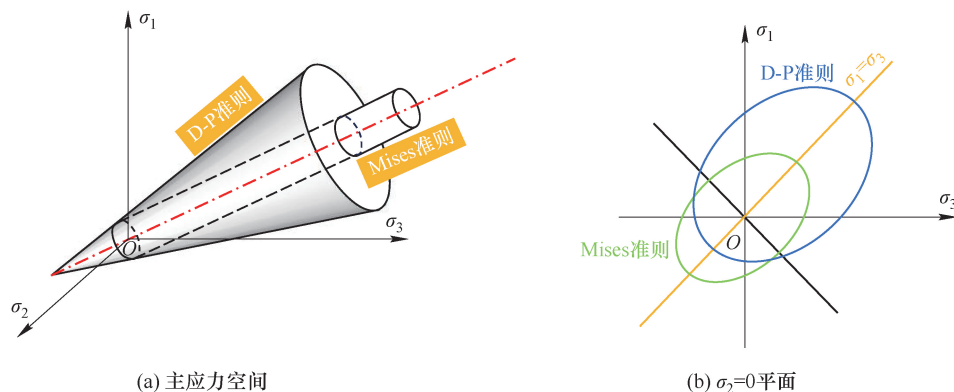


图 1 Drucker-Prager 准则<sup>[21]</sup>

Fig. 1 Drucker-Prager criteria<sup>[21]</sup>

1.3 双向不等压圆形巷道围岩塑性边界方程

在弹性力学中,3个主应力可通过水平应力和垂直应力求得

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2} \\ \sigma_2 &= \sigma_v \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2} \end{aligned} \quad (6)$$

将式(3)代入式(6),得

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{A + B + C - D}{2} + \sqrt{\left(\frac{A + B - C + D}{2}\right)^2 + F^2} - E \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= E - \frac{A + B + C - D}{2} + \sqrt{\left(\frac{A + B - C + D}{2}\right)^2 + F^2} \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= 2\sqrt{\left(\frac{A + B - C + D}{2}\right)^2 + F^2} \end{aligned} \quad (7)$$

令

$$\begin{aligned} P &= \frac{A + B + C - D}{2} \\ Q &= \sqrt{\left(\frac{A + B - C + D}{2}\right)^2 + F^2} \end{aligned} \quad (8)$$

则式(7)简化为

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= P + Q - E \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= E - P + Q \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= -2Q \end{aligned} \quad (9)$$

将式(6)、式(9)代入式(4),得到非均匀应力场条件下圆形巷道围岩塑性区的边界方程:

$$\sqrt{\frac{1}{3}(P^2 + 3Q^2 + E^2 - 2EP)} - \quad (10)$$

$$\alpha(A + B + C - D + E) - k = 0$$

因此,在三向主应力大小、巷道半径  $R_0$ 、围岩黏聚力  $c$  和内摩擦角  $\varphi$  都给定的情况下,代入式(10)即可计算出巷道的围岩塑性区边界位置。

2 围岩塑性区演化特征分析

2.1 应力方案设定

基于式(10)从塑性区大小及形态两方面对巷道围岩塑性区的演化特征进行分析。

D-P 准则考虑了静水压力及中间主应力对岩石屈服特性的影响。因此,为研究不同应力场下圆形巷道的围岩塑性区形态及尺寸,采取控制变量法,通过设定不同的应力方案,分析巷道围岩塑性区的演化规律。在设定水平侧压  $\eta_1$  的基础上,引入轴向侧压  $\eta_2$ :

$$\eta_1 = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} \quad (11)$$

$$\eta_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \quad (12)$$

当巷道处于 800 m 埋深的应力环境时,设定一定的圆形巷道围岩力学参数,取  $\sigma_z = 20$  MPa,巷道半径  $R_0 = 2$  m,内聚力  $c = 2$  MPa,泊松比  $\nu = 0.25$ ,内摩擦角  $\varphi = 30^\circ$ 。基于控制变量法,设定固定相同轴向侧压、变化不同水平侧压及固定相同水平侧压、变化不同轴向侧压两类。

对于第一类,将上述参数代入式(10)中,同时固定  $\sigma_y = 10$  MPa 不变,当轴向侧压  $\eta_2 = 0.5$  时,  $\sigma_x$  分别取值 8、10、12、14、16、18、20、22、24、26、28、30、32 MPa,探究水平侧压  $\eta_1$  的不同取值对巷道围岩塑性区的影响。具体方案见表 1。

表 1 相同轴向侧压不同水平侧压应力加载方案

Table 1 Loading scheme of different horizontal lateral stress under the same axial lateral stress

| $\eta_1$        | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\sigma_x$ /MPa | 8   | 10  | 12  | 14  | 16  | 18  | 20  | 22  | 24  | 26  | 28  | 30  | 32  |
| $\sigma_y$ /MPa | 10  | 10  | 10  | 10  | 10  | 10  | 10  | 10  | 10  | 10  | 10  | 10  | 10  |
| $\sigma_z$ /MPa | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  |

对于第二类,固定  $\sigma_x$  为 20、24 MPa 不变,即水平侧压  $\eta_1$  为 1.0 和 1.2 时,  $\sigma_y$  分别取值 16、18、20、22、24、26、28、30、32、34、36、38、40 MPa,探究轴向侧压  $\eta_2$  的不同取值对巷道围岩塑性区的影响;

固定  $\sigma_x = 40$  MPa,当水平侧压  $\eta_1 = 2.0$  时,  $\sigma_y$  分别取值 16、20、24、28、32、36、40、44、48、52、56、60 MPa,探究轴向侧压  $\eta_2$  的不同取值对巷道围岩塑性区的影响具体方案见表 2。

表 2 相同水平侧压不同轴向侧压应力加载方案

Table 2 Loading scheme of different axial lateral stress under the same horizontal lateral stress

| $\eta_1 = 1.0$        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\eta_2$              | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 |
| $\sigma_x/\text{MPa}$ | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  |
| $\sigma_y/\text{MPa}$ | 16  | 18  | 20  | 22  | 24  | 26  | 28  | 30  | 32  | 34  | 36  | 38  | 40  |
| $\sigma_z/\text{MPa}$ | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  |
| $\eta_1 = 1.2$        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| $\eta_2$              | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 |
| $\sigma_x/\text{MPa}$ | 24  | 24  | 24  | 24  | 24  | 24  | 24  | 24  | 24  | 24  | 24  | 24  | 24  |
| $\sigma_y/\text{MPa}$ | 16  | 18  | 20  | 22  | 24  | 26  | 28  | 30  | 32  | 34  | 36  | 38  | 40  |
| $\sigma_z/\text{MPa}$ | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  |
| $\eta_1 = 2.0$        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| $\eta_2$              | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 | 2.8 | 3.0 |     |
| $\sigma_x/\text{MPa}$ | 40  | 40  | 40  | 40  | 40  | 40  | 40  | 40  | 40  | 40  | 40  | 40  | 40  |
| $\sigma_y/\text{MPa}$ | 16  | 20  | 24  | 28  | 32  | 36  | 40  | 44  | 48  | 52  | 56  | 60  |     |
| $\sigma_z/\text{MPa}$ | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  |

2.2 水平侧压对巷道围岩塑性区形态及尺寸的影响  
选取水平侧压系数  $\eta_1$  分别为 0.4、0.6、0.8、

1.0、1.2、1.4、1.6 时,得到对应的巷道围岩塑性区形态尺寸如图 2 所示。

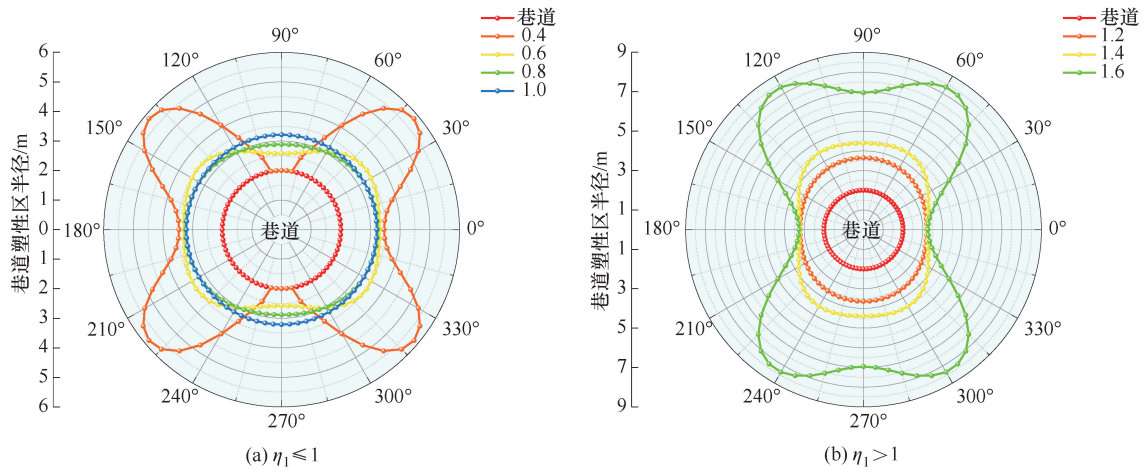


图 2 不同  $\eta_1$  取值范围巷道围岩塑性区形态及尺寸

Fig. 2 Shape and size of plastic zone in roadway surrounding rock with different  $\eta_1$  values

由图 2(a)可看出,当水平侧压  $\eta_1 = 0.4$  时,塑性区最大半径位于四个象限角平分线附近,最小半径位于纵轴,塑性区边界轮廓为蝶形;当水平侧压  $\eta_1 = 0.6$  时,塑性区最大半径仍位于四个象限中,形态为类似蝴蝶的形状,塑性区尺寸在纵轴附近增大,其他各方向减小;当水平侧压  $\eta_1 = 0.8$  时,塑性区最大半径位于横轴上,最小半径位于纵轴上,形态为椭圆形,塑性区尺寸在纵轴附近增大,横轴上基本不变,其他各方向减小;当水平侧压  $\eta_1 = 1.0$  时,巷道围岩处于双向等压受力状态,塑性区形态为圆形,尺寸在纵轴附近增大,其他各方向基本

不变。

由图 2(b)可看出,当水平侧压  $\eta_1 = 1.2$  时,塑性区最大半径位于纵轴上,最小半径位于横轴上,形态为椭圆形;当水平侧压  $\eta_1 = 1.4$  时,塑性区最大半径位于四个象限中,形态为类似蝴蝶的形状,塑性区尺寸在各方向上都增大;当水平侧压  $\eta_1 = 1.6$  时,塑性区最大半径位于四个象限角平分线附近,最小半径位于横轴,塑性区边界轮廓为蝶形,塑性区尺寸在各方向上都增大。

为更好地呈现轴向侧压变化下围岩塑性区尺寸演化特征,利用 Maple 软件对塑性区尺寸进行计

算,水平侧压  $\eta_1$  从 0.4 增至 1.6 时,巷道围岩塑性区最大半径  $R_{max}$  曲线如图 3 所示。水平侧压增大的过程中巷道围岩塑性区尺寸呈现碗状发展,且随着水平侧压的偏离程度越大,围岩塑性区的最大半径逐渐呈指数型发展。

2.3 轴向侧压对巷道围岩塑性区形态及尺寸的影响

选取轴向侧压  $\eta_2$  分别为 1.0、1.2、2.0 时,得到 3 种相同水平侧压不同轴向侧压下所对应的巷道围岩塑性区形态及最大半径曲线如图 4 所示。

由图 4 可看出,当固定水平侧压  $\eta_1 = 1.0$  时,轴向侧压  $\eta_2$  从 0.8 增至 2.0 过程中,巷道围岩塑性区形态均为圆形,塑性区半径随着  $\eta_2$  的增加先减小后增大;当固定水平侧压  $\eta_1 = 1.2$  时,轴向侧

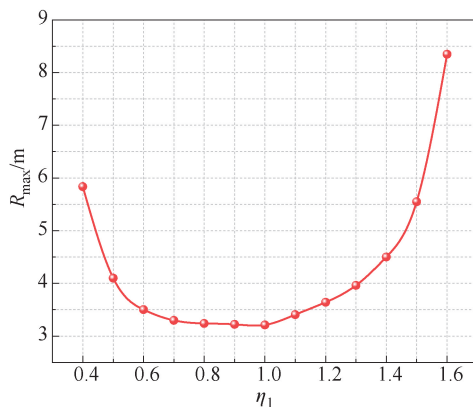


图 3 巷道围岩塑性区最大半径  
Fig. 3 Maximum radius of plastic zone in roadway surrounding rock

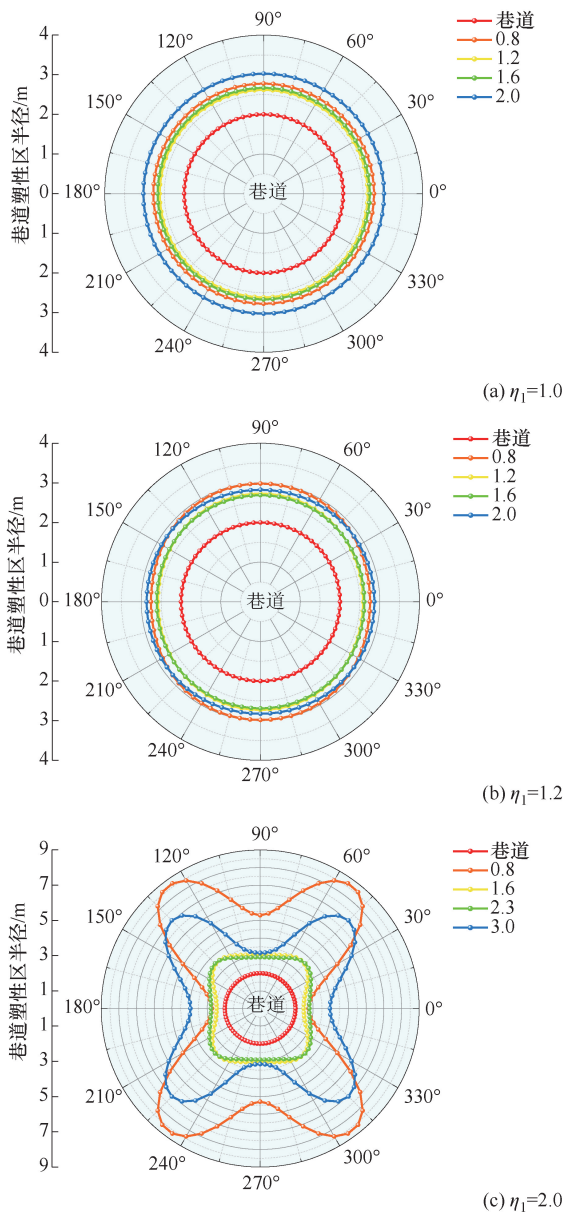


图 4 不同  $\eta_2$  取值巷道围岩塑性区形态及最大半径

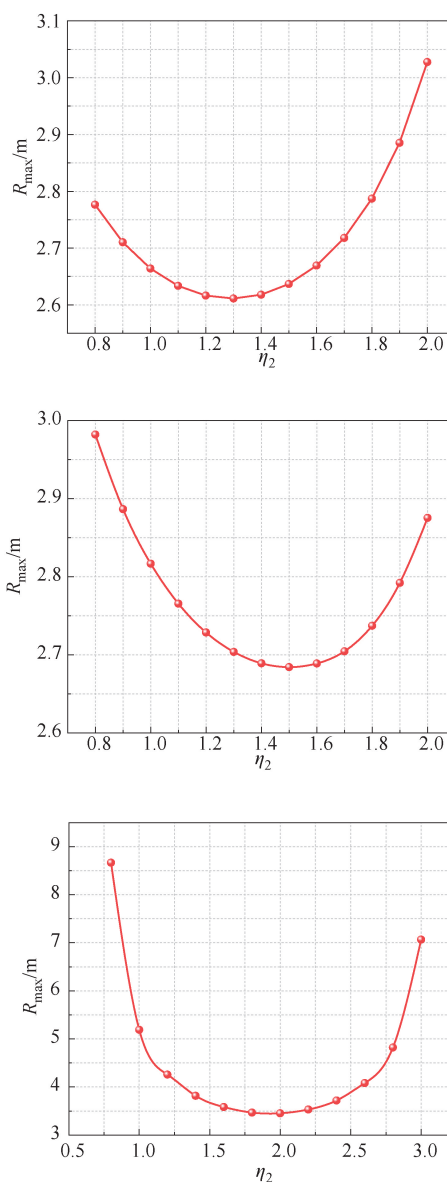


Fig. 4 Shape and maximum radius of plastic zone in roadway surrounding rock with different  $\eta_2$  values

压  $\eta_2$  从 0.8 增至 2.0 过程中,巷道围岩塑性区形态均为椭圆形,塑性区半径随着  $\eta_2$  的增加先减小后增大;当固定水平侧压  $\eta_1 = 2.0$  时,轴向侧压  $\eta_2$  从 0.8 增至 3.0 过程中,巷道围岩塑性区形态保持不变,均为蝶形,塑性区半径随着  $\eta_2$  的增加先减小后增大。

在水平侧压  $\eta_1$  分别为 1.0、1.2、2.0 变化轴向侧压的过程中,巷道围岩塑性区尺寸均呈现碗状发展,且随着轴向侧压的偏离程度越大,围岩塑性区的最大半径逐渐呈指数型发展,也即轴向侧压对巷道围岩稳定性具有重要影响。

### 3 围岩塑性区影响因素分析

#### 3.1 5 种匹配准则

式(4)中 D-P 准则的材料常数  $\alpha, k$ ,是按照平面应变条件下与 M-C 准则的屈服极限相同的条件而导出的。实际上,D-P 准则与 M-C 准则有多种拟合方法。在  $\pi$  平面上,D-P 屈服面与 M-C 不等边六角形的关系分为内切、内接、外接和等面积圆<sup>[22]</sup>。选择合适的材料参数  $\alpha$  与  $k$ ,将 D-P 屈服面与 M-C 屈服面进行特定匹配,具体见表 3。

表 3 D-P 各准则参数换算

Table 3 Parameter conversion of each D-P criterion

| 编号   | 准则种类     | $\alpha$  | $k$  |
|------|----------|---|--|
| DP-1 | M-C 外角点  | $\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}$                      | $\frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}$                      |
|      | 外接圆      | $\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}$                      | $\frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}$                      |
| DP-2 | M-C 内角点  | $\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}$                      | $\frac{6c\sin\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}$                      |
|      | 外接圆      | $\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}$                      | $\frac{6c\sin\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}$                      |
| DP-3 | M-C      | $\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}$                | $\frac{3c\cos\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}$               |
|      | 内切圆      | $\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}$                | $\frac{3c\cos\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}$               |
| DP-4 | M-C 等面积圆 | $\frac{2\sqrt{3}\sin\varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\varphi)}}$ | $\frac{6\sqrt{3}c\sin\varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\varphi)}}$ |
|      | M-C 匹配   | $\frac{\sin\varphi}{3}$   | $ccos\varphi$  |
| DP-5 | D-P 圆    | $\frac{\sin\varphi}{3}$   | $ccos\varphi$  |

#### 3.2 不同 D-P 准则下内聚力对巷道围岩塑性区的影响

固定巷道半径  $R_0 = 2$  m,泊松比  $\nu = 0.25$ ,内摩擦角  $\varphi = 30^\circ$ ,设  $\sigma_x = 40$  MPa,  $\sigma_y = 16$  MPa,  $\sigma_z = 20$  MPa,探究内聚力  $c$  为 1.5~3.5 MPa 时,不同 D-P 准则对巷道围岩塑性区的影响如图 5 所示。

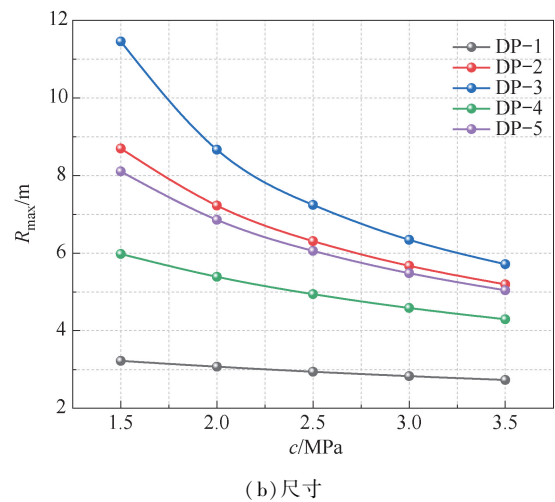
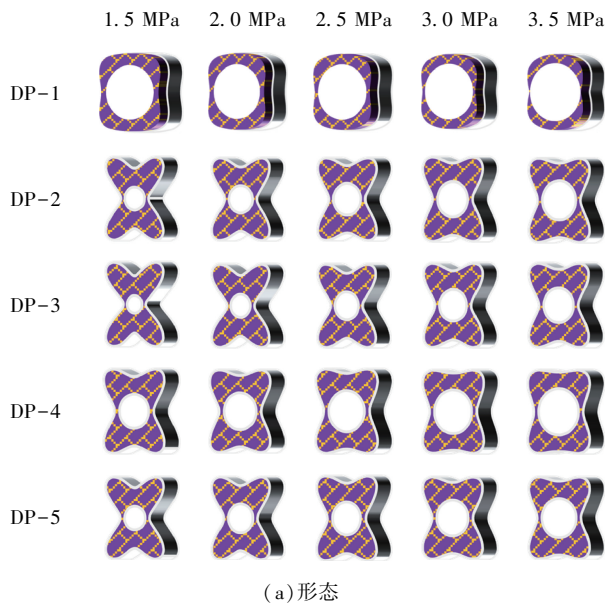


图 5 不同内聚力对巷道塑性区形态及尺寸的影响

Fig. 5 Effect of different cohesion on the size and shape of plastic zone in roadway

由图 5(a) 可看出,巷道围岩的内聚力发生改变时,塑性区的形态保持为蝶形不变。图 5(b) 可看出,巷道围岩塑性区的尺寸随着内聚力的增大而减小,不同 D-P 准则减小幅度不同。DP-3 减小幅度最大,为 5.74 m; DP-1 减小幅度最小,为 0.49 m; DP-1 和 DP-4 曲线呈近似线性减小趋势,DP-2、DP-3 和 DP-5 呈近似指数减小趋势。相同内聚力不同 D-P 准则下,巷道围岩塑性区最

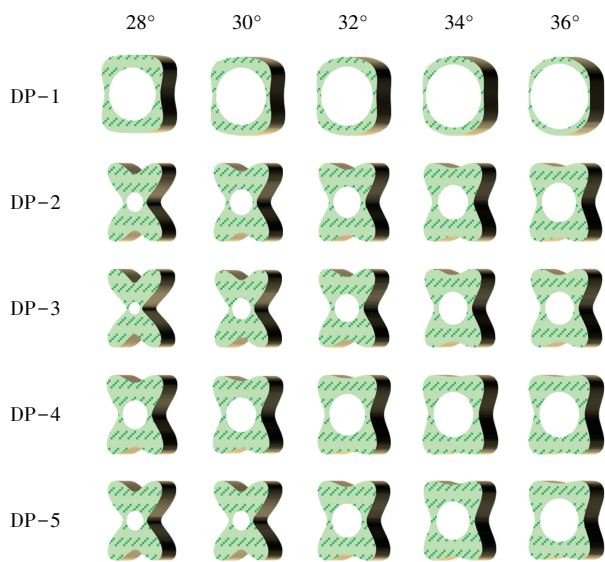
大半径也不同,从大到小顺序依次为  $R_{DP-3}$ 、 $R_{DP-2}$ 、 $R_{DP-5}$ 、 $R_{DP-4}$ 、 $R_{DP-1}$ 。因此,巷道围岩内聚力对巷道围岩塑性区的形态基本没有影响,而对尺寸影响较大,且不同 D-P 准则对塑性区尺寸的影响程度不同。

#### 3.3 内摩擦角对巷道围岩塑性区的影响

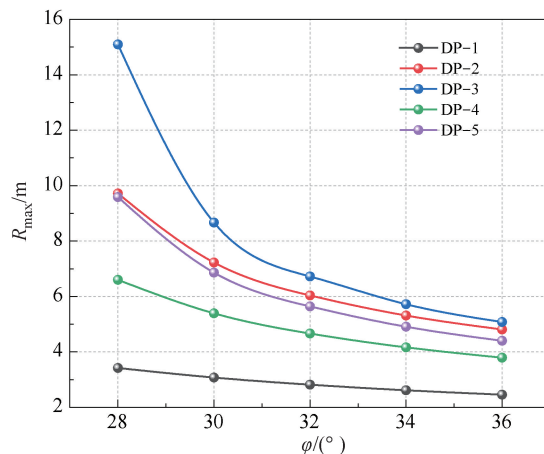
固定巷道半径  $R_0 = 2$  m,泊松比  $\nu = 0.25$ ,内聚力  $c = 2$  MPa,设  $\sigma_x = 40$  MPa,  $\sigma_y = 16$  MPa,  $\sigma_z = 20$  MPa,

探究内摩擦角  $\varphi$  为  $28^\circ \sim 36^\circ$  时,不同 D-P 准则对

巷道围岩塑性区的影响如图 6 所示。



(a) 塑性区形态



(b) 塑性区尺寸

图 6 不同内摩擦角对巷道塑性区形态及尺寸的影响

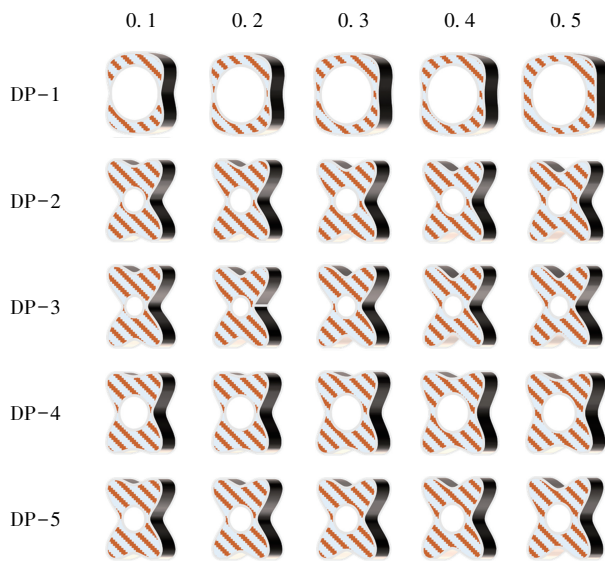
Fig. 6 Effect of different internal friction angle on the size and shape of plastic zone in roadway

由图(a)可看出,巷道围岩的内摩擦角发生改变时,塑性区的形态保持为蝶形不变。图 6(b)可看出,巷道围岩塑性区的尺寸随着内摩擦角的增大而减小,不同 D-P 准则的减小幅度不同。DP-3 减小幅度最大,达到 10.48 m;DP-1 减小幅度最小,为 1.08 m;DP-1 和 DP-4 曲线呈近似线性减小趋势,DP-2、DP-3 和 DP-5 呈近似指数减小趋势。相同内摩擦角不同 D-P 准则下,巷道围岩塑性区最大半径也不同,从大到小顺序依次为  $R_{DP-3}$ 、

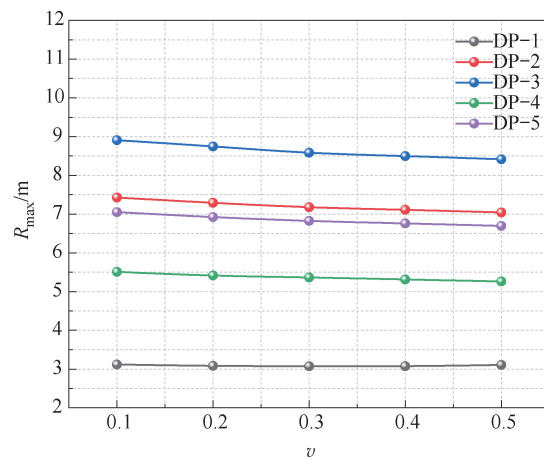
$R_{DP-2}$ 、 $R_{DP-5}$ 、 $R_{DP-4}$ 、 $R_{DP-1}$ 。因此,巷道围岩内摩擦角对巷道围岩塑性区的形态基本没有影响,而对塑性区尺寸影响较大,且不同 D-P 准则对塑性区尺寸的影响程度不同。

### 3.4 泊松比对巷道围岩塑性区的影响

固定巷道半径  $R_0=2$  m,内聚力  $c=2$  MPa,内摩擦角  $\varphi=30^\circ$ ,设  $\sigma_x=40$  MPa, $\sigma_y=16$  MPa, $\sigma_z=20$  MPa,探究泊松比  $\nu$  为 0.1~0.5 时,不同 D-P 准则对巷道围岩塑性区的影响如图 7 所示。



(a) 塑性区形态



(b) 塑性区尺寸

图 7 不同泊松比对巷道塑性区形态及尺寸的影响

Fig. 7 Effect of different Poisson's ratio on the size and shape of plastic zone in roadway

由图 7(a)可看出,巷道围岩的泊松比发生改变时,塑性区的形态保持为蝶形不变。图 7(b)可看出,在 DP-2、DP-3、DP-4 和 DP-5 准则下,巷道围岩塑性区的尺寸随着泊松比的增大而减小,不同 D-P 准则的减小幅度不同。DP-3 减小幅度最大,为 0.49 m;DP-1 减小幅度最小,为 0.25 m;在 DP-1 准则下,巷道围岩塑性区的尺寸随着泊松比的增大先降低后增加,其余各准则曲线呈近似线性减小趋势。相同泊松比不同 D-P 准则下巷道围岩塑性区最大半径也不同,从大到小顺序依次为  $R_{DP-3}$ 、 $R_{DP-2}$ 、 $R_{DP-5}$ 、 $R_{DP-4}$ 、 $R_{DP-1}$ 。因此,泊松比对巷道围岩塑性区的形态基本没有影响,而对塑性区尺寸影响较大,且不同 D-P 准则对塑性区尺寸的影响程度不同。

### 3.5 巷道半径对巷道围岩塑性区的影响

固定泊松比  $\nu=0.25$ ,内聚力  $c=2$  MPa,内摩擦角  $\varphi=30^\circ$ ,设  $\sigma_x=40$  MPa,  $\sigma_y=16$  MPa,  $\sigma_z=20$  MPa,探究巷道半径  $R_0$  为 2~4 m 时,不同 D-P 准则对巷道围岩塑性区的影响如图 8 所示。

由图 8(a)可看出,巷道半径发生改变时,塑性区的形态保持为蝶形不变。由图 8(b)可看出,巷

道围岩塑性区的尺寸随着巷道半径的增大而增大,不同 D-P 准则的增大幅度不同,各曲线呈近似线性增加趋势。DP-3 增大幅度最大,达到 8.67 m;DP-1 增大幅度最小,为 3.07 m。相同巷道半径不同 D-P 准则下巷道围岩塑性区最大半径也不同,从大到小顺序依次为  $R_{DP-3}$ 、 $R_{DP-2}$ 、 $R_{DP-5}$ 、 $R_{DP-4}$ 、 $R_{DP-1}$ 。因此,巷道半径对巷道围岩塑性区的形态基本没有影响,而对塑性区尺寸影响较小,且不同 D-P 准则对塑性区尺寸的影响程度不同。

综上所述,巷道围岩的内聚力、内摩擦角、泊松比和巷道半径对巷道围岩塑性区尺寸都有一定程度的影响,但基本不会影响塑性区的形态。巷道围岩内摩擦角对塑性区尺寸影响相对较大,泊松比对塑性区尺寸影响相对较小。内聚力、内摩擦角和巷道半径变化时,不同 D-P 准则下巷道围岩塑性区尺寸变化规律具有一致性。相同影响因素不同 D-P 准则下,巷道围岩塑性区尺寸从大到小顺序依次为  $R_{DP-3}$ 、 $R_{DP-2}$ 、 $R_{DP-5}$ 、 $R_{DP-4}$ 、 $R_{DP-1}$ 。因此,选取不同 D-P 准则会对巷道围岩塑性区的计算结果产生影响,在工程实践中选用 DP-3 准则更为安全。

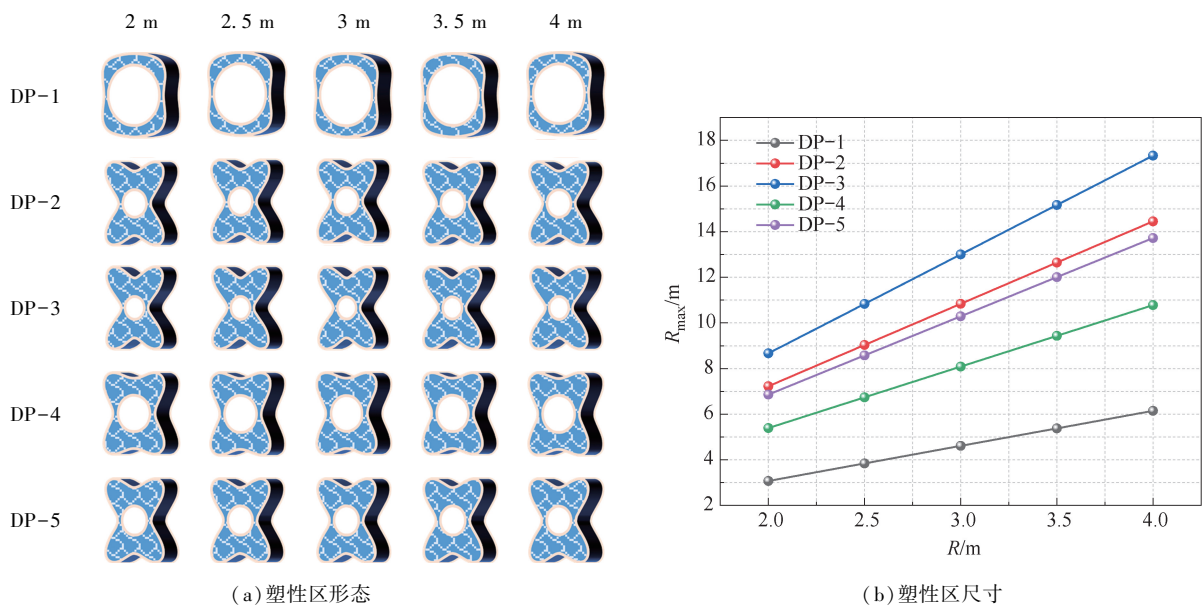


图 8 不同巷道半径对巷道塑性区尺寸及形态的影响

Fig. 8 Effect of different roadway radius on the size and shape of plastic zone in roadway

## 4 工程实践

### 4.1 RPP 曲面

为探究不同应力场下主应力同时变化过程中巷道围岩的破坏致因及敏感性,设  $\sigma_y=20$  MPa 不变,变化  $\sigma_x$  和  $\sigma_z$  值的大小,得到三维应力曲面图如图 9 所示。

由图 9(a) (b) 可看出,不同应力场下塑性区扩展曲面呈现两翼 U 型。根据上述分析,当巷道围岩的塑性区形态呈现圆形和椭圆形时,巷道围岩的塑性区尺寸相对较小;当巷道围岩塑性区形态呈现蝶形形态时,巷道围岩的塑性区尺寸相对较大;当蝶叶不断扩展时,巷道围岩的塑性区尺寸呈指数型增长。当  $\sigma_x$  一定时,随着  $\sigma_z$  的增大,围岩塑性

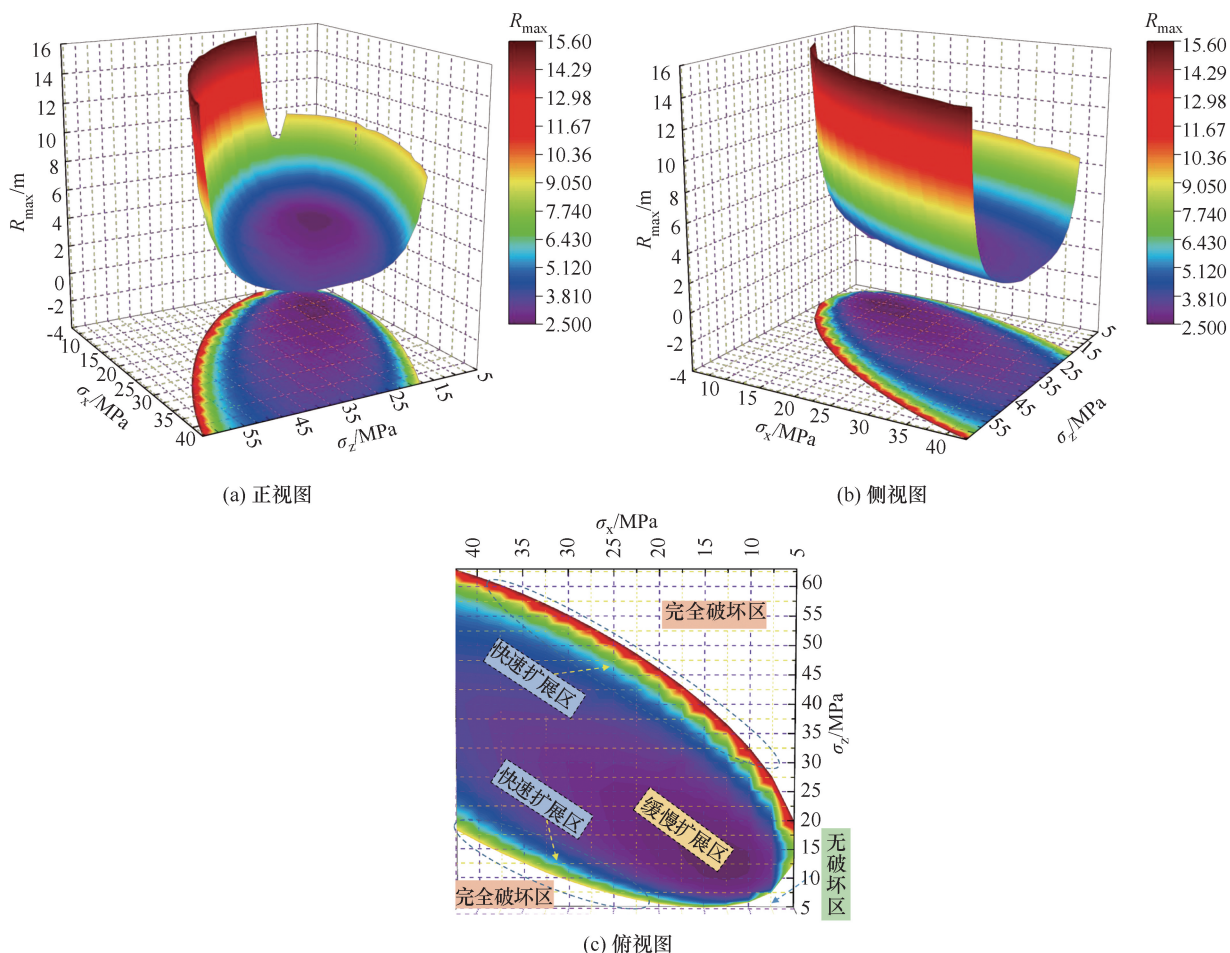


图9 塑性区半径与主应力(RPP)曲面

Fig.9 Curves of plastic zone radius and principal stress (RPP)

区形态呈现圆形或椭圆形,围岩的最大塑性区半径  $R_{max}$  相对较小;当  $\sigma_x$  增加至一定临界值时,围岩塑性区形态呈现蝶形,塑性区尺寸对应力场的变化变得极其敏感,两翼塑性区尺寸急剧突变。

由图9(c)可看出,不同应力场下的塑性区平面可分为4个区域,即无破坏区、缓慢扩展区、快速扩展区与完全破坏区。当围岩区域应力场较小时,围岩在低应力区间不会产生塑性破坏。随着区域应力及应力比值的增加,围岩塑性区开始出现缓慢扩展,围岩塑性区形态开始由类椭圆、椭圆、类蝶形形态扩展;当围岩应力比值到达一定临界区域时,围岩塑性区变化趋势处于快速扩展区;当应力值超出一定范围时,围岩处于完全破坏区。

4.2 工程意义

由图9看出,围岩区域应力场变化的情况下塑性区尺寸存在突变特性。当围岩的主应力比值达到某一临界值条件下,围岩的最大破坏半径  $R_{max}$  对应力场变化极其敏感,围岩塑性区形态会呈现蝶形快速扩展,即比值的微小增量就会引起围岩的快

速突变。

在目前的深部开采过程中,巷道围岩在绝大多数情况下处于非等压状态。煤层的开采均会导致采空区四周形成采动支撑压力带,应力增高系数为2.5~3倍,同时,在叠加采动影响下,围岩的应力比值会进一步上升,有时高达5~7倍<sup>[23]</sup>。巷道围岩在高比值应力下,极易发生蝶形大变形破坏。

目前矿井使用的支护材料所能提供的支护阻力与蝶形环境下的高应力环境值的数量级存在较大差异,通过单纯地提高支护阻力对巷道围岩的控制效果极其有限。因此,实现巷道围岩稳定控制的主要思路如下。

(1) 调控采掘应力。通过合理布置巷道、硐室位置及方向,基于三维应力状态下的塑性区边界方程,在考虑工程实际地质条件下确定巷道、硐室优化布置方位,避免围岩处于高应力比值环境。

(2) 局部围岩应力改善。在高强度开采和多重扰动情况下,巷道围岩常常处于高应力比值环境,应通过钻孔卸压、顶板预裂爆破、开挖卸压槽、掘卸压

巷等方式对巷道围岩浅部进行卸压,使围岩局部形成弱化带,迫使高应力峰值向围岩深部转移。

(3) 巷道支护控制。高应力环境下巷道围岩形成的破坏为给定变形,巷道断面呈现不同程度的破坏。因此,给定变形破坏范围识别是巷道围岩支护的关键。在巷道围岩应力确定下,基于围岩塑性区边界隐式方程,可对巷道围岩的塑性区破坏形态进行预计,根据塑性区形态确定巷道围岩破坏范围,对塑性区易扩展部位进行重点加强支护,防止塑性区的快速扩展。

## 5 结 论

基于 Drucker-Prager 准则,以弹塑性力学为理论基础,通过引入轴向应力解推导三维应力场下的巷道围岩塑性区边界方程,对不同应力场条件下的围岩塑性区形态及尺寸展开分析,对比分析了巷道围岩的内聚力、内摩擦角、泊松比和巷道半径变化的条件下,5种 Drucker-Prager 屈服准则对塑性区形态及尺寸的影响,结论如下:

(1) 固定轴向侧压,变换不同水平侧压时,巷道围岩塑性区的形态和尺寸都会发生改变。水平侧压的增减对巷道围岩的塑性区形态影响程度较大,过高或过低的水平侧压会使巷道围岩呈现蝶形扩展,对巷道围岩的稳定性极为不利。

(2) 固定水平侧压,变换不同轴向侧压时,巷道围岩塑性区的尺寸呈碗状发展。轴向侧压的增减对巷道围岩的塑性区形态影响较小,对围岩的塑性区尺寸影响较大。

(3) 巷道围岩的内聚力、内摩擦角、泊松比和巷道半径对巷道围岩塑性区尺寸都有一定的影响,对其形态基本不产生影响。内聚力、内摩擦角和巷道半径变化时,不同 D-P 准则下巷道围岩塑性区尺寸变化规律具有一致性。在实验中选取了安全系数最大的 DP-3 准则。

## 参考文献

[1] 左建平,文金浩,刘德军,等. 深部巷道等强支护控制理论[J]. 矿业科学学报, 2021, 6(2): 148-159.  
ZUO Jianping, WEN Jinhao, LIU Dejun, et al. Control theory of uniform strength support in deep roadway[J]. Journal of Mining Science and Technology, 2021, 6(2): 148-159.

[2] 李永恩,郭晓菲,马骥,等. 邢东矿深部回采巷道围岩塑性区“蝶形”扩展特征及稳定性控制[J]. 矿业科学学报, 2017, 2(6): 566-575.

LI Yongen, GUO Xiaofei, Ma Ji, et al. Extension characteristics of the “Butterfly-shaped” plastic zone and stability control of deep mining roadway in Xingdong mine [J]. Journal of Mining Science and Technology, 2017, 2(6): 566-575.

[3] 马念杰,赵希栋,赵志强,等. 深部采动巷道顶板稳定性分析与控制[J]. 煤炭学报, 2015, 40(10): 2287-2295.  
MA Nianjie, ZHAO Xidong, ZHAO Zhiqiang, et al. Stability analysis and control technology of mine roadway roof in deep mining[J]. Journal of China Coal Society, 2015, 40(10): 2287-2295.

[4] 刘洪涛,周光东,韩子俊,等. 多因素影响下巷道围岩稳定性分析及优化设计研究[J]. 矿业科学学报, 2024, 9(4): 504-518.  
LIU Hongtao, ZHOU Guangdong, HAN Zijun, et al. Stability analysis and optimization design of roadway surrounding rock under multiple factors [J]. Journal of Mining Science and Technology, 2024, 9(4): 504-518.

[5] H·卡斯特奈. 隧道与坑道静力学[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1980.  
KASTNER H. Statics of tunnels and trenches [M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1980.

[6] 马念杰,侯朝炯. 采准巷道矿压理论及应用[M]. 北京:煤炭工业出版社, 1995.  
MA Nianjie, HOU Chaojiong. The underground pressure of Sectional roadways and its control [M]. Beijing: China coal industry publishing house, 1995.

[7] 关宝树. 隧道力学概论[M]. 成都:西南交通大学出版社, 1993  
GUAN Baoshu. General theory of tunnel mechanics [J]. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 1993.

[8] 陈立伟,彭建兵,范文,等. 基于统一强度理论的非均匀应力场圆形巷道围岩塑性区分析[J]. 煤炭学报, 2007, 32(1): 20-23.  
CHEN Liwei, PENG Jianbing, FAN Wen, et al. Analysis of surrounding rock mass plastic zone of round tunnel under non-uniform stress field based on the unified strength theory [J]. Journal of China Coal Society, 2007, 32(1): 20-23.

[9] 赵志强,马念杰,刘洪涛,等. 巷道蝶形破坏理论及其应用前景[J]. 中国矿业大学学报, 2018, 47(5): 969-978.  
ZHAO Zhiqiang, MA Nianjie, LIU Hongtao, et al. A butterfly failure theory of rock mass around roadway and its application prospect [J]. Journal of China University of Mining & Technology, 2018, 47(5): 969-978.

[10] 赵志强. 大变形回采巷道围岩变形破坏机理与控制方法研究 [D]. 北京:中国矿业大学(北京), 2014.  
ZHAO Zhiqiang. Mechanism of surrounding rock de-

- formation and failure and control method research in large deformation mining roadway[D]. Beijing: China University of Mining and Technology-Beijing, 2014.
- [11] 刘洪涛, 韩子俊, 郭晓菲, 等. 考虑轴向应力影响的圆形巷道围岩塑性区边界近似解[J]. 煤炭科学技术, 2023, 51(10): 12-23.  
LIU Hongtao, HAN Zijun, GUO Xiaofei, et al. Approximate solution of plastic zone boundary of surrounding rock of circular roadway considering axial stress[J]. Coal Science and Technology, 2023, 51(10): 12-23.
- [12] 刘洪涛, 韩子俊, 韩洲, 等. 三向非等压应力场下围岩主应力差与塑性区分布关系研究[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2024, 55(1): 291-306.  
LIU Hongtao, HAN Zijun, HAN Zhou, et al. Study on relationship between principal stress difference of surrounding rock and distribution of plastic zone under three-dimensional non-isobaric stress field[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2024, 55(1): 291-306.
- [13] 骆开静, 董海龙, 高全臣. 考虑流变和中间主应力的巷道围岩变形分区[J]. 煤炭学报, 2017, 42(S2): 331-337.  
LUO Kaijing, DONG Hailong, GAO Quanchen. Deformation division for surrounding rock of circular roadway by considering rheology and intermediate principal stress[J]. Journal of China Coal Society, 2017, 42(S2): 331-337.
- [14] 尹光志, 鲁俊, 张东明, 等. 真三轴应力条件下钻孔围岩塑性区及增透半径研究[J]. 岩土力学, 2019, 40(S1): 1-10.  
YIN Guangzhi, LU Jun, ZHANG Dongming, et al. Study on plastic zone and permeability-increasing radius of borehole surrounding rock under true triaxial stress conditions[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(S1): 1-10.
- [15] 刘洪涛, 韩子俊, 刘勤裕, 等. 巷道蝶形破坏强度准则低敏感性研究及工程应用[J]. 岩土力学, 2024, 45(1): 117-130.  
LIU Hongtao, HAN Zijun, LIU Qinyu, et al. Low sensitivity research and engineering application of roadway butterfly failure strength criterion[J]. Rock and Soil Mechanics, 2024, 45(1): 117-130.
- [16] 鲁稳. Drucker-Prager 系列屈服准则在岩土稳定分析中的应用研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2014.  
LU Wen. Study on application of Drucker-Prager series yield criterion in geotechnical stability analysis[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2014.
- [17] 张小波, 赵光明, 孟祥瑞. 考虑峰后应变软化与扩容的圆形巷道围岩弹塑性 D-P 准则解[J]. 采矿与安全工程学报, 2013, 30(6): 903-910, 916.  
ZHANG Xiaobo, ZHAO Guangming, MENG Xian-gui. Elastoplastic solution for surrounding rock of circular roadway based on D-P criterion by considering post-peak strain softening and dilatancy[J]. Journal of Mining & Safety Engineering, 2013, 30(6): 903-910, 916.
- [18] 陈梁, 茅献彪, 李明, 等. 基于 Drucker-Prager 准则的深部巷道破裂围岩弹塑性分析[J]. 煤炭学报, 2017, 42(2): 484-491.  
CHEN Liang, MAO Xianbiao, LI Ming, et al. Elastoplastic analysis of cracked surrounding rock in deep roadway based on Drucker-Prager criterion[J]. Journal of China Coal Society, 2017, 42(2): 484-491.
- [19] 高永涛, 梁鹏, 周喻. 深埋隧道应变软化弹塑性解的强度准则效应[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2020, 51(9): 2525-2537.  
GAO Yongtao, LIANG Peng, ZHOU Yu. Strength criterion effect on elasto-plastic solution of deep tunnels considering strain softening characteristics[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2020, 51(9): 2525-2537.
- [20] 徐芝纶. 弹性力学简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.  
XU Zhilun. A Concise course in elasticity[M]. Beijing: Higher Education Press, 2013.
- [21] 张学言, 闫澍旺. 岩土塑性力学基础[M]. 天津: 天津大学出版社, 2004.  
ZHANG Xueyan, YAN Shuwang. Fundamentals of geotechnics plasticity[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2004.
- [22] 邓楚键, 何国杰, 郑颖人. 基于 M-C 准则的 D-P 系列准则在岩土工程中的应用研究[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(6): 735-739.  
DENG Chujian, HE Guojie, ZHENG Yingren. Studies on Drucker-Prager yield criteria based on M-C yield criterion and application in geotechnical engineering[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(6): 735-739.
- [23] 钱鸣高, 石平五, 许家林. 矿山压力与岩层控制[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2010.  
QIAN Minggao, SHI Pingwu, XU Jialin. Mine pressure and strata control[M]. Xuzhou: China University of Mining & Technology Press, 2010.

(责任编辑: 张彩艳)