

• 机械工程 •

DOI:10.12454/j.jsuese.202300906



本刊网刊

## 空间曲柄摇杆机构极限位置综合的几何方法

王瀚超<sup>1</sup>, 郭颖颖<sup>1</sup>, 林松<sup>2</sup>, 江竞宇<sup>2</sup>

(1. 龙岩学院 物理与机电工程学院, 福建 龙岩 364030; 2. 同济大学 机械与能源工程学院, 上海 201804)

**摘要:**为了解决由空间曲柄摇杆(revolute-sphere-sphere-sevolute, RSSR)机构的极位夹角及极限位置确定机构尺度的问题,进一步提高综合过程的直观性及透明度,本文利用几何综合方法,从直线二位置的空间运动几何学规律出发,提取出直线二位置变化的几何特征,实现了运动学问题向几何学问题的转化。利用二平面投影系统,建立了直线二位置的线导引模型,实现了运动几何学问题由空间向平面的转化,并为 RSSR 机构的极限位置综合过程奠定了理论基础。进一步对 RSSR 机构极限位置的几何特性展开研究,确定出摇杆在极限位置时曲柄与连杆的几何位置关系,利用圆心角定理,确定出符合极位夹角的机架位置,并将机构的极限位置综合问题向函数生成问题转化。利用相对运动理论(运动反转法),将函数生成问题转化为线导引模型的求解,由此拟定出一套综合流程相对统一的空间曲柄摇杆机构极限位置综合的几何流程。最终,通过综合算例,进一步验证了该套几何综合方法的有效性。与现有极限位置综合方法相比,该几何操作流程直观性强、透明度高、设计自由度广,与现代几何作图工具相结合可快速完成综合工作。

**关键词:**空间曲柄摇杆机构;极限位置综合;几何法;二平面投影系统;线导引模型

**中图分类号:**TH112

**文献标志码:**A

**文章编号:**2096-3246(2025)05-0309-11

机构运动综合问题的研究历史悠久,其中,平面连杆机构的综合理论研究成果最为丰富。与平面连杆机构相比,空间连杆机构可实现空间异面传动任务,其组合应用也更灵活多变,可以应用至多个平面机构组合或平面机构根本无法实现的应用场合。然而,在实际工程应用中,空间连杆机构的应用却相对较少,主要原因是空间连杆机构的运动相对复杂,不易直接想象,很难用试凑法直观获得结果。因此,对空间连杆机构综合理论的研究变得尤为重要。

目前,已有众多学者对解决空间连杆机构尺度综合问题进行研究,主要研究方法可划分为 3 个大类:图谱法<sup>[1-2]</sup>、解析法<sup>[3-4]</sup>和几何法(图解法)<sup>[5-7]</sup>。其中,几何法较其他两类综合方法在先天上就具有更强的设计直观性,工程设计人员在综合过程中可以清晰地知道每一步综合过程背后的几何含义,从设计任务到综合结果的整个设计流程是贯通的,这种设计的贯穿性带来了设计的透明度,有利于工程设计人员根据需求选择适合实际工况的综合结果。由此,本文采用具有高

度设计贯穿性和透明度的几何法来解决空间曲柄摇杆(revolute-sphere-sphere-sevolute, RSSR)机构的极限位置综合问题。

几何法又称图解法,该方法一般建立在平面/空间运动几何学原理<sup>[5]</sup>之上,随后利用制图的方式实现机构尺度综合的过程。Burmester<sup>[6]</sup>、Ceccarelli<sup>[7]</sup>等于 19 世纪末系统地提出了平面连杆机构有限分离位置的运动几何学理论。即采用圆点、圆心点曲线求解平面机构运动生成、函数生成以及轨迹生成的问题。Grübler<sup>[8]</sup>运用平面运动几何学的理论,提出了平面连杆机构二、三位置函数综合的简单几何解法。Alt<sup>[9]</sup>结合 Burmester 理论将 Grübler 的函数综合的几何解法推广至 4、5 个位置,并利用该方法解决了变速箱中的机构综合问题。随后又进一步讨论了平面刚体运动的无限接近位置及平行位置所对应的圆点及圆心点曲线情况<sup>[10]</sup>。Zhao<sup>[11]</sup>、Lichtenheldt<sup>[12]</sup>、Hain<sup>[13]</sup>、Kiper<sup>[14]</sup>等将连杆机构的运动几何学理论与几何综合方法应用至更多的工程实际应用场景中,验证了理论的实用性及操

收稿日期:2023-11-13 修回日期:2024-04-02 网络出版日期:2024-06-03

基金项目:福建省自然科学基金资助项目(2022J05246);龙岩学院博士科研启动项目(LB2021014)

作者简介:王瀚超(1989—),男,讲师,博士。研究方向:机构非线性运动分析与综合。E-mail: whc120005@126.com

作的直观性。前人所建立的平面运动几何学模型为实现平面连杆机构尺度综合的几何过程奠定了坚实的理论基础,也有利于将平面机构综合的几何方法拓展应用到空间机构的尺度综合过程中<sup>[15-18]</sup>。

在解决机构的极限位置综合问题方面,Alt<sup>[19-21]</sup>利用圆心曲线及圆点曲线可进行分解的原理,实现了平面连杆机构更多位置数综合的简单几何解法,进一步汇总了对应于极点铰链四杆机构的各种特殊圆心曲线,为死点位置设计提供了基础<sup>[22-23]</sup>。Kerle<sup>[24]</sup>、Luck<sup>[25]</sup>等学者根据机构输入、输出构件两组对应位置及传动比设计满足平面曲柄摇杆机构极限位置的构件尺度,利用机构相应的圆点及圆心点曲线来解决综合问题,其最终综合结果为无穷解,结合传动角变化图可得到传动最有利的机构的解,方便进一步筛选求解结果,更有利于找到符合实际工况的综合结果。而对空间连杆机构的极限位置综合研究相对有限,范正通<sup>[26]</sup>、莫灿林<sup>[27]</sup>等通过旋转投影平面内投影元素的方法,利用旋转前后几何元素的相似关系实现了 RSSR 机构的极位综合。Lakshminarayana 等<sup>[28]</sup>使用图解方法,结合可以表达出机构真实转角等特殊投影平面,综合了可以获得规定摆角和急回特性的 RSSR 机构。平面连杆机构极限位置综合问题的求解思路多落脚在平面运动几何学原理之上,即运动几何学原理的研究为极限位置综合问题的解决提供了强大的理论基础。而空间连杆机构的极限位置综合问题大多从机构的结构特性入手,采用具体问题具体分析的求解思路,但这种求解思路使得综合过程缺少统一性,不利于工程设计人员应用。

针对这些问题,本文利用几何法的先天优势,在原理层面,从空间直线二位置的运动几何学原理出发,提取出与之对应的运动几何学特征,通过分析空间曲柄摇杆机构极限位置的几何特性,拟定出求解思路。在工具层面,利用维度变换,搭建起直观可视的几何操作环境;在方法层面,建立起一套流程相对统一的空间曲柄摇杆机构极限位置综合的几何流程。

## 1 直线二位置空间运动几何学模型的建立

空间机构实现给定的运动任务(运动生成、函数生成、轨迹生成)是通过连杆这一浮动构件来实现的,连杆空间运动的几何特性是揭示运动任务与机构尺度之间联系的重要枢纽。因此,本文首先以机构中的连杆为研究对象,将其简化为构件上的一条定直线,研究其在空间有限分析位置情况下的运动几何学规律,提取与之对应的运动几何学特征,建立起相应的运动几何学模型,进一步实现机构运动学问题向几何

学问题的转化,这是利用几何法实现机构尺度综合的必经环节。

### 1.1 直线二位置空间运动几何特征的提取

本团队在前期研究<sup>[29]</sup>中指出,一条空间直线  $g$  由无穷多的点  $(A, B, \dots)$  构成,这些点的系列称为空间直线  $g$  的系列点。当该直线在空间中由位置  $g_i$  运动到位置  $g_j$  时,系列点在运动前后始终保持在直线上相对固定的位置。这种随直线运动变化而保持相对位置不变的点,在运动前后互为同源点  $(A_i$  与  $A_j, B_i$  与  $B_j, \dots)$ 。系列点在空间中由位置  $g_i$  运动到位置  $g_j$  的方式有无穷多种,可以将点的运动看成按圆弧轨迹由位置  $g_i$  运动到位置  $g_j$ 。如图 1 所示,连接同源点  $A_i(B_i)$  与  $A_j(B_j)$  可得到过该线段中点  $A_{ij}(B_{ij})$  的中垂面  $a_{ij}(b_{ij})$ 。那么,直线  $g$  上的点  $A(B)$  可以绕中垂面  $a_{ij}(b_{ij})$  中的任意一条直线由位置  $A_i(B_i)$  运动到位置  $A_j(B_j)$ 。若希望点  $A$  与  $B$  旋转相同的角度  $\alpha_{ij}$ ,同时由位置  $g_i$  运动到位置  $g_j$ ,则运动的参考转轴为两中垂面  $a_{ij}$  与  $b_{ij}$  的交线  $\pi_{ij}$ 。这条交线称为空间直线二位置变化的几何特征——旋转轴,如图 1 所示。

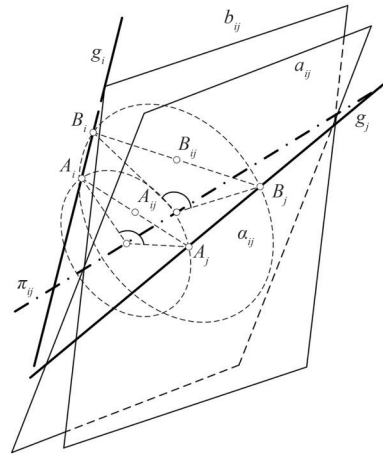


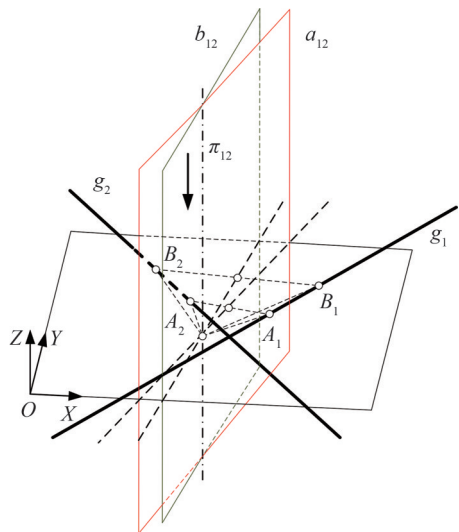
图 1 直线二位置运动变化的几何特征

Fig. 1 Geometric characteristics of a line with two positions

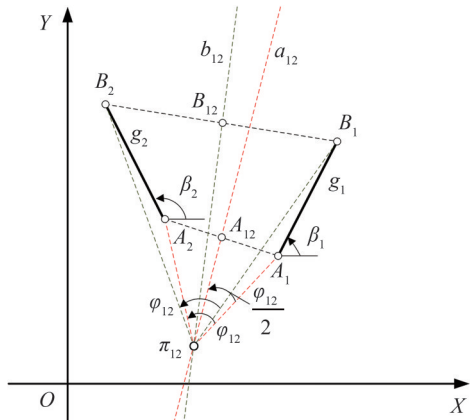
### 1.2 特殊直线二位置的空间运动几何特征

当一条直线的两个位置  $g_1$  与  $g_2$  位于同一平面内且相交的这种特殊空间位置时,根据第 1.1 节所述的空间直线二位置运动几何特征的提取过程,连接直线上的两组同源点  $A_1-A_2, B_1-B_2$  并作两连线的中垂面可得到平面  $a_{12}, b_{12}$ , 这两个平面相交于旋转轴  $\pi_{12}$ 。此时,平面  $a_{12}, b_{12}$  及旋转轴  $\pi_{12}$  均垂直于直线两个位置  $g_1$  与  $g_2$  所在的平面,如图 2(a) 所示。若按旋转轴所在直线的方向投影可得图 2(b)。平面  $a_{12}, b_{12}$  在俯视图中的投影变为迹线,旋转轴  $\pi_{12}$  变为点。此时,  $\angle A_1\pi_{12}A_2 = \angle B_1\pi_{12}B_2 = \varphi_{12}$ 。  $A_1$  与  $\pi_{12}$  的连线逆时针转过  $\varphi_{12}$  的半角为同源点中垂面的投影。当空间直线的两个位置在这

种特殊几何位置时,描述其空间运动的几何特征与 Burmester 理论中描述直线二位置的几何特征一致,旋转轴  $\pi_{12}$  的投影等效于极点的概念。这也间接验证了直线二位置空间运动几何学模型的正确性。



(a) 轴测图



(b) 投影图

图 2 特殊二位置直线的几何特征

Fig. 2 Geometric characteristics of a line with special two positions

## 2 直线二位置线导引模型的建立

为提高空间机构尺度综合过程的可视性及直观性,需要将空间运动几何学模型维度变换至平面系统中,同时建立起空间系统与平面系统之间真实量的对应关系。

### 2.1 投影方向的选择

当直线  $g$  在空间中占据两个位置  $g_1, g_2$  时,可得到空间直线二位置变化的几何特征——旋转轴  $\pi_{12}$ ,选择旋转轴  $\pi_{12}$  垂直于某一投影平面,以旋转轴  $\pi_{12}$  为轴线,且过同源点  $A_1-A_2(B_1-B_2)$  的圆周所在的平面均垂直于旋转轴  $\pi_{12}$ 。因此,当选择垂直于旋转轴  $\pi_{12}$  的投影平

面为主投影方向时,点  $A_1(B_1)$  按圆弧轨迹运动到点  $A_2(B_2)$  的真实转角  $\varphi_{12}$  也反映在该投影平面中,如图 3 所示。

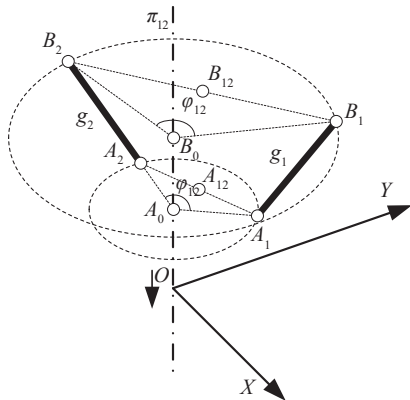


图 3 主投影方向的确定

Fig. 3 Determination of the main projection direction

### 2.2 投影系统变换

当直线  $g$  在空间中占据两个位置  $g_1, g_2$  时,点  $A, B$  为直线  $g$  上任意两点。在不指定特殊投影方向的情况下,将直线  $g$  的两个位置  $g_1, g_2$  及旋转轴  $\pi_{12}$  组成的直线系统投影至二平面投影系统  $X_{I, II}$  中。在主视投影平面 II 中可得到相应的投影为  $g_1''(\overline{A_1''B_1''}), g_2''(\overline{A_2''B_2''}), \pi_{12}''$ ; 在俯视投影平面 I 中可得到相应的投影为  $g_1'(\overline{A_1'B_1'}), g_2'(\overline{A_2'B_2'}), \pi_{12}'$ 。直线二位置的二平面投影如图 4 所示。

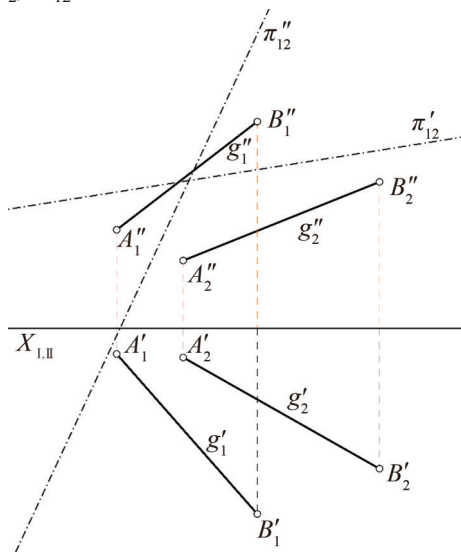


图 4 直线二位置的二平面投影

Fig. 4 Two-plane projections of a line with two positions

为了使旋转轴  $\pi_{12}$  垂直于某一投影平面,需对投影系统进行变换。过旋转轴的俯视投影  $\pi_{12}'$  作投影平面 III ( $\pi_{12}' = X_{I, III}$ , 投影平面 III 垂直于投影平面 I)。在投影平面 III 中,可以得到相应直线系统的主视图投影分别为  $g_1^{**}(\overline{A_1^{**}B_1^{**}}), g_2^{**}(\overline{A_2^{**}B_2^{**}}), \pi_{12}^{**}$ 。此时,旋转轴  $\pi_{12}$  真实的空间位置包含在投影平面 III 内,垂直于  $\pi_{12}^{**}$  作投影平

面Ⅳ(投影平面Ⅳ垂直于投影平面Ⅲ)。此时,旋转轴 $\pi_{12}$ 在投影平面Ⅳ内的投影为一点 $\pi_{12}^*$ ,并得到直线 $g_1$ 、 $g_2$ 的Ⅳ面投影 $g_1^*$ 、 $g_2^*$ ,如图5所示。

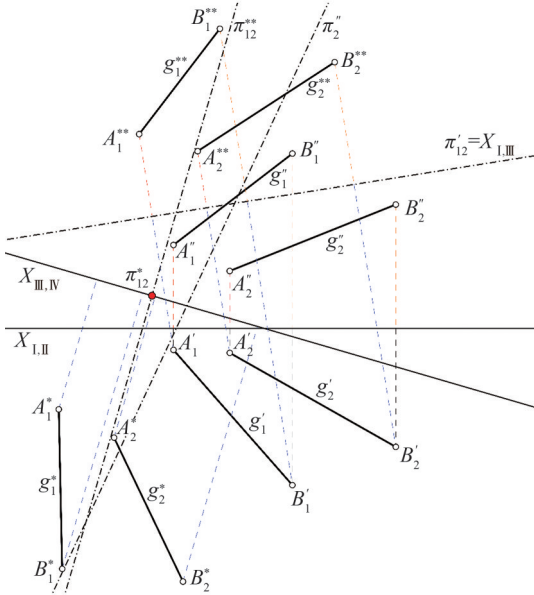


图5 构建辅助投影平面Ⅲ-Ⅳ

Fig. 5 Construction of projection plane III-IV

提取投影平面Ⅲ-Ⅳ作为直线系统新的二平面投影系统,至此完成了投影系统的一次变换,实现了运动几何学特征的最简描述,如图6所示。在该投影系统中,直线两位置的同源点与旋转轴之间存在特殊的几何关系。

1)在主视投影平面Ⅲ中,同源点的主视图投影到投影轴 $X_{III,IV}$ 的距离相等,如图6中, $A_1^{**}$ 到投影轴 $X_{III,IV}$ 的距离等于 $A_2^{**}$ 到投影轴 $X_{III,IV}$ 的距离。

2)在俯视投影平面Ⅳ中,同源点的俯视图投影到旋转轴的投影 $\pi_{12}^*$ 的距离都相等,如图6中, $A_1^* \pi_{12}^* = A_2^* \pi_{12}^*, B_1^* \pi_{12}^* = B_2^* \pi_{12}^*$ 。

3)在俯视投影平面Ⅳ中,同源点的投影与旋转轴的投影 $\pi_{12}^*$ 所构成的角度相等,即 $\angle A_1^* \pi_{12}^* A_2^* = \angle B_1^* \pi_{12}^* B_2^* = \dots = \alpha_{12}$ 。

4)在俯视投影平面Ⅳ中,直线 $g_1^*$ 上的点与旋转轴投影 $\pi_{12}^*$ 的连线绕点 $\pi_{12}^*$ 按直线 $g_1^*$ 运动到 $g_2^*$ 的方向旋转 $\alpha_{12}/2$ ,所得到夹角的另一边为该点同源点连线的中垂面投影。

5)在主视投影平面Ⅲ中,直线 $g$ 上两同源点所构成的中垂面与主视投影平面Ⅲ的迹线为旋转轴在投影平面Ⅲ的投影,即 $\pi_{12}^{**} = a_{12}^{**} = b_{12}^{**} = \dots$ 。

6)在俯视投影平面Ⅳ中,直线 $g_1^*$ 上两组同源点位间的距离 $\overline{A_1^* B_1^*}$ 等于 $g_2^*$ 上对应两组同源点位间的距离 $\overline{A_2^* B_2^*}$ 。

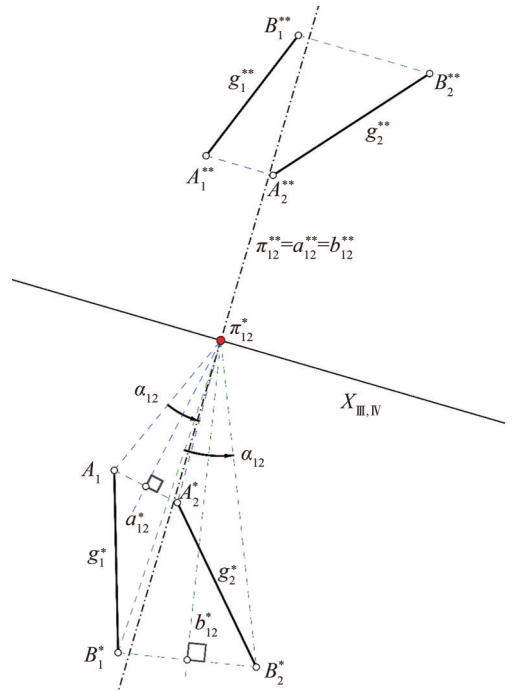


图6 直线系统在投影平面Ⅲ-Ⅳ的投影

Fig. 6 Projection of line system on projection plane III-IV

### 2.3 直线二位置线导引模型

若将点 $A$ 视为连杆铰链点,在二平面投影系统 $X_{III,IV}$ 中,将直线 $\overline{A^* \pi_{12}^*}$ 按 $g_1^* \rightarrow g_2^*$ 的方向旋转 $\alpha_{12}/2$ ( $\alpha_{12} = \angle A_1^* \pi_{12}^* A_2^*$ )。所得到夹角的另一边为同源点连线 $\overline{A_1^* A_2^*}$ 的中垂面投影 $a_{12}^*$ 。由于直线 $g$ 上的点 $A$ 可以绕中垂面 $a_{12}^*$ 中的任意一条直线由位置 $A_1$ 运动到位置 $A_2$ 。因此可以在中垂面投影 $a_{12}^*$ 上任取一点作为点 $A$ 在俯视图对应的机架铰链点,对应俯视图中机架转轴的方向与中垂面投影 $a_{12}^*$ 的方向一致。在主视投影平面Ⅲ中,直线 $g$ 上两同源点所构成的中垂面与主视投影平面Ⅲ的迹线为旋转轴在投影平面Ⅲ的投影。过机架铰链点在俯视图中的投影作 $X_{III,IV}$ 的垂线,对应的机架铰链点在主视图中的投影可以在该垂线上任意选取,机架转轴的方向同样可以在投影平面Ⅲ中任意选取。依据相同方法找到点 $B$ 在主俯视图对应的机架铰链点。连接所得到的机架点及连杆铰链点可构建出一个RSSR机构,直线二位置的线导引模型,如图7所示。

所构建出的RSSR机构连杆可以依次通过给定的空间直线的两个位置,称之为二位置的线导引投影模型。但由于连杆两端的运动副类型为球副,无法保证连杆通过时的姿态要求。若对连杆姿态有要求,则需要添加运动支链来进一步保证连杆通过时的姿态<sup>[14]</sup>。因此,综合出的RSSR机构不能直接用于实现空间机构的刚体导引任务,但使用该模型求解函数生成问题不存在上述缺陷。

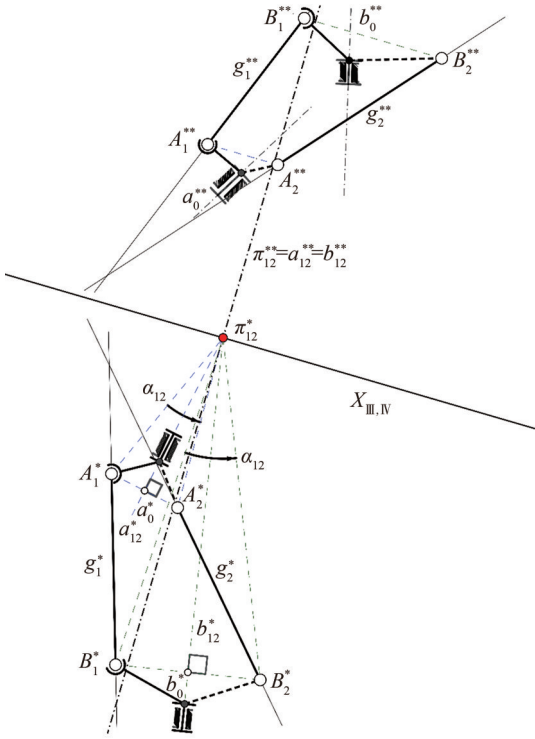


图 7 直线二位置的线导引模型

Fig. 7 Line-guidance model of a line with two positions

### 3 空间曲柄摇杆机构极限位置综合

直线二位置的空间运动几何学模型为空间连杆机构尺度综合过程提供了理论基础。线导引投影模型建立起了运动任务和机构尺寸之间的几何桥梁。接下来,从空间曲柄摇杆机构极限位置的几何特性入手,搭建起极限位置综合问题与函数生成问题之间转化的关系,这是建立综合流程相对统一的空间曲柄摇杆机构极限位置综合过程的关键环节。

#### 3.1 空间曲柄摇杆机构极限位置的几何分析

RSSR 机构  $A_0ABB_0$  极限位置的几何特性如图 8 所示。输入构件 1 整周转,输出构件 3 做往复摆动,连杆 2 做空间运动。连杆 2 在图示这一瞬时的运动也可看作绕速度瞬心线的瞬时旋转运动,即连杆 2 绕速度瞬心线  $P$  的瞬时旋转运动。速度瞬心线  $P$  为过构件 1 的正垂面 III 与过摇杆 3 的铅垂面 IV 的交线(主投影平面 II 垂直于构件 1 的转轴方向)。当连杆 2 运动至某一位置时,速度瞬心线  $P$  经过摇杆 3 上的  $B$  点,即此时摇杆 3 上  $B$  点相对于地面的绝对速度为 0,摇杆 3 在该瞬时处于运动的极限位置,连杆 2 运动至正垂面 III 上,故连杆 2 在主投影平面 II 上的投影与曲柄 1 重合。由此可得,当输出构件 3 处在两极限位置时,曲柄 1 与连杆 2 在主投影平面 II 上的投影处于拉直共线或重合共线的状态。

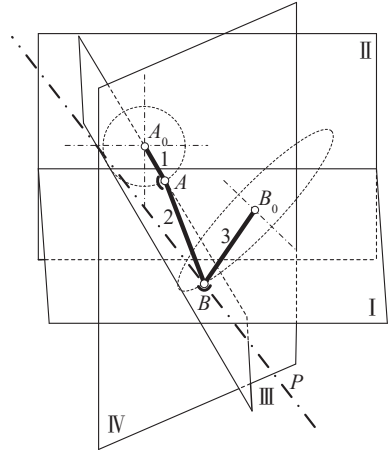


图 8 RSSR 机构极限位置的几何特性

Fig. 8 Geometric characteristics of the limit positions of RSSR mechanism

#### 3.2 空间曲柄摇杆机构的极位夹角

输出构件 3 处在  $B_0B_1$ 、 $B_0B_2$  两极限位置时,曲柄 1 与连杆 2 在主投影平面 II 上的投影处于拉直共线或重合共线的状态(主投影平面 II 垂直于构件 1 的转轴方向)。将机构在主投影平面 II 内进行投影,构件 1 转角真实值就反映在该平面内,机构的极位夹角如图 9 所示。曲柄 1 在摇杆 3 处于两极限位置时所夹锐角为  $\theta$ ,该角度即为 RSSR 机构的极位夹角(图 9),由此可得出该空间机构的行程速比系数  $k=(180^\circ+\theta)/(180^\circ-\theta)$ ,此系数直接反映出空间机构摇杆的急回程度。

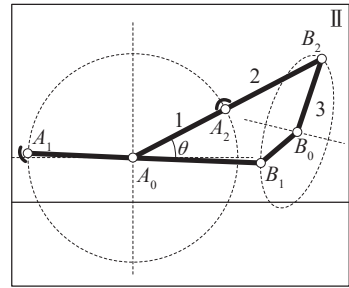


图 9 RSSR 机构的极位夹角

Fig. 9 Angle between the two limit positions of RSSR mechanism

#### 3.3 根据摇杆极限位置及极位夹角确定曲柄机架位置

对由给 RSSR 机构摇杆极限位置及极位夹角来确定机构尺度的综合问题而言,应首先确定出满足极位夹角的曲柄机架位置,再进一步确定各个构件的尺度。

在已知 RSSR 机构的极限位置及极位夹角后,先建立能反映构件 1 转角真实值的投影平面 II,即投影平面 II 垂直于构件 1 的转轴方向,如图 10 所示。在投影平面 II 内,过连杆铰链点  $B_1$ 、 $B_2$  作圆  $c$ ,可绘制出无穷多的圆  $c$ 。假设曲柄机架铰链点  $A_0$  也在该圆周上,即

存在无穷多位置的 $A_0$ 。

将 $A_0$ 分别与 $B_1$ 、 $B_2$ 连接,所形成的 $\angle B_2A_0B_1$ 即为该空间曲柄摇杆机构的极位夹角。由于 $A_0$ 的位置无穷多,无法保证所构成的 RSSR 机构的极位夹角为设计所要求的角度 $\theta$ 。但通过观察发现, $B_1$ 、 $B_2$ 与圆心 $O$ 的连线所构成的角为该圆 $\widehat{B_1B_2}$ 所对应的圆心角, $B_1$ 、 $B_2$ 与曲柄机架铰链点 $A_0$ 的连线所构成的角为该圆 $\widehat{B_1B_2}$ 所对应的圆周角。为了保证圆周角 $\angle B_2A_0B_1 = \theta$ ,根据圆心角定理,圆心角 $\angle B_2OB_1 = 2\theta$ ,RSSR 机构曲柄机架位置的确定,如图 10 所示。由此,曲柄机架铰链点 $A_0$ 的位置确定问题可转化为绘制一个过连杆铰链点 $B_1$ 、 $B_2$ ,且 $\widehat{B_1B_2}$ 所对应圆心角 $\angle B_2OB_1 = 2\theta$ 的圆的问题,曲柄机架铰链点 $A_0$ 可在该圆周上任意选取。

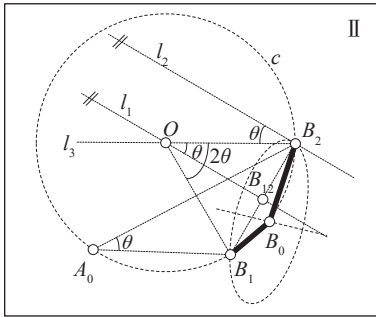


图 10 RSSR 机构曲柄机架位置的确定

Fig. 10 Determination of the fix joint position of the RSSR mechanism

满足上述几何条件的圆周绘制过程如下:

1) 绘制一个过连杆铰链点 $B_1$ 、 $B_2$ 的圆。连接点 $B_1$ 、 $B_2$ ,作 $B_1$ 、 $B_2$ 连线的中垂线 $l_1$ ,过连杆铰链点 $B_1$ 、 $B_2$ 圆的圆心在该条中垂线 $l_1$ 上,如图 10 所示。

2) 过连杆铰链点 $B_1$ 、 $B_2$ ,且 $\widehat{B_1B_2}$ 所对应圆心角 $\angle B_2OB_1 = 2\theta$ 的圆。过点 $B_2$ 作中垂线 $l_1$ 的平行线 $l_2$ ,将线 $l_2$ 绕点 $B_2$ 逆时针(或顺时针)转动极位夹角 $\theta$ ,得到转角的另外一条边 $l_3$ 。转角线 $l_3$ 与 $B_1$ 、 $B_2$ 中垂线 $l_1$ 的交点 $O$ 即为过连杆铰链点 $B_1$ 、 $B_2$ ,且 $\angle B_2OB_1 = 2\theta$ 的圆的圆心。

此时,以点 $O$ 为圆心, $\overline{OB_1}$ 长度为半径作圆 $c$ ,曲柄机架铰链点 $A_0$ 可在圆周 $c$ 上任意选取,均满足空间曲柄摇杆机构的极位夹角为 $\theta$ 。由此可得出,满足极位夹角 $\theta$ 的曲柄机架铰链点 $A_0$ 的位置为无穷解,这为空间曲柄摇杆机构的极位综合提供了较高的设计自由度。

### 3.4 极限位置综合问题向函数生成问题的转化

在确定了满足极位夹角的曲柄机架位置 $A_0$ 后,进一步确定曲柄及连杆尺寸,即确定连杆铰链点 $A$ 的位置。

当输出构件 $B_0B$ 处在两极限位置时,输入 $A_0A$ 与连杆 $AB$ 在主投影平面 II (主投影平面 II 垂直于输入

构件的转轴方向)上的投影处于拉直共线或重合共线的状态。此时,输入构件机架转轴点 $A_0$ 与连杆铰链点 $B$ 的连线 $A_0B$ 的距离也处于最短和最长两极值。由此,如果在主投影平面 II 内,输入构件 $A_0A$ 能经过与连杆 $AB$ 拉直共线或重合共线的两个位置,则输入构件 $A_0A$ 可以实现整周的回转运动。那么可将空间曲柄摇杆机构的极限位置综合问题转化为函数生成问题。

在已知 RSSR 机构摇杆的两极限位置 $B_0B_1$ 、 $B_0B_2$ 及极位夹角 $\theta$ 后,在主投影平面 II 内,已确定输入构件机架铰链点 $A_0$ 的位置,即在圆周 $c$ 上,极限位置综合问题转化为函数生成问题,如图 11 所示。

- 1) 在圆周 $c$ 上任取一点,作为输入构件机架铰链点 $A_0$ 。
- 2) 以 $A_0$ 为圆心,任意半径作圆 $d$ 。
- 3) 分别连接 $A_0B_1$ 、 $A_0B_2$ ,两条线分别与圆 $d$ 交于 $C_1$ 、 $C_2$ 两点。

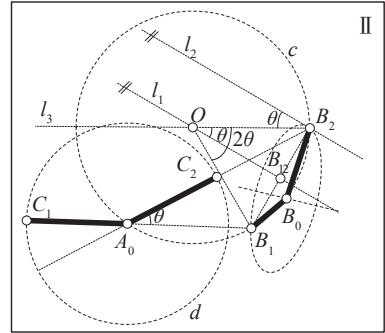


图 11 极限位置综合问题转化为函数生成问题

Fig. 11 Transformation from the limit position synthesis problem to function generation problem

由此,RSSR 机构的极限位置综合问题转化为函数生成问题的求解,即在输入构件位置标线 $A_0C$ 上确定出连杆铰链点 $A$ 的位置,满足输入构件位置 $A_0C_1$ ( $A_0C_2$ )对应输出构件位置 $B_0B_1$ ( $B_0B_2$ )即可。而函数生成问题通过利用相对运动理论,可将所选取的机构参考位置视为机架,对应构件的相对位置可以视为连杆的位置,这就将函数生成问题的求解转化为运动生成问题的求解。而运动生成问题又可以分解为一个或多个省略刚体姿态信息,仅满足构件位置信息的组合。前文所构建的线导引模型正是在已知连杆这一浮动构件上某一定直线空间位置的情况下,确定机构中关键尺寸参数的模型。由此,RSSR 机构的极限位置综合问题可进一步转化为线导引模型的求解问题。

由此,RSSR 机构极限位置综合的一般几何操作流程如图 12 所示,可概括如下:

- 1) 根据极位夹角确定机架位置:任意选定输入构件的机架转轴的方向,构建二平面投影系统(主投影平面垂直于输入构件转轴方向),将运动任务投影至

该二平面投影系统中,利用圆心角定理确定输入构件的机架位置(图 12 中输入、运算模块)。

2) 极限位置综合问题向函数生成问题的转化:利用机构极限位置的几何特点,将极限位置的综合问题,转化为输入、输出构件位置一一对应的函数生成问题(图 12 中运算模块)。

3) 函数生成问题向线导引模型的转换:利用运动反转法,将运动任务的求解问题转化为线导引模型的求解问题(图 12 中运算模块)。

4) 运动几何学特征的提取:根据空间中刚体上的定直线所占据的位置数,提取相应的运动几何学特征(图 12 中运算模块)。

5) 投影变换:结合投影变换,利用新构建出的二平面投影系统,实现运动几何学特征的最简描述(图 12 中运算模块)。

6) 确定尺度:利用机构尺度与运动几何学特征之间的几何关联实现空间曲柄摇杆机构的尺度综合(图 12 中输出模块)。

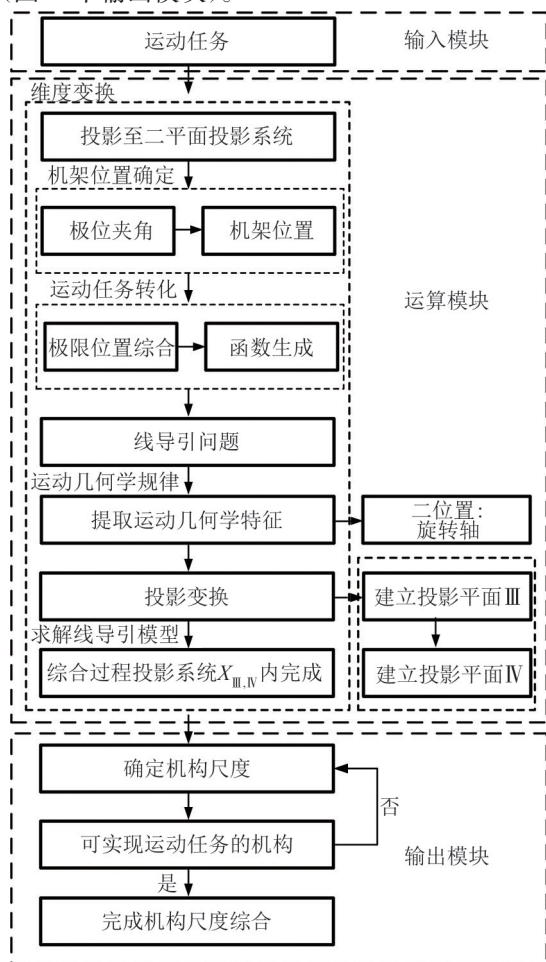


图 12 RSSR 机构极限位置综合的几何流程

Fig.12 Geometric process for the limit positions synthesis of RSSR mechanisms

### 4 应用算例

以空间 RSSR 传动机构为例,进一步阐释空间曲柄摇杆机构极限位置综合几何方法的正确性及实用性。已知输出构件的机架转轴位置  $b_0$ , 输出构件的长度为 30 mm, 两个极限位置分别为  $B_0B_1$ 、 $B_0B_2$ 。其中,  $B_0$ 、 $B_1$ 、 $B_2$  的坐标分别为  $B_0(8.28, -4.33, 2.00)$ 、 $B_1(6.89, -1.95, 0.82)$ 、 $B_2(9.21, -4.85, 4.80)$ , 极位夹角  $\theta=30^\circ$ , 求满足上述条件的空间 RSSR 机构的尺寸。

#### 4.1 根据极位夹角确定曲柄机架位置

任意选定输入构件的机架转轴  $a_0$  的方向, 构建二平面投影系统  $X_{I, II}$ , 其中主投影平面 II 垂直于输入构件转轴  $a_0$  的方向。将  $B_0B_1$ 、 $B_0B_2$  投影至二平面投影系统  $X_{I, II}$  中。可在主视投影平面 II 中得到相应投影  $B_0''B_1''$ 、 $B_0''B_2''$ 。在俯视投影平面 I 中可得到相应的投影  $B_0'B_1'$ 、 $B_0'B_2'$ , RSSR 机构曲柄机架铰链点位置的确定, 如图 13 所示。

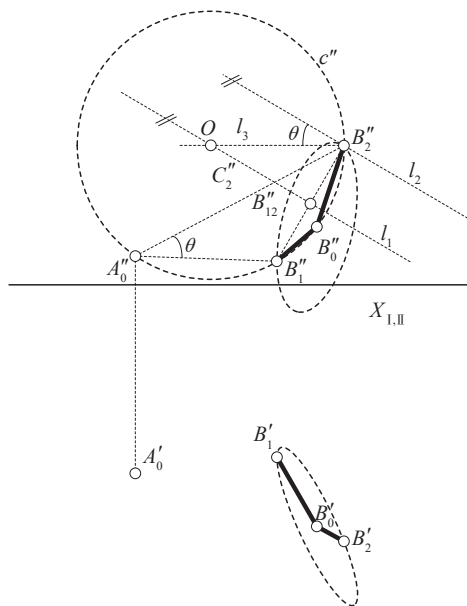


图 13 RSSR 机构曲柄机架铰链点位置的确定

Fig.13 Determination of the fix joint position of the RSSR mechanism

在主视投影平面 II 中,作  $B_1''B_2''$  连线的中垂线  $l_1$ 。过点  $B_2''$  作中垂线  $l_1$  的平行线  $l_2$ , 将线  $l_2$  绕点  $B_2''$  逆时针转动极位夹角  $30^\circ$ , 得到转角的另外一条边  $l_3$ , 与中垂线  $l_1$  交于点  $O$ , 该点即为过点  $B_1''$ 、 $B_2''$  且  $\angle B_2''OB_1''=60^\circ$  的圆的圆心。以点  $O$  为圆心,  $OB_1''$  为半径作圆  $c''$ , 机架铰链点  $A_0$  在主视投影平面 II 中的投影  $A_0''$  可在圆  $c''$  上任意选取, 均满足空间曲柄摇杆机构的极位夹角为  $30^\circ$ 。过  $A_0''$  作  $X_{I, II}$  的垂线, 机架铰链点  $A_0$  在俯视投影平面 I 中的投影  $A_0'$  可在该条垂线上任意选取, 本文取  $A_0(2.00, -2.50, 1.01)$ , 如图 13 所示。

### 4.2 极限位置综合问题向函数生成问题的转换

在主视投影平面 II 中,以  $A_0''$  为圆心,任意半径作圆  $d''$ 。 $A_0''B_1''$ 、 $A_0''B_2''$  两条直线分别与圆  $d''$  交于  $C_1''$ 、 $C_2''$  两点,如图 14 所示。由于主投影平面 II 垂直于输入构件转轴  $a_0$  的方向,  $A_0''C_1''$ 、 $A_0''C_2''$  在俯视投影平面 I 中的投影为一条水平线,过  $C_1''$ 、 $C_2''$  作  $X_{1,II}$  的垂线,与过  $A_0''$  的水平线交于  $C_1'$ 、 $C_2'$  两点。由此,空间曲柄摇杆机构的极限位置综合问题转化为函数生成问题的求解,即在输入构件位置标线  $A_0C$  上确定出连杆铰链点  $A$  的位置,满足输入构件位置  $A_0C_1$  ( $A_0C_2$ ) 对应输出构件位置  $B_0B_1$  ( $B_0B_2$ ) 即可。

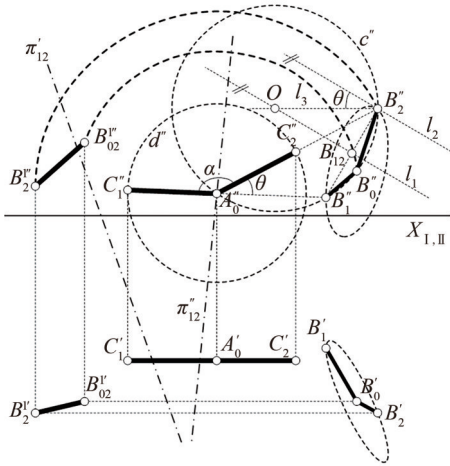


图 14 RSSR 机构极限位置综合问题的转化

Fig. 14 Transformation of the limit position synthesis problem of RSSR mechanism

### 4.3 函数生成问题向线导引模型的转换

在主视投影平面 II 中,以输入构件的第一位置  $A_0C_1$  作为相对参考位置,使输出构件第二位置的主视图投影  $B_0''B_2''$  以机架转轴点  $A_0''$  为转动中心,按输入构件转动的相反方向旋转角度  $\alpha = 150^\circ$ ,得到输出构件第二位置的相对位置在主视图中的投影  $B_02''B_22''$ ,如图 14 所示。当输出构件在主视图中的投影绕垂直于该投影面的轴转动时,其在俯视图中的投影做相应的平移运动,由此可得到输出构件第二位置相对位置的俯视图投影  $B_02' B_22'$ 。

### 4.4 运动几何学特征的提取

经过第 4.1~4.3 节的变换后,输入构件  $A_0C_1$  可视为固定机架,输出构件的相对位置  $B_0B_1$ 、 $B_02B_2$  可视为连杆在空间的两个位置。由此可以依据空间二位置线导引模型的求解方案对机构进行求解。根据两个位置  $B_0B_1$ 、 $B_02B_2$  可在投影系统  $X_{1,II}$  内绘制出旋转轴  $\pi_{12}$  的投影  $\pi_{12}''$ 、 $\pi_{12}'$ ,如图 14 所示。

### 4.5 投影变换

为了使旋转轴  $\pi_{12}$  垂直于某一投影平面,过  $\pi_{12}'$  构

建投影平面 III,即  $\pi_{12}' = X_{1,III}$ 。随后,可得到直线系统在投影平面 III 的投影,即  $A_0''C_1''$ 、 $A_0''C_2''$ 、 $B_0''B_1''$ 、 $B_0''B_2''$ 、 $B_02''B_22''$ 、 $\pi_{12}''$ ,如图 15 所示。垂直于  $\pi_{12}''$  作投影平面 IV。随后,旋转轴  $\pi_{12}$  在投影平面 IV 中的投影为一点  $\pi_{12}^*$ 。单独提取投影平面 III 和 IV 作为空间直线系统的主俯视图,如图 16 所示。接下来,机构的综合过程可以在投影系统  $X_{III,IV}$  内完成。

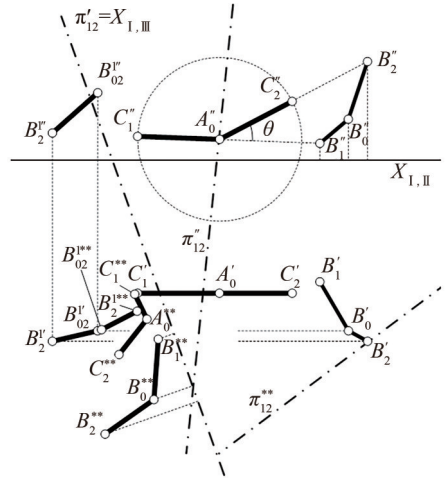


图 15 投影平面 III 的构建过程

Fig. 15 Construction process of projection plane III

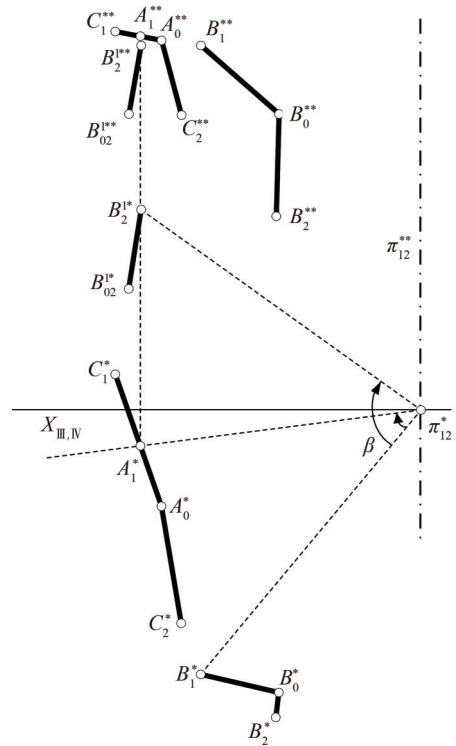


图 16 投影系统  $X_{III,IV}$  的构建过程

Fig. 16 Construction process of projection system  $X_{III,IV}$

### 4.6 确定尺度

在投影系统  $X_{III,IV}$  内,以  $\pi_{12}^*$  为转动中心,将  $B_1^*$  与  $\pi_{12}^*$  的连线按  $B_0^*B_1^* \rightarrow B_02^*B_22^*$  的运动方向旋转  $\beta/2$ ,其中

$\beta = \angle B_1^* \pi_{12}^* B_2^* = \angle B_0^* \pi_{12}^* B_{02}^*$  所形成夹角的另一边与  $A_0^* C_1^*$  交于一点  $A_1^*$ , 该点可作为连杆的另一连杆铰链点。同时, 可在  $A_0'' C_1''$ 、 $A_0' C_1'$ 、 $A_0'' C_1''$  上找到该点的对应位置, 最终  $A_1 = (3.67, -2.50, 0.26)$ , 如图 16 所示。依次连接点  $A_0$ 、 $A_1$ 、 $B_1$ 、 $B_0$  即可完成 RSSR 机构的极限位置综合工作。图 17 为满足极位夹角及输出构件极限位置的 RSSR 机构在空间中的综合结果。图 17 中, 曲柄机架铰链点  $A_0 = (2.00, -2.50, 1.01)$ , 摇杆机架铰链点  $B_0 = (8.28, -2.00)$ , 曲柄  $A_0 A = 18.28$  mm, 连杆  $AB = 67.46$  mm, 摇杆  $BB_0 = 30.00$  mm。

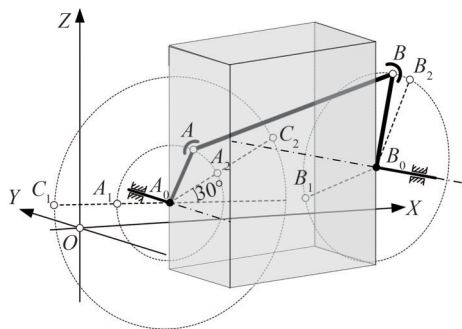


图 17 RSSR 机构极限位置综合结果

Fig. 17 Results of limit positions synthesis of RSSR mechanism

## 5 结论

本文从直线空间运动的几何学规律出发, 提出了一种空间曲柄摇杆 (RSSR) 机构极限位置综合的几何方法。在原理层面, 提取出了直线二位置空间运动的几何特征, 建立了直线二位置的线导引模型, 并通过机构极限位置的几何特性分析, 构建了几何综合流程。在工具层面, 利用二平面投影系统及投影系统变换, 将空间机构的极限位置综合问题转化至平面系统中进行求解, 实现了交互性强的“可视化”综合过程, 并可在统一的几何空间中进行机架位置的选择及构件尺寸的确定, 为设计过程提供了较高的自由度。在方法层面, 流程化的几何综合过程与主流的 CAD 系统之间存在最直接的数据交互形式, 为工程设计人员提供了形象易用的综合途径。

### 参考文献:

[1] Sun Jianwei, Wang Peng, Liu Wenrui, et al. Wavelet characteristic parameter method of a planar four-bar mechanism motion generation synthesis[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(6): 688–695. [孙建伟, 王鹏, 刘文瑞, 等. 平面四杆机构刚体导引综合的小波特征参数法[J]. 中国机械工程, 2018, 29(6): 688–695.]

[2] Liu Wenrui, Sun Jianwei, Chu Jinkui. Synthesis method for path generation of a planar four-bar mechanism based on

the wavelet feature parameters[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(9): 18–28. [刘文瑞, 孙建伟, 褚金奎. 基于小波特征参数的平面四杆机构轨迹综合方法[J]. 机械工程学报, 2019, 55(9): 18–28.]

[3] Wang D, Wang W. Kinematic Differential Geometry and Saddle Synthesis of Linkages[M]. Singapore: John Wiley & Sons, 2015.

[4] Fischer I S. Dual-number Methods in Kinematics, Statics and Dynamics[M]. Routledge, 2017.

[5] 朱广才. 运动几何学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1955.

[6] Burmester L E H. Lehrbuch der Kinematik[M]. Leipzig: Verlag Von Arthur Felix, 1886.

[7] Ceccarelli M, Koetsier T. Burmester and allievi: A theory and its application for mechanism design at the end of 19th century[J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(7): 072301.

[8] Grübler M F. Getriebelehre: Eine Theorie des Zwanglaufes und der ebenen Mechanismen[M]. Berlin: Springer, 1917.

[9] Alt H. Zur synthese der ebenen mechanismen[J]. ZAMM—Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1921, 1(5): 373–398.

[10] Alt H. Sonderfälle der mittelpunkt kurven[J]. Maschinenbau, 1940, 19: 309–312.

[11] Zhao Jingshan, Yan Zhengfang, Ye Li. Design of planar four-bar linkage with n specified positions for a flapping wing robot[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 82: 33–55.

[12] Lichtenheldt W, Luck K. Konstruktionslehre der Getriebe [M]. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2022.

[13] Hain K. Angewandte Getriebelehre[M]. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1961.

[14] Kiper G. Katalog einfachster Getriebebauformen[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2013.

[15] Yuan Peiyao, Lin Song, Wang Hanchao. Function synthesis of spatial mechanism with three finite positions based on geometric method[J]. Machinery, 2019, 46(11): 16–21. [袁佩瑶, 林松, 王瀚超. 基于几何法的空间连杆机构三位置函数综合[J]. 机械, 2019, 46(11): 16–21.]

[16] Lin Song, Wang Hanchao, Liu Jingshuai, et al. Geometric method of spatial linkages synthesis for function generation with three finite positions[J]. Journal of Mechanical Design, 2018, 140(8): 082303.

[17] Wang Hanchao, Lin Song. Geometric synthesis method for function generation of steering control mechanism with four positions[C]//Advances in Mechanism and Machine Science. Cham: Springer, 2019: 1431–1440.]

[18] Lin Song, Wang Hanchao, Zhang Yu, et al. Kinematic geometry description of a line with four positions and its application in dimension synthesis of spatial linkage[J]. Journal

- of Mechanisms and Robotics,2020,12(3):031006.]
- [19] Alt H. Die Bedeutung der getriebelehre für den bau von verarbeitungsmaschinen[J]. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 1930, 74(5): 139–144.
- [20] Alt H. Sonderfälle der RM-kurve und der burmesterschen mittelpunktcurve[J]. Maschinenbau/Betrieb, 1936, 15: 277–79.
- [21] Alt H. Die mittelpunktcurve in dem sonderfall, bei dem drei von vier lagen einer ebene einander parallel sind[J]. Maschinenbau/Der Betrieb, 1937, 16: 377–379.
- [22] Alt H. Über die toflagen des gelenkvierecks[J]. ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1925, 5(4): 337–346.
- [23] Alt H. Das konstruieren von gelenkvierecken unter benutzung einer kurventafel[J]. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 1941, 85: 69–72.
- [24] Kerle H, Corves B, Hüsing M. Getriebetechnik[M]. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015.
- [25] Luck K, Modler K. H. Getriebetechnik: Analyse, Synthese, Optimierung[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2013.
- [26] Fan Zhengtong, Mo Canlin. Geometrical synthesis of spatial four-bar linkage[J]. Journal of Zhejiang Silk Engineering College, 1989(2): 32–36. [范正通, 莫灿林. 空间四连杆机构的几何方法综合[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版), 1989(2): 32–36.]
- [27] Mo Canlin. Geometrical synthesis of spatial crank-rocker linkage[J]. Engineering Graphics Journal, 1989(2): 52–57. [莫灿林. 空间曲柄摇杆机构的几何方法综合[J]. 工程图学学报, 1989(2): 52–57.]
- [28] Lakshminarayana K, Balaji Rao L V. Graphical synthesis of the RSSR crank-rocker mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 1984, 19(3): 331–336.
- [29] Wang Hanchao, Guo Yingying, Lin Song, et al. Synthesis of spatial linkage with 5 positions based on kinematic geometry characteristics[J]. Advanced Engineering Sciences, 2024, 56(6): 314–324. [王瀚超, 郭颖颖, 林松等. 基于运动几何学特征的空间连杆机构 5 位置综合[J]. 工程科学与技术, 2024, 56(6): 314–324.]

## Geometric Method for Limit Positions Synthesis of the Spatial Crank-rocker Mechanism

WANG Hanchao<sup>1</sup>, GUO Yingying<sup>1</sup>, LIN Song<sup>2</sup>, JIANG Jingyu<sup>2</sup>

(1. School of Physics and Electromechanical Engineering, Longyan University, Longyan 364030, China;

2. School of Mechanical Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

### Abstract:

**Objective** This study presents a geometric synthesis method to address the dimensional synthesis problems of spatial crank-rocker mechanisms (Revolute-Sphere-Sphere-Revolute mechanisms, i.e., RSSR mechanisms) based on the limit position angle and the limit position of the rocker. It improves the intuitiveness and transparency of the synthesis process.

**Methods** The research started from the spatial kinematic geometry rules of a line with two positions. The movement form of a fixed point on a line was investigated.  $A_1(B_1)$  and  $A_2(B_2)$  were homologous points on a line  $g$ . There were many ways of moving the point  $A(B)$  from position  $A_1(B_1)$  to  $A_2(B_2)$  in space. Imagine point  $A(B)$  moves from  $A_1(B_1)$  to  $A_2(B_2)$  by rotating around an axis along the arc trajectory. Therefore, the point  $A(B)$  can be rotated from the position  $A_1(B_1)$  to  $A_2(B_2)$  around the intersection line of the middle vertical planes of  $\overline{A_1A_2}$  and  $\overline{B_1B_2}$ . Hence, the corresponding kinematic geometric characteristics of a line with two positions were extracted (rotation axis). This process achieved the transformation from kinematic problems to geometric ones. Further research was conducted on the kinematic geometric characteristics of a line with two special positions, and the spatial kinematic geometric model with finite separation positions of a line was compared to the planar Burmester theory. The projection of the rotation axis  $\pi_{12}$  was equivalent to the concept of the pole. The conclusion was drawn that the planar kinematic geometric model in the case of two positions was a special case of the spatial kinematic geometric model in this study, which also proved the correctness of the spatial kinematic geometric model of a line with two positions. The direction of the main projection plane was determined (the rotation axis  $\pi_{12}$  perpendicular to a specific projection plane) by combining the two-plane projection system. Therefore, the projection of the rotation axis  $\pi_{12}$  was a point on the projection plane. The true expression of kinematic geometry features in the two-plane projection system was obtained. Then, an RSSR linkage mechanism was ultimately constructed that can sequentially pass through two positions of a given spatial line. In addition, a line-guidance model of a line with two positions was established. This process achieved the transformation of spatial kinematic geometric problems to planes and made the dimensional synthesis process of spatial linkage more intuitive in the process of geometric interaction. At the same time, this also laid a theoretical foundation for the limit positions synthesis process of RSSR mechanisms. Further research was performed on the geometric characteristics of the limit position of the spatial crank-rocker mechanism. When the rocker was at the limit position, the main projection plane was perpendicular to the pivot of crank shaft. At this time, the projections of the crank and coupler link on the main projection plane were in a collinear state. The limit position angle and coefficient of travel speed variation of the spatial RSSR mechanism were derived. The limit

positions of the rocker  $B_1B_0, B_2B_0$ , and the limit position angle  $\theta$  were known, and it was proposed that the frame joint of the crank  $A_0$  was on the circumference of the coupler joints  $B_1$  and  $B_2$ . Then there were infinite positions of the frame joint. The center angle theorem was utilized to construct a circle passing through points  $B_1$  and  $B_2$  with a center angle of  $2\theta$  to ensure the limit position angle  $\theta$ , combined with the geometric characteristics of the limit position of the spatial crank-rocker mechanism. Therefore, the frame joint  $A_0$  of the crank can be arbitrarily selected on that circumference. The position of the frame joint  $A_0$  that satisfied the limit position angle  $\theta$  was an infinite solution. This process provided a high degree of design freedom for the limit position synthesis of the spatial crank rocker mechanism and transformed the problem of limit position synthesis of the mechanism into a function generation problem. However, the problem of function generation can be transformed into the solution of a line-guidance model through the theory of kinematic inversion. A relatively unified geometric process for the synthesis of limit positions of spatial crank-rocker mechanisms was formulated based on the geometric solution process of the line-guidance model. Finally, a numerical example was given to verify the effectiveness.

**Results and Discussions** The frame joint position  $b_0$  of the rocker was known, and the length of the rocker was 30 mm. The two limit positions of the rocker were  $B_1B_0$  and  $B_2B_0$ , where the coordinates of  $B_0 = (8.28, -4.33, 2.00)$ ,  $B_1 = (6.89, -1.95, 0.82)$ ,  $B_2 = (9.21, -4.85, 4.80)$ , and the limit position angle  $\theta = 30^\circ$ . The final result indicated that the coordinates of the crank frame joint  $A_0 = (2.00, -2.50, 1.01)$ , the length of crank  $A_0A = 18.28$  mm, the length of coupler  $AB = 67.46$  mm, and the length of rocker  $BB_0 = 30.00$  mm. This solution was one of the infinite solutions. Compared to existing limit position synthesis methods, the proposed method has strong intuitiveness, high transparency, and wide design freedom. The synthesis work can be quickly completed when combined with modern geometric design tools.

**Conclusions** At the theoretical level, the geometric characteristics of a line defined by two positions were extracted, a line-guidance model for the two positions was established, and a geometric synthesis procedure was constructed through the analysis of the mechanism's limit-position properties. At the tool level, a two-plane projection system, combined with projection transformation techniques, was adopted to convert the spatial limit-position synthesis problem into a planar solution, achieving a highly interactive and visual synthesis process. This method enabled the selection of frame positions and the determination of link dimensions within a unified geometric space, providing substantial design flexibility. At the methodological level, the procedural geometric synthesis framework facilitated direct data interoperability with mainstream CAD systems, providing engineers with an intuitive and practical synthesis tool.

**Key words:** spatial crank-rocker mechanism; limit position synthesis; geometric method; two-plane projection system; line-guidance model

(编辑 陈 雪)

引用格式: Wang Hanchao, Guo Yingying, Lin Song, et al. Geometric method for limit positions synthesis of the spatial crank-rocker mechanism[J]. *Advanced Engineering Sciences*, 2025, 57(5): 309–319. [王瀚超, 郭颖颖, 林松, 等. 空间曲柄摇杆机构极限位置综合的几何方法[J]. *工程科学与技术*, 2025, 57(5): 309–319.]