

• 土木工程 •

DOI:10.12454/j.jsuese.202300847



本刊网刊

冻结钙质黏土三轴剪切分数阶双曲线模型参数确定及验证

姚兆明^{1,2}, 汤海东^{1,2*}, 赖龙辉^{1,2}

(1. 安徽理工大学 土木建筑学院, 安徽 淮南 232001; 2. 矿山地下工程教育部工程研究中心, 安徽 淮南 232001)

摘要: 钙质黏土地层具有结冰温度低、冻结后膨胀性大、遇水易崩解、强度低等工程地质问题, 一直是冻结法施工的重难点。建立形式较为简洁的剪切模型是设计钙质黏土冻结壁的关键。以淮南地区深部原状钙质黏土为研究对象, 开展不同温度和围压下的三轴剪切试验, 得到了温度、围压对应力-应变的影响规律, 建立了剪切强度与冻结温度、围压间的关系。针对冻结钙质黏土三轴剪切应力-应变性质介于理想弹性与理想塑性之间的特性, 将分数阶微积分引入到双曲线模型, 建立能同时考虑温度和围压影响的冻结钙质黏土分数阶双曲线模型。对应变进行分数阶变化, 得到分数阶应变与应力间的线性关系, 进而分别建立温度、围压影响下的方程组。通过求解线性方程组, 得到分数阶双曲线模型参数。对比分数阶双曲线模型计算的应力值、邓肯-张模型计算的应力值和冻结钙质黏土的试验值可知, 所建立的冻结钙质黏土分数阶双曲线模型能够很好地描述钙质黏土的应力-应变规律, 拟合精度更高。所建立的模型概念清晰, 参数少、易于确定且物理意义明确, 便于工程运用。

关键词: 钙质黏土; 双曲线模型; 应力-应变曲线; 分数阶微积分

中图分类号: TU445

文献标志码: A

文章编号: 2096-3246(2025)05-0192-09

人工冻结法是通过人工制冷技术使土体降温, 将天然土体冻结的一种方法, 具有地层可复性好、隔水性好、强度高等优点^[1], 被广泛应用于基坑、井筒、地铁隧道施工等领域^[2-4]。为了保证冻结法施工的安全, 研究冻土的力学特性十分必要。Shi 等^[5]基于断裂力学建立了考虑冰透镜体切削效应的损伤变量, 分析了剪切荷载作用下非均质冻土损伤变量和塑性应变的变化规律; Sun 等^[6]对冻结粉质黏土进行了一系列试验, 探究了含水率和围压对土体冻结强度的影响; 朱锋盼等^[7]通过原状多年冻土在不同切样角度下的直剪试验, 探讨在-2℃条件下青藏地区两种不同土性(粉土、粉质黏土)冻土的直剪力学特性; 张鸿朋等^[8]利用自主研发的冻土三轴仪, 分析了冻结砂在不同应力状态下的强度演化规律和变形特性。Huang 等^[9]对冻结砂土进行了三轴压缩试验, 研究了中间主应力对冻土力学性质的影响。Xiang 等^[10]在不排水条件下对砂土进行三轴压缩试验, 研究冻融循环对砂土强度和刚度的影响。

为了完善对土的力学性能的研究, 许多学者通过数值模拟和试验建立了诸多本构模型, 如元件模型^[11]、经验模型^[12]、弹性模型^[13-14]等。元件模型通过串并联元件的方式模拟土的力学特性, 虽然直观但参数求取困难; 经验模型通过大量试验建立岩土本构关系, 虽然符合工程实际但物理意义不明确; 弹性模型参数少、形式简单、物理意义明确, 常用的邓肯-张双曲线模型就因此而被广泛使用。张秋敏等^[15]引入损伤比参数, 建立适用于强结构性黏土的修正邓肯-张本构模型; 谭维佳等^[16]通过搭建初始切线模量与基质吸力的关系, 建立一种新的考虑基质吸力的非饱和土邓肯-张统计损伤模型, 分析了不同基质吸力条件下非饱和土损伤累积规律; 朱剑锋等^[17]提出考虑初始含水量、固化剂掺量和龄期影响的硫氧镁水泥固化土的修正邓肯-张模型; Shi 等^[18]提出一种结构系数比描述荷载作用下冰-冻土界面的结构发展程度, 并对其归一化, 以使用邓肯-张模型来描述; Qiu 等^[19]采用邓肯-张模型和修正的邓肯-张模型对

收稿日期:2023-10-24 修回日期:2024-02-19 网络出版日期:2024-05-28

基金项目:矿山地下工程教育部工程研究中心开放研究项目(JYBG CZX2021104)

作者简介:姚兆明(1975—),男,教授,博士。研究方向:土体本构理论和岩土数值分析。E-mail:zhmyaoaust@126.com

*通信作者:汤海东, E-mail:hdtang2022@163.com

青藏高原地区冰碛土的力学性质和强度退化进行了研究。

以上大多数模型为整数阶模型,并没有引入分数阶的概念。但相较于整数阶模型,分数阶模型可以很好地描述非局部扩散过程,其模型参数更少、关联性好。目前,分数阶理论已经被广泛应用于岩土工程的各个领域。姚兆明等^[20]将分数阶导数引入指数模型,建立了人工冻土单轴压缩下的应力-应变分数阶指数模型,能准确地预测单轴压缩、三轴剪切应力-应变曲线的变化趋势;Lu等^[21]基于分数阶导数和协变变换,建立了土体的3维分数阶弹塑性模型,能够描述土体在3维应力条件下的强度和变形特性;Wen等^[22]将3参数分数阶导数模型引入到具有热过滤和热渗透作用的热-水-力耦合控制方程中,以模拟海洋黏土的黏弹性特性;Qu等^[23]将分数阶微积分代入到弹塑性本构模型,并利用该模型描述岩石体积从压缩到膨胀的过渡过程;Cui等^[24]在黏弹性固结模型中引入分数阶导数Merchant(FDM)模型以模拟黏性土的黏弹性特征。Sun等^[25]针对颗粒土,建立了一个新的分数阶应力-剪胀模型,分析剪切后土壤应力-剪胀特性。

淮南地区深部分布着厚层钙质黏土^[26]。钙质黏土有冰点低、冻结后膨胀性大、遇水易崩解、强度低等特点^[27],对冻结法施工的要求较高。本文通过对淮南某矿区钙质黏土进行一系列三轴剪切试验,进而考虑冻结温度及围压对冻土应力-应变关系的影响并探究其变化规律。将分数阶微积分引入到双曲线模型建立冻结钙质黏土分数阶双曲线模型,从而得出冻结钙质黏土双曲线模型参数。研究结果可以为工程实践提供一定的理论依据。

1 冻结钙质黏土三轴剪切试验

1.1 试验方案

试验土样为原状钙质黏土,取自淮南某矿区。取样深度为139~180 m,现场取样如图1所示,土样的各项基本物理参数见表1。

将从现场取回的土样加工成直径50 mm、高100 mm的标准圆柱形试样。制作完成的原状土样如图2所示。在三轴压力仓中对试样进行固结,并在固结完成后进行24 h冻结养护。试验方案见表2。

试验采用安徽理工大学冻土实验室W3Z-200型冻土三轴试验机,分别在-5 °C、-10 °C、-15 °C温度下进行试验。试验采用恒应变率加载,加载速率为1%/min,当试验满足轴向应变达到20%、试验力降低20%或者轴向应力达到峰值后轴向应变增加3%这3个条件中

任意一个条件时,试验自动停止。试验完成后的冻结钙质黏土土样如图3所示。由图3可见,试样呈塑性破坏。



图1 现场取样

Fig. 1 Field sampling

表1 土样基本物理参数

Tab. 1 Basic physical parameters of soil samples

含水率/%	干密度/(g·cm ⁻³)	液限/%	塑限/%
22.62	1.66	38.8	21.9



图2 原状土样

Fig. 2 Undisturbed soil samples

表2 试验方案

Tab. 2 Test plans

用途	温度 T/°C	围压 σ_3 /MPa
确定模型参数	-5	5
	-10	0
	-10	1
	-10	3
	-10	5
模型验证	-15	5
	-5	0
	-15	0
	-8	1
	-8	3
	-8	5



图3 试验结束的土样

Fig. 3 Soil samples after tests

1.2 试验结果分析

根据表2试验方案得出冻结钙质黏土应力-应变曲线如图4所示。由图4(a)、(b)可知,围压相同时,钙质黏土在不同温度条件下的应力-应变关系曲线均呈现应变硬化的趋势,主要经历3个阶段^[15]:第1阶段为压密阶段,该阶段土样在轴向压力作用下变得愈发密实;第2阶段为弹性变形阶段,该阶段应力-应变关系曲线近似线性增长;第3阶段为塑性屈服阶段,随着应变的增加,应力缓慢增长,土体出现不可恢复的塑性变形,直至其应力达到最大值,土体表面出现微小裂缝且随着应变的继续增大,裂缝贯通土体直至破坏。随着温度的降低,冻结黏土强度增大,这是因为温度越低,冻土中未冻水的含量越低,冰结晶含量越高,冰颗粒与土颗粒产生胶结力增大,使得冻土整体的强度增强。由图4(c)、(d)可以看出,当温度 T 一定时,冻结钙质黏土的抗剪强度随着围压的增大而增大,且随着围压的增大近似呈现线性增长。当 $T=-8\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时,围压为3、5 MPa时的冻结钙质黏土的强度分别比当围压为1 MPa时提高了0.31、0.61 MPa;当 $T=-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时,围压3、5 MPa时的冻结钙质黏土强度分别比1 MPa时提高0.31、0.65 MPa。造成此现象的主要原因是随着围压的增大,土体内的缝隙会因外部压力增大而减少,使得土体变得更加紧密,土体强度增大。

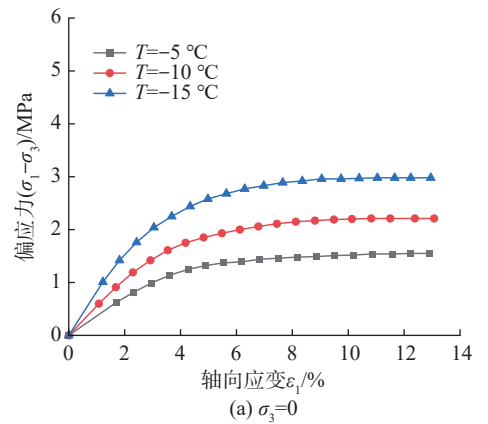
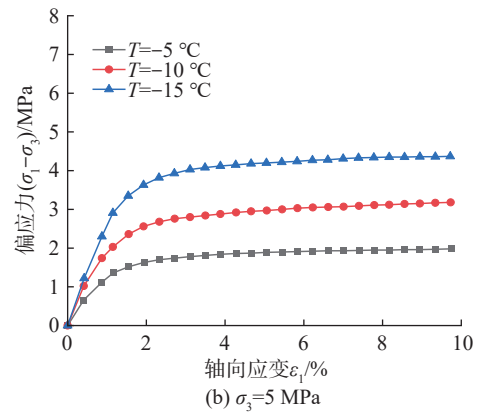
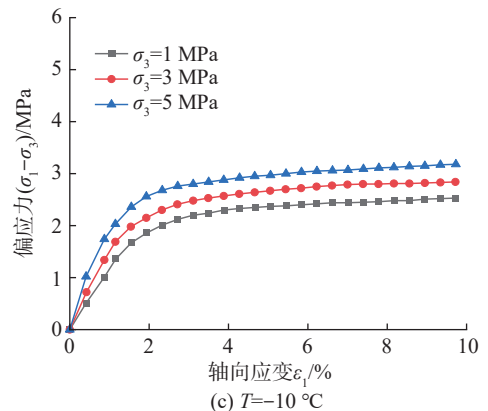
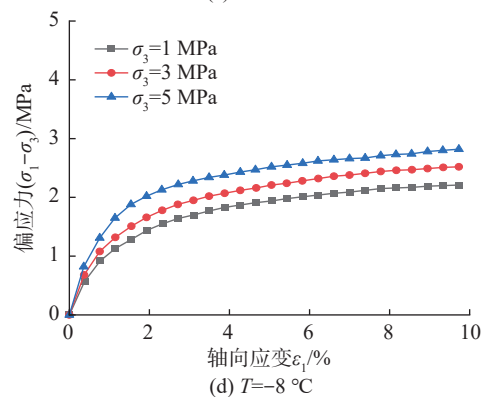
(a) $\sigma_3=0$ (b) $\sigma_3=5\text{ MPa}$ (c) $T=-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ (d) $T=-8\text{ }^{\circ}\text{C}$

图4 不同温度和围压条件下冻结钙质黏土的应力-应变关系曲线

Fig. 4 Stress-strain relationship curves of frozen calcareous clay under different temperatures and confining pressures

2 冻结钙质黏土分数阶双曲线模型

邓肯-张双曲线模型作为目前应用最广泛的非线性弹性本构模型,其物理意义明确,能够反映土体应力-应变关系的非线性,且模型参数易求解,只需要三轴剪切试验即可确定。冻土是由土颗粒、冰、未冻水及气体组成的材料,其内部不同物质间存在着相互作用,这使得冻土的力学性质复杂。冻土的应力-应变性质可看成是理想固体和理想流体以某种比例进行混合,其力学特性既不符合胡克定律,也不遵守牛顿黏性定律,而是遵守介于它们之间的某种关系。基于邓肯-张双曲线模型,引入分数阶微积分,不仅完全保留了邓肯-张模型意义明确、参数易于确定的优势,还可很好地描述应力-应变介于理想弹性与理想塑性间的特性。

2.1 分数阶微积分的定义

Riemann-Liouville 型分数阶微积分算子对函数 $f(t)$ 的 β 阶积分定义为^[28]:

$$\frac{d^{-\beta} f(t)}{dt^{-\beta}} = {}_{t_0} D_t^{-\beta} f(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

分数阶微分定义为:

$$\frac{d^{\beta} f(t)}{dt^{\beta}} = {}_{t_0} D_t^{\beta} f(t) = \frac{d^n ({}_{t_0} D_t^{-(n-\beta)} f(t))}{dt^n} \quad (2)$$

式(1)~(2)中: D 为分数阶微积分算子; t_0 为下限, $t > t_0$; β 为分数阶阶数, $\beta > 0$,且 $n-1 < \beta \leq n$ (n 为正整数); τ 为自变量; $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数,其定义如式(3)所示。

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \text{Re}(z) > 0 \quad (3)$$

式中, $\text{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部。

对于函数 $f(x) = cx$ (c 为常数),当 $0 \leq \beta \leq 1$ 时,其分数阶微分为:

$$\frac{d^{\beta} f(x)}{dt^{\beta}} = \frac{c}{\Gamma(2-\beta)} x^{1-\beta}, 0 \leq \beta \leq 1 \quad (4)$$

2.2 分数阶双曲线模型的建立

试验采用恒应变率加载,对于轴向应变 ε_1 随时间 t 变化的函数 $\varepsilon_1 = v_0 t$ (v_0 为试验轴向加载速率,本文取 1%/min),根据式(4),其分数阶微分为:

$$\frac{d^{\beta} \varepsilon_1}{dt^{\beta}} = \frac{v_0}{\Gamma(2-\beta)} t^{1-\beta} \quad (5)$$

将 $t = \varepsilon_1 / v_0$ 代入到式(5)中可得:

$$\frac{d^{\beta} \varepsilon_1(t)}{dt^{\beta}} = \frac{v_0^{\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \varepsilon_1^{1-\beta} \quad (6)$$

根据邓肯-张双曲线模型,在常规三轴试验中,有

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \quad (7)$$

式中, σ_1 为轴向应力, σ_3 为围压, a, b 为参数。

对式(7)进行变形,并对 ε_1 求 β 阶导数,再将式(6)代入到式(7)中,可得:

$$\frac{v_0^{\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \varepsilon_1^{1-\beta} = a + b \frac{v_0^{\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \varepsilon_1^{1-\beta} \quad (8)$$

令

$$C = \frac{v_0^{\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \varepsilon_1^{1-\beta} \quad (9)$$

则

$$\frac{C}{\sigma_1 - \sigma_3} = a + bC \quad (10)$$

2.3 分数阶双曲线模型参数的确定

考虑围压和温度的影响,进行 6 组三轴正交试验,得出 6 组强度值见表 3。

表 3 三轴正交试验下的土体强度值

温度 $T/^\circ\text{C}$	σ_3/MPa			
	0	1	3	5
-5				1.98
-10	2.21	2.53	2.84	3.18
-15				4.37

式(10)为 1 次函数的形式,故 $\frac{C}{\sigma_1 - \sigma_3} - C$ 拟合直线的斜率和截距即为参数 a, b 的取值。由于本文描述的应力-应变曲线均为硬化型曲线,故 β 的取值为 $[0, 1]$ ^[28]。

现对 β 值进行确定。在 $T = -10^\circ\text{C}, \sigma_3 = 0$ 条件下,分别取 β 为 0.1、0.2、...、0.9 代入式(10),再引入冻结钙质黏土的应力-应变数据,可以得到 9 组 β 值的 $\frac{C}{\sigma_1 - \sigma_3} - C$ 曲线如图 5 所示。由图 5 可知,当 $\beta = 0.1$ 时,曲线最接近线性。同时,对剩下 5 组数据采用相同的方法确定 β 值,结果表明,仍当 β 为 0.1 时,曲线的拟合直线最接近线性,故取 β 为 0.1。

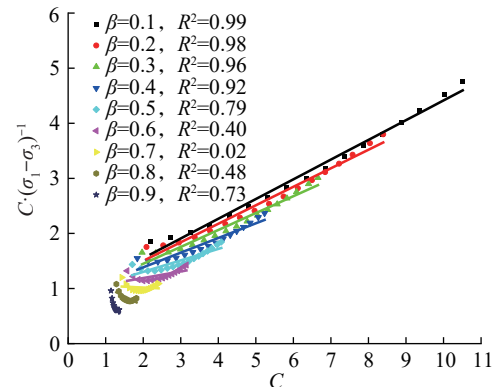


图 5 $T = -10^\circ\text{C}, \sigma_3 = 0$ 时不同 β 取值的参数拟合曲线
Fig. 5 Parameter fitting curves for different values of β at $T = -10^\circ\text{C}, \sigma_3 = 0$

图 6 为 $\beta=0.1$ 时剩下 5 组试验数据的拟合曲线。

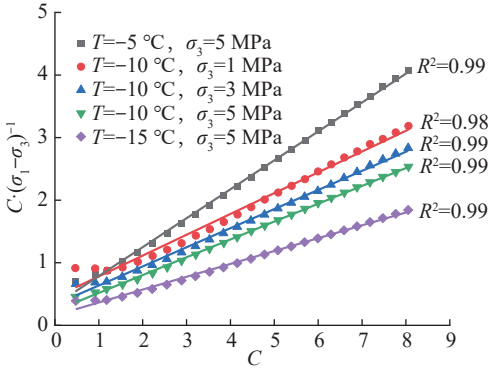


图 6 $\beta=0.1$ 时的另外 5 组数据参数拟合曲线

Fig. 6 Fitting curves of another 5 sets of data parameters when $\beta=0.1$

结合图 5、6 可得出拟合直线的截距和斜率,即参数 a 、 b 的取值,结果见表 4、5。

表 4 不同温度和围压下分数阶模型参数 a 的取值

Tab. 4 Values of parameter a in the fractional-order model under different temperatures and confining pressures

温度 $T/^\circ\text{C}$	σ_3/MPa			
	0	1	3	5
-5				0.33
-10	0.84	0.45	0.33	0.23
-15				0.16

表 5 不同温度和围压下分数阶模型参数 b 的取值

Tab. 5 Values of parameter b in the fractional-order model under different temperatures and confining pressures

温度 $T/^\circ\text{C}$	σ_3/MPa			
	0	1	3	5
-5				0.46
-10	0.35	0.33	0.31	0.29
-15				0.21

对表 4 中的 6 组参数 a 值进行回归分析,可得到参数 a 与温度 T 、围压 σ_3 之间的关系为:

$$a(T, \sigma_3) = 0.017T - 0.094\sigma_3 + 0.851, R^2 = 0.83 \quad (11)$$

由表 5 可知, $T=-10^\circ\text{C}$ 时,参数 b 值在不同围压下极为接近,表明围压 σ_3 对 b 值影响不大,故只考虑温度的影响,其关系式为:

$$b(T) = 0.025T + 0.57, R^2 = 0.96 \quad (12)$$

由式(12)可知参数 b 使用线性拟合的优度达到了 0.96,说明其线性拟合精度较高,较为符合线性关系。

将式(11)、(12)代入式(10)可得出同时考虑温度和围压的人工冻土分数阶双曲线模型计算公式为:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{C}{(0.017T - 0.094\sigma_3 + 0.851) + (0.025T + 0.57)C} \quad (13)$$

式中, C 值计算参见式(9)。

2.4 模型验证

将第 2.3 节中的 6 组正交试验数据代入式(7)并进行

线性拟合,可以得出邓肯-张模型拟合直线的截距和斜率,即为该模型参数 a 、 b 的值,结果见表 6、7。

表 6 不同温度和围压下邓肯-张模型参数 a 的取值

Tab. 6 Values of Duncan-Chang model parameter a under different temperatures and confining pressures

温度 $T/^\circ\text{C}$	σ_3/MPa			
	0	1	3	5
-5				0.304
-10	1.035	0.413	0.308	0.219
-15				0.146

表 7 不同温度和围压下邓肯-张模型参数 b 的取值

Tab. 7 Values of Duncan-Chang model parameter b under different temperatures and confining pressures

温度 $T/^\circ\text{C}$	σ_3/MPa			
	0	1	3	5
-5				0.473
-10	0.354	0.349	0.317	0.293
-15				0.211

对上述两组数据均采用多元线性拟合可以得出参数 $a(T, \sigma_3)$ 、 $b(T, \sigma_3)$ 的拟合关系式为:

$$a(T, \sigma_3) = 0.016T - 0.121\sigma_3 + 0.944 \quad (14)$$

$$b(T, \sigma_3) = 0.021T - 0.026\sigma_3 + 0.674 \quad (15)$$

将 $a(T, \sigma_3)$ 、 $b(T, \sigma_3)$ 代入式(7),求得邓肯-张模型计算公式为:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a(T, \sigma_3) + b(T, \sigma_3)\varepsilon_1} \quad (16)$$

根据式(13)建立的冻结钙质黏土三轴分数阶双曲线模型和式(16)建立的邓肯-张模型分别计算出不同条件下的应力大小,并将其与试验值对比,结果如图 7、8 所示;计算其拟合优度,结果见表 8(标*的数据为分数阶双曲线模型的拟合优度,未标*的为邓肯-张模型的拟合优度,下同)。由图 7、8 可知,分数阶双曲线模型的计算结果与试验结果的吻合度好,说明该模型能很好地描述冻结钙质黏土的应力-应变规律。由表 8 可知,双曲线分数阶模型总体拟合效果优于邓肯-张模型。

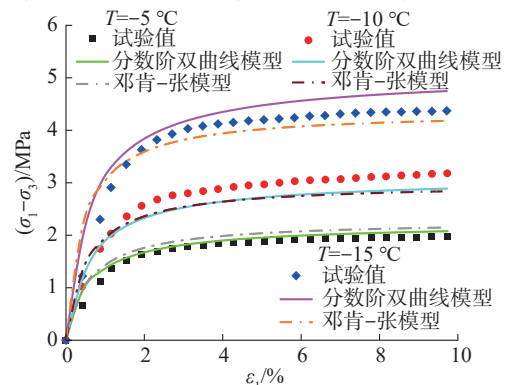


图 7 $\sigma_3=5 \text{ MPa}$ 时试验值与两种模型计算值对比

Fig. 7 Comparison of experimental values and calculated values from two models at $\sigma_3=5 \text{ MPa}$

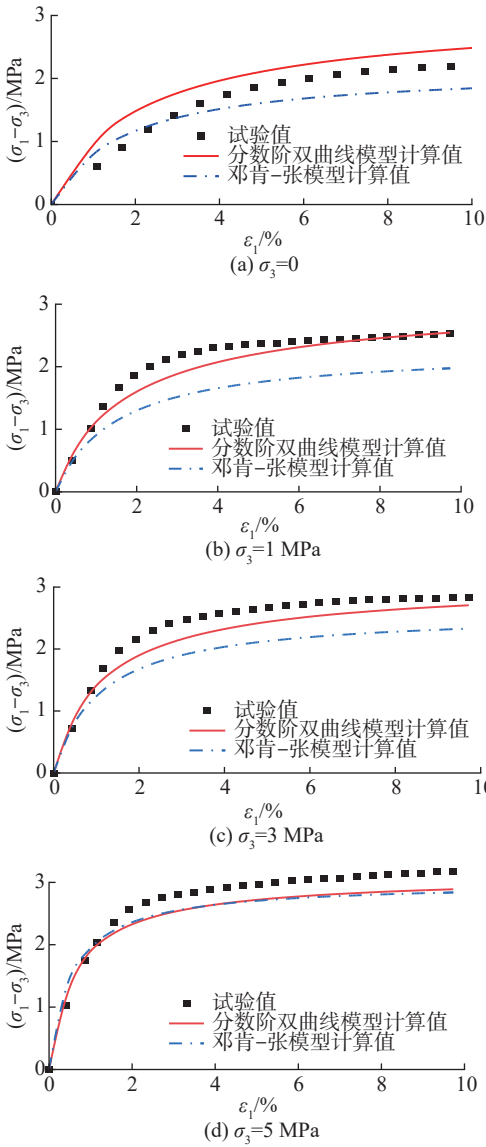


图 8 当 $T = -10\text{ }^\circ\text{C}$ 时试验值与两种模型计算值对比

Fig. 8 Comparison of experimental values and calculated values from two models at $T = -10\text{ }^\circ\text{C}$

表 8 确定参数组数据两种模型的拟合优度对比

Tab. 8 Comparison of goodness of fit between two models for determining parameter group data

温度 $T/^\circ\text{C}$	σ_3/MPa			
	0	1	3	5
-5				0.95*, 0.90
-10	0.83*, 0.84	0.92*, 0.74	0.91*, 0.79	0.91*, 0.90
-15				0.91*, 0.92

为验证模型普适性,对不同围压与温度的试验数据分别使用分数阶双曲线模型与邓肯-张模型进行模拟分析,如图 9、10 所示。比较两种模型计算值与试验值的拟合优度,结果见表 9。

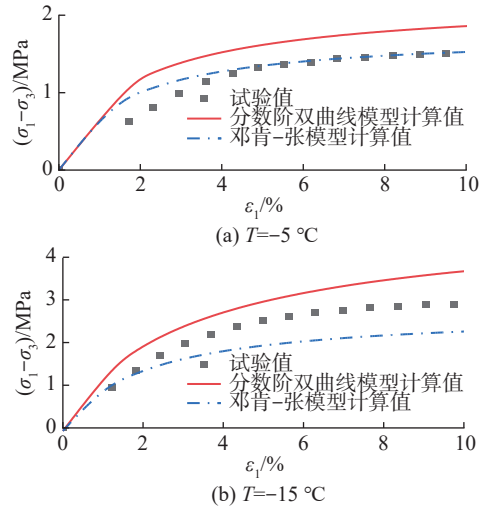


图 9 当 $\sigma_3 = 0$ 时,试验结果与两种数值模型计算结果的对比曲线

Fig. 9 Comparison curves of experimental values and calculated values from two models at $\sigma_3 = 0$

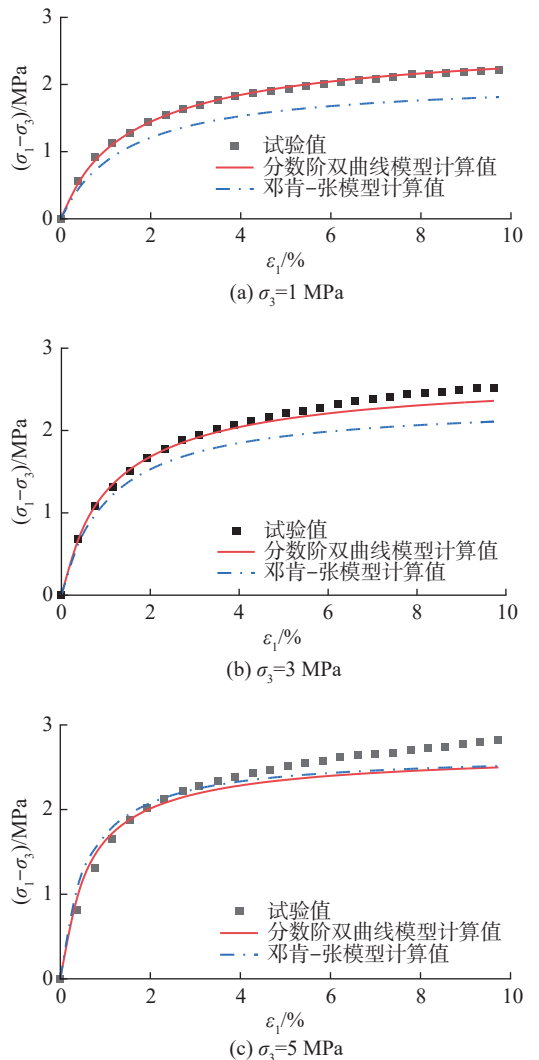


图 10 当 $T = -8\text{ }^\circ\text{C}$ 时试验值与两种模型计算值对比

Fig. 10 Comparison of experimental values and calculated values from two models at $-8\text{ }^\circ\text{C}$

表9 验证组数据两种模型拟合优度对比

Tab. 9 Comparison of goodness of fit between two models for validation group data

温度 $T/^\circ\text{C}$	σ_3/MPa			
	0	1	3	5
-5	0.74*, 0.92			
-8		0.99*, 0.83	0.95*, 0.86	0.92*, 0.92
-15	0.75*, 0.78			

由图9、10可知,冻结钙质黏土分数阶双曲线模型适用于三轴剪切试验。由表9可知,分数阶双曲线模型对试验值的模拟优于邓肯-张模型。

3 结 论

在分析冻结钙质黏土应力-应变规律的基础上,将分数阶微积分引入到双曲线模型,建立了冻结钙质黏土分数阶双曲线模型,进一步确定了模型参数,并与邓肯-张模型进行了对比,得出如下主要结论。

1)由冻结钙质黏土三轴剪切试验可知,在相同围压下,随着冻结温度的降低,钙质黏土峰值强度明显增大。当温度一定时,峰值强度随着围压的增大而增大且近似呈线性关系。

2)由冻结钙质黏土强度试验得出的应力-应变曲线均呈现硬化趋势,所建立的冻结钙质黏土分数阶双曲线模型能够很好地描述这种曲线硬化的趋势。模型适用范围广,可以同时考虑温度和围压,验证可知模型的拟合效果较好,参数较少并且易于确定。

3)与邓肯-张模型对比可知,所建立的冻结钙质黏土分数阶双曲线模型对三轴剪切试验有着更高的拟合精度,能够更好地描述冻土应力-应变介于理想弹性与理想塑性之间的特性。

由于本文是针对天然土体进行试验的,没有将含水量作为变量参数,如果工程中的含水量发生改变,一是可以根据文中提出的模型参数确定方法对参数进行重新确定;二是可在模型中引入含水量参数,对所建模型进一步修正,这将是作者下一步的研究内容。

参考文献:

[1] Zheng Lifu, Gao Yongtao, Zhou Yu, et al. Research on surface frost heave and thaw settlement law and optimization of frozen wall thickness in shallow tunnel using freezing method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2020, 41(6): 2110–2121. [郑立夫,高永涛,周喻,等.浅埋隧道冻结法施工地表冻胀融沉规律及冻结壁厚度优化研究[J].*岩土力学*, 2020,41(6):2110–2121.]

[2] Wang Yanting, Wang Lei, Li Fangzheng, et al. Experiment and engineering measurement of frost heave characteristics of the frozen double-track tunnel underpass an operation station[J]. *Advanced Engineering Sciences*, 2022, 54(6):157–165. [王延廷,王磊,李方政,等.双线冻结隧道下穿车站冻胀特性模型试验与工程实测[J].*工程科学与技术*,2022,54(6):157–165.]

[3] Liu Qinlong, Li Xu, Yao Zhaoming, et al. Strength characteristics of frozen soil and the main controlling factors: A review[J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2023, 45(3):1092–1104. [刘勤龙,李旭,姚兆明,等.冻土强度特性及其主控因素综述[J].*冰川冻土*,2023,45(3):1092–1104.]

[4] Wu Zhang, Wang Xiaodong, Wu Guanghui, et al. Mechanism and control technology of water inrush from shaft freezing holes after thawing[J]. *Coal Geology & Exploration*, 2015, 43(1):35–42. [吴璋,王晓东,武光辉,等.井筒冻结孔解冻涌水发生机制及其控制技术[J].*煤田地质与勘探*,2015,43(1):35–42.]

[5] Shi Sheng, Zhu Fengjin, Feng Decheng, et al. Mechanical behaviors and elastoplastic damage constitutive model for heterogeneous frozen soil[J]. *Geomechanics for Energy and the Environment*, 2023, 35:100490.

[6] Sun Zhizhong, Zhang Shujuan, Wang Yapeng, et al. Mechanical behavior and microstructural evolution of frozen soils under the combination of confining pressure and water content[J]. *Engineering Geology*, 2022, 308:106819.

[7] Zhu Fengpan, Zhao Xiaodong, Li Junhu, et al. Experimental study on direct shear force characteristics of undisturbed permafrost at high temperature based on different sample cutting angles[J]. *Journal of Chengdu University of Technology (Science & Technology Edition)*, 2022, 49(5): 616–622. [朱锋盼,赵晓东,李俊虎,等.基于不同切样角度的高温原状多年冻土直剪力学特性试验研究[J].*成都理工大学学报(自然科学版)*,2022,49(5):616–622.]

[8] Zhang Hongpeng, Ma Qinyong, Huang Kun, et al. Strength and deformation analysis of frozen sand under different stress paths using triaxial test[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2023, 44(5):1477–1486. [张鸿朋,马芹永,黄坤,等.冻结砂不同应力路径三轴试验强度和变形分析[J].*岩土力学*, 2023,44(5):1477–1486.]

[9] Huang Kun, Tang Haoran, Ma Dongdong, et al. Mechanical properties and constitutive model of artificial frozen sandy soils under true triaxial stress state conditions[J]. *Case Studies in Thermal Engineering*, 2024, 61:105026.

- [10] Xiang Bo, Liu Enlong, Yang Liuxin. Influences of freezing–thawing actions on mechanical properties of soils and stress and deformation of soil slope in cold regions[J]. *Scientific Reports*, 2022, 12: 5387.
- [11] Ana M P, Gustav G, Gudmund R, et al. A macro-element model for multidirectional cyclic lateral loading of monopiles in clay[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, 106, 314–326.
- [12] Seyedi M, Bayat E E E. A Modified empirical model for predicting liquefaction in partially saturated sands[J]. *Geotechnical and Geological Engineering*, 2025, 43(5): 159–159.
- [13] Ma Wenjie, Wang Xu, Wang Binglong, et al. Torsional vibration of a pipe pile in unsaturated cross-anisotropic soil based on the fractional viscoelastic model[J]. *Ocean Engineering*, 2024, 313(P3): 119483–119483.
- [14] Shi Zhenhao, Huang Maosong. Intergranular-strain elastic model for recent stress history effects on clay[J]. *Computers and Geotechnics*, 2020, 118103316–103316.
- [15] Zhang Qiumin, Pei Lihua, Gui Yue, et al. Research on modified Duncan–Chang model for strong structured clay[J]. *Hydro-Science and Engineering*, 2022(2): 117–125. [张秋敏, 裴利华, 桂跃, 等. 适用于强结构性黏土的修正邓肯–张模型研究[J]. *水利水运工程学报*, 2022(2): 117–125.]
- [16] Tan Weijia, Wei Yunjie, Wang Junhao, et al. The Duncan–Chang statistical damage correction model of unsaturated soil considering matric suction[J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2022, 49(1): 84–91. [谭维佳, 魏云杰, 王俊豪, 等. 考虑基质吸力的非饱和土邓肯–张统计损伤修正模型[J]. *水文地质工程地质*, 2022, 49(1): 84–91.]
- [17] Zhu Jianfeng, Xu Riqing, Luo Zhanyou, et al. Modified Duncan–Chang constitutive model for soft soil stabilized by magnesium oxysulfate cement considering three effect factors[J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2020, 51(7): 1989–2001. [朱剑锋, 徐日庆, 罗战友, 等. 考虑3种因素影响的硫氧镁水泥固化土修正邓肯–张模型[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2020, 51(7): 1989–2001.]
- [18] Shi Shengzhu, Zhang Feng, Tang Kangwei, et al. A nonlinear interface structural damage model between ice crystal and frozen clay soil[J]. *Sciences in Cold and Arid Regions*, 2021, 13: 150–166.
- [19] Qiu Enxi, Pan Hongyu, He Qiaoling, et al. Tests on the mechanical properties of moraine soils under freeze-thaw conditions and the modified Duncan–Zhang model[J]. *Journal of Engineering Geology*, 2024, 32(3): 772–784.
- [20] Yao Zhaoming, Song Zihao, Chen Junhao, et al. Determination of parameters and validation of fractional order derivative stress–strain index model for artificial permafrost[J]. *Journal of China Coal Society*, 2024, 49(Supp1): 286–294. [姚兆明, 宋梓豪, 陈军浩, 等. 人工冻土分数阶导数应力–应变指数模型参数确定及验证[J]. 2024, 49(增1): 286–294.]
- [21] Lu Dechun, Liang Jingyu, Du Xiuli, et al. Fractional elastoplastic constitutive model for soils based on a novel 3D fractional plastic flow rule[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, 105: 277–290.
- [22] Wen Minjie, Li Lichen, Qiu Xinchun, et al. Semianalytical solution for thermal consolidation of viscoelastic marine clay with the fractional order derivative[J]. *Advances in Civil Engineering*, 2022, 2022(1): 9184338.
- [23] Qu Pengfei, Zhu Qizhi, Sun Yifei. Elastoplastic modelling of mechanical behavior of rocks with fractional-order plastic flow[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 163: 105102.
- [24] Cui Penglu, Cao Wengui, Xu Zan, et al. Analysis of one-dimensional consolidation of fractional viscoelastic saturated soils under continuous drainage boundary conditions[J]. *Journal of Central South University*, 2022, 29(11): 3745–3756.
- [25] Sun Yifei, Sumelka W, Gao Yufeng, et al. Phenomenological fractional stress–dilatancy model for granular soil and soil-structure interface under monotonic and cyclic loads[J]. *Acta Geotechnica*, 2021, 16(10): 3115–3132.
- [26] Wang Zhi. Study on physical and mechanical characteristics of artificial freezing of deep-buried calcareous clay in Huaibei mining area[D]. Huainan: Anhui University of Science & Technology, 2022. [王志. 两淮矿区深埋钙质黏土人工冻结物理力学特性研究[D]. 淮南: 安徽理工大学, 2022.]
- [27] Ma Maoyan, Cheng Hua, Rong Chuanxin. Freezing construction technology for main shaft of Yangcun Coal Mine in deep and thick calcareous clay layer[J]. *Coal Engineering*, 2017, 49(9): 14–18. [马茂艳, 程桦, 荣传新. 杨村煤矿主井深厚钙质粘土层冻结施工技术[J]. *煤炭工程*, 2017, 49(9): 14–18.]
- [28] Yin Deshun, He Chengliang, Chen Wen. Theory of geotechnical strain hardening index and its rationale from fractional order calculus[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, 32(5): 762–766. [殷德顺, 和成亮, 陈文. 岩土应变硬化指数理论及其分数阶微积分理论基础[J]. *岩土工程学报*, 2010, 32(5): 762–766.]

Determination and Verification of Parameters for the Fractional Order Hyperbolic Model of Triaxial Shear for Frozen Calcareous Clay

YAO Zhaoming^{1,2}, TANG Haidong^{1,2*}, LAI Longhui^{1,2}

(1.College of Civil Engineering, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China;

2.Engineering Research Center of Underground Mine Construction, Ministry of Education, Huainan 232001, China)

Abstract: Calcareous clay strata present significant engineering geological challenges, including low freezing temperatures, substantial post-freezing expansion, high susceptibility to disintegration in water, and low strength. These properties readily cause excessive deformation or fracture of freezing pipes during construction, representing a major obstacle in artificial ground freezing (AGF) projects. Establishing an accurate constitutive model for calcareous clay freezing walls is therefore a critical element of their design. A series of triaxial shear tests is performed on calcareous clay retrieved from a mining area in Huainan. Field samples are prepared into standard cylindrical specimens (50 mm diameter, 100 mm height). Specimens are first consolidated within a triaxial pressure chamber and subjected to 24 h freezing curing. Testing is conducted using the W3Z-200 frozen soil triaxial apparatus at Anhui University of Science and Technology's frozen soil laboratory. Test parameters include a strain rate of 1%/min, temperatures of -5, -10, and -15 °C, and confining pressures of 0, 1, 3, and 5 MPa. Experimental stress-strain relationships for the frozen soil are obtained. The Duncan-Chang hyperbolic model is enhanced by incorporating fractional calculus, resulting in a fractional hyperbolic model specifically for frozen calcareous clay. The parameters of this model are determined, and its performance is compared against the original Duncan-Chang model. Triaxial shear tests on frozen calcareous clay reveal that, under constant confining pressure, its peak strength increases significantly with decreasing temperature. In contrast, at constant temperature, peak strength increases approximately linearly with increasing confining pressure. The stress-strain curves exhibit distinct strain-hardening behavior. The fractional hyperbolic model accurately captures this hardening characteristic. This model demonstrates broad applicability, effectively accounting for the simultaneous influence of both temperature and confining pressure. Validation confirms its good-fitting performance, while its relatively few parameters facilitate simple determination. This study utilizes natural soil samples and does not consider variations in water content as an experimental parameter. If moisture content differs significantly in specific engineering applications, the model parameters can be re-determined using the methodology proposed herein. Future research focuses on incorporating moisture content parameters directly into the model for further refinement.

Key words: calcareous clay; hyperbolic model; stress-strain curve; fractional-order calculus

(编辑 李轶楠)

引用格式: Yao Zhaoming, Tang Haidong, Lai Longhui. Determination and verification of parameters for the fractional order hyperbolic model of triaxial shear for frozen calcareous clay[J]. *Advanced Engineering Sciences*, 2025, 57(5): 192-200. [姚兆明, 汤海东, 赖龙辉. 冻结钙质黏土三轴剪切分数阶双曲线模型参数确定及验证[J]. *工程科学与技术*, 2025, 57(5): 192-200.]