•水灾害防治与水环境调控•

DOI:10.12454/j.jsuese.202300968

本刊网刊

均匀沙起动概率计算模型比较研究

钟臣勇，杨奉广*，聂锐华，黄　尔，刘兴年

(四川大学 山区河流保护与治理全国重点实验室，四川 成都 610065)

摘　要：天然河流水流会挟带大量泥沙，这种泥沙运动会影响水流结构和河床，因此研究泥沙起动概率问题对于山洪治理、水力发电以及水库淤积等具有重要意义。采用滚动或者滑动的运动模式，结合泥沙颗粒水流推移力、水流上举力和泥沙自身的重力与泥沙颗粒水下休止角之间的关系，泥沙颗粒起动时，其水平方向的推移力必须大于阻力，根据受力平衡关系式得到了泥沙颗粒起动概率积分表达式，该表达式充分揭示了泥沙颗粒的受力图景，弥补了以往起动概率公式忽略水流推移力的不足。本文建立的起动概率公式有 5 个参数需要确定，通过无量纲粒径参数结合试验资料，求出了起动概率公式中的水下休止角正切值变量；利用粗糙床面水流流速和紊动分布试验数据，确定了近床面的时均流速和水流方向的紊动强度；利用均匀沙起动资料结合比例法确定了水流推移力系数和水流上举力系数，以及 Luque 的 7 组实测资料和 Guy 的 108 组试验资料对本文泥沙颗粒起动概率公式进行了验证，并与爱因斯坦公式、Engelund and Fredsoe 公式以及程年生等计算公式进行了比较。结果显示：研究得到的起动概率公式具有最高的计算精度。对于临界状态的泥沙颗粒，本文起动概率倾向于弱动的起动模式，而其他公式则趋向于中动起动模式；与经典的希尔兹起动概率公式比较，本文的起动概率公式可以很好地与希尔兹曲线重合，而其他公式则是一条直线，只能计算大颗粒的泥沙起动问题。

关键词：均匀沙；平均流速；水流上举力；水流推移力；泥沙起动

中图分类号：TV142.1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2096-3246（2025）06-0062-08

天然河道中水流经常会挟带大量泥沙。由于河道中存在水工建筑物，河流泥沙会对这些水工建筑物产生一定的影响[1–2]。泥沙颗粒的起动与输移是泥沙运动力学与河流动力学研究的重要内容之一。泥沙颗粒何时以及如何在水流作用下起动，决定了河流的侵蚀与淤积、河床形态的变化等，这对于水利工程的设计、河流治理[3]、防洪减灾[4]等具有重要意义。随着社会经济发展和环境保护需求的提高，对泥沙动态过程准确预测的需求日益增加，因此，发展和完善泥沙颗粒起动概率的计算方法显得尤为关键。过去几十年，学者们提出了多种理论模型和计算方法，旨在更准确地描述和预测泥沙颗粒在特定水力条件下的起动行为。从经典的 Shields 曲线到近年来基于高级数值模拟和试验数据改进的模型，研究呈现出丰富的多样性和深入发展的趋势[5]。

近年来，在深入的试验研究和理论分析基础上，泥沙颗粒的起动模式大致可以分为以下几种[6–7]。

滚动：这是最基本的起动模式之一，水平方向上的水流推移力克服了颗粒间的静摩擦力，使床面颗粒沿床面轻微滚动但不完全离开床面；滑动：在这种模式下，水流的剪切力作用在颗粒上，使颗粒在床面上发生滑动移动，而不是滚动，这种模式通常发生在较为平坦的床面，或是颗粒相对较大、底部较平滑的情况下；跳跃：指泥沙颗粒在水流的作用下，沿床面跳跃式移动的过程，颗粒被水流冲起，沿抛物线轨迹向前跳跃一段距离后，再次落回河床，与床面其他颗粒发生碰撞，这种模式在中等流速下最为常见，是泥沙输移中极为重要的一种方式；悬浮：在较高的流速条件下，颗粒可以被水流完全吸起并在水体中保持悬浮状态，其运动不再依赖于床面的接触。这种模式通常发

收稿日期：2023 – 11 – 29　　**修回日期：**2024 – 04 – 25　　**网络出版日期：**2024 – 05 – 07

基金项目：国家自然科学基金项目（51979180）；四川省科技计划项目（2023NSFSC1989）

作者简介：钟臣勇（2000—），男，硕士生．研究方向：泥沙输移、河流工程等．E-mail：zcy13140615@163.com

* **通信作者：**杨奉广，副研究员，E-mail：yangfengguang@scu.edu.cn

生在细颗粒床面河流中，是高能流态下的主要泥沙运动形式，影响河流的淤积和侵蚀过程。

各种起动模式之间并非相互独立，实际情况可能是几种模式的综合作用结果。例如，一个颗粒可能先是滚动，随后进入跳跃状态，最后可能以悬浮的形式被水流带走。水流条件、泥沙特性（如颗粒大小、形状、密度）以及床面特性都会影响颗粒的起动模式，因此理解这些基本模式及其相互作用对于研究泥沙动力学具有重要意义。国内外大量学者对于不同的起动模式进行了研究，爱因斯坦认为泥沙颗粒以跃移方式起动，以此运动方式结合泥沙颗粒受力机制建立了起动概率积分表达式[8]。Wu 等[9]将滚动和跃移两种起动模式结合起来对泥沙起动进行了研究；程烨等[10]根据跃移、滑动、滚动这 3 种起动模式，采用全概率的定义，建立了相应的起动概率模型，并对其难易程度进行分析对比；王玺玥等[11]基于床面泥沙起悬与起滚两种起动方式，建立了清水冲刷双峰型泥沙粗化层级配预报多步计算模式；许晓阳等[12]采用滚动起动模式，并引入泥沙起动全概率的概念，推导了反映水流条件随机性和床沙位置分布规律的非均匀沙分级起动概率公式。综上分析发现，目前对于泥沙的起动模式的研究尚未统一，还需进行深入的研究。

泥沙起动的判别标准主要有两类：定性判别与定量判别。定性判别法主要应用在野外河流考察和实验室中。此标准以个人的经验为主要依据。令观察者站在河边，逐渐加大水流，当观察者看到有泥沙移动时便将此时的水流泥沙条件作为标准。根据 Kramer[13]的研究，具体可以分为 3 类：具有屈指可数细颗粒泥沙运动的弱动；床面各处有泥沙在动，无法用数量计算，但是并没有引起床面变化并且不产生输沙率，此种状态称为中动；各种大小颗粒均已投入运动并遍及床面各处的普动。定性判别标准难以确定，即便同一标准在操作时也会因人而异[14]。定量判别标准有切应力表达式和流速表达式两种。切应力表达式以著名的希尔兹曲线[15-16]为代表，其优点是物理机制明确，缺点是工程应用不太方便。工程上常用的是断面平均流速形式的泥沙颗粒临界表达式，国内外大量学者对此都进行过深入的研究[17]。

起动概率的概念最早来源于爱因斯坦[8,18]，将泥沙颗粒起动概率定义为水流上举力大于泥沙颗粒水下重力的概率。爱因斯坦起动概率 P 表达式为：

$$P=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{1}{7\theta}-2}^{\frac{1}{7\theta}-2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \tag{1}$$

式中，θ 代表无因次切应力，$\theta=\rho u_*^2/(\rho_s-\rho)$，其中，$\rho$ 与 ρ_s 分别为水和泥沙颗粒的密度，u_* 为摩阻流速。Engelund 等[19]综合考虑无因次切应力与输沙率的关系，得到了起动概率经验表达式：

$$P=\left[1+\left(\frac{0.266\,8}{\theta-0.05}\right)^4\right]^{-0.25} \tag{2}$$

Cheng 等[20]在爱因斯坦起动概率的基础上，利用实测数据对起动概率中的参数进行了率定，得到了如下起动概率公式：

$$P=1-0.5\frac{0.21-0.5\sqrt{\theta}}{\left|0.21-0.5\sqrt{\theta}\right|}\left[1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{0.92}{\sqrt{\theta}}-2.2\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}-0.5\left[1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{0.92}{\sqrt{\theta}}+2.2\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

窦国仁[21]将定性标准与定量标准联系起来，该研究表明：弱动标准对应起动概率 P=0.001 4，中动标准对应起动概率 P=0.022 8，普动标准对应起动概率 P=0.158 5。

综上所述，前人起动概率研究存在以下问题：Engelund 等[19]的公式在 θ=0.05 处存在无物理意义的奇点问题；在推导起动概率时，只考虑上举力，忽略了水流推移力；按照窦国仁[21]的研究，当选定一个起动标准 P 研究泥沙颗粒的起动切应力 θ 时，得到的起动表达式是一个定值 θ，只适用于大颗粒泥沙临界起动条件。结合以上问题，本文引入水流推移力重新研究泥沙颗粒起动问题，得到的起动概率公式在公式结构上不存在无意义的奇点，另外，当选定起动概率 P 后，得到的起动切应力公式符合希尔兹曲线，满足粗细颗粒泥沙起动条件。

1　研究方法

本文旨在研究均匀沙的泥沙颗粒起动问题，并构建相应的起动概率计算模型，在此暂不考虑复杂的水流条件下泥沙颗粒的起动情况，因此，在构建模型之前，必须做出如下假设：

1）假设水流是稳定的，并且以一定速度流动，这样可以避免考虑流速随时间波动的复杂情况；

2）假设流体黏度在研究时间范围内是恒定的，忽略因温度或其他环境因素变化导致的黏度变化；

3）假设所有沙粒都位于沙床表面，不存在被上层沙粒覆盖而不与水流直接接触的沙粒；

4）假设河床是稳定的，不会因泥沙起动而发生显

著的变化；

5）在泥沙颗粒处于临界状态时，由于起动的泥沙颗粒比较少，无法形成沙纹沙垄等床面形态，故不考虑河床泥沙堆积密度对起动概率的影响。

水流中的泥沙颗粒主要受到水流的推移力 F_D，水流上举力 F_L 以及泥沙颗粒水下重力 W 的作用，示意图如图 1 所示。

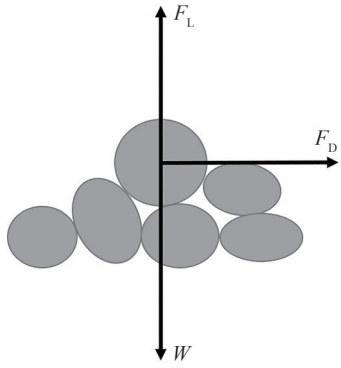

图 1 泥沙颗粒受力示意图

Fig. 1 Diagram of forces acting on the sediment

水流中泥沙颗粒的运动方式有：滚动或滑动、跳跃、悬浮[22]。当颗粒以跃移方式起动时，可以将起动概率定义为泥沙颗粒所受上举力大于水下重力概率，这就是爱因斯坦[18]起动概率模型。其实，工程中方更多采用的是滚动或滑动运动方式来推导起动问题[15,23]。另外，由于泥沙床面排列的不确定性，会出现泥沙上游颗粒对下游颗粒的遮蔽现象，通常引入暴露度方式来反映这种隐暴作用。鉴于隐暴作用在非均匀沙输移中表现更为突出，均匀沙则更多地关注受力平衡，这一点也被众多学者所证实[20,23]。因此，沿着这个研究方向，本文从床面泥沙颗粒受力平衡出发，来构建均匀沙颗粒临界状态物理图景。当泥沙颗粒处于起动状态时，受到的水流推移力应该大于阻力，受力平衡关系表示为：

$$F_D > \left(W - F_L\right)\tan\varphi \tag{4}$$

起动概率表示为：

$$P = P\left(F_D > \left(W - F_L\right)\tan\varphi\right) \tag{5}$$

式（4）、（5）中，φ 为泥沙颗粒的水下休止角，F_L 与 F_D 与近底流速有关：

$$F_L = C_L \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\rho u_b^2}{2} \tag{6}$$

$$F_D = C_D \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\rho u_b^2}{2} \tag{7}$$

式（6）、（7）中，d 为泥沙的粒径，C_D 为水流推移力系数，C_L 为水流上举力系数，u_b 为水流底部瞬时速度。

泥沙颗粒的水下重力为：

$$W = \left(\rho_s - \rho\right) g \frac{\pi d^3}{6} \tag{8}$$

将式（6）～（8）代入式（5）可以得到：

$$P = P(u_b^2 > B^2) = P(u_b > B) + P(u_b < -B) \tag{9}$$

式中：

$$B = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\frac{\rho_s - \rho}{\rho} g d \tan\varphi}{C_D + C_L \tan\varphi}} \tag{10}$$

水流瞬时流速服从正态分布[20,24]：

$$f(u_b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(u_b - \bar{u}_b)^2}{2\sigma^2}} \tag{11}$$

式中：$\bar{u}_b$ 表示近床面时均流速；σ 表示近床面紊动强度，$\sigma = \sqrt{\overline{(u_b - \bar{u}_b)^2}}$。

综合式（9）～（11）可以得到泥沙颗粒起动概率表达式：

$$P = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{B + \bar{u}_b}{\sigma}}^{\frac{B - \bar{u}_b}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \tag{12}$$

2 公式参数的确定

本文建立的起动概率公式（12）有 5 个参数：$\bar{u}_b$、c_L、c_D、σ、$\tan\varphi$ 需要确定，确定这些参数后，即可计算出泥沙颗粒的起动概率。

2.1 近床面时均流速 $\bar{u}_b$

在天然河流中，水流的时均流速从河床至水面呈现增大的趋势，可以利用对数流速公式计算[24–25]：

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2.5\ln\left(\frac{y}{d}\right) + 8.5 \tag{13}$$

式中，$\bar{u}$ 表示距离床面 y 处水流的平均流速。

水流推移力作用在近床面附近，其位置是泥沙粒径的量级：

$$y = nd \tag{14}$$

n 的数值并不唯一，一般情况下 $0 < n < 1$，这里采用 Einstein 等[26]的研究，取 $n = 0.35$，综合式（13）与（14）可以得到：

$$\bar{u}_b = 5.875 u_* \tag{15}$$

2.2 近床面紊动强度 σ

Kironoto[27]利用水槽试验研究了水流紊动强度变化规律，现将其试验结果绘制于图 2 中。图 2 中，h 代表水深，Q 代表流量。从图 2 中可以看出，由于床面的影响，越接近床面，紊动强度越大。在床面附近，紊动强度与摩阻流速的比值接近常数 2.06，这一点与 Cheng 等[20]的取值 2.00 比较接近，与 Nezu 等[24]的取值 2.30 差别略大。本文采用 Kironoto[27]的试验成果，取值：

$$\frac{\sigma}{u_*} = 2.06 \tag{16}$$

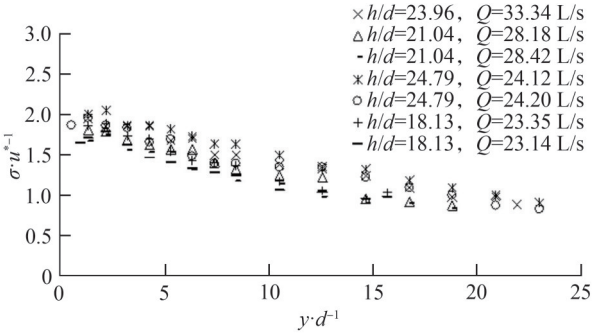

图2　粗糙床面水流方向的紊动强度σ变化曲线

Fig. 2　Variation of longitudinal turbulence intensity σ over rough bed

2.3　泥沙颗粒的水下休止角φ

自然情况下，在水或者空气介质中自然堆放的天然沙会与水平面形成一个夹角，这个夹角就是天然沙的休止角[15-16,22]。现存的天然沙休止角计算公式都是将其表示成泥沙颗粒粒径的指数表达式[28-29]，这种方式在工程应用上比较方便，但是理论上不便于推广。其实，休止角是天然泥沙颗粒的基本属性之一，其与泥沙的粒径、密度以及水介质密度有关系，可以综合这些影响因素，拟合成无因次的泥沙粒径d_*为：

$$d_*=\left[\frac{\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right)g}{v^2}\right]^{\frac{1}{3}}d \tag{17}$$

式中，v为运动黏度。

为了测试泥沙休止角随无因次粒径变化规律，采用Yang等[29]试验资料，试验装置为立方体槽和转鼓，试验采用1.50、4.50、5.95以及11.00 mm这4种粒径天然沙，试验介质是水。图3显示了泥沙休止角的正切值与无因次粒径之间的变化关系。从图3中可以看出：随着无因次粒径的增大，泥沙颗粒休止角呈现增大的趋势。休止角与无因次粒径之间的关系可以利用式(18)来拟合：

$$\tan\varphi=0.6d_*^{0.074} \tag{18}$$

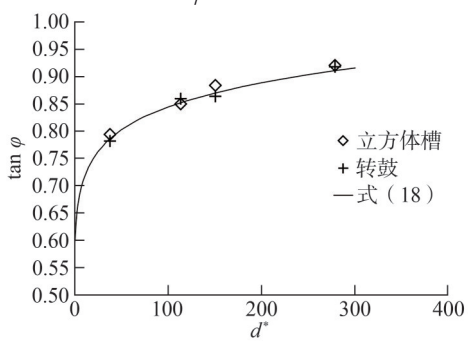

图3　天然沙休止角随无因次粒径变化曲线

Fig. 3　Variation curves of the angle of repose of natural sediment with dimensionless diameter

2.4　上举力系数与推力系数的确定

对于处于临界状态的泥沙颗粒，其应处于某一固定起动概率，即式(12)表示的起动概率P为一常数。即：

$$\frac{B-\bar{u}_b}{\sigma}=A_1 \tag{19}$$

$$\frac{B+\bar{u}_b}{\sigma}=A_2 \tag{20}$$

式(19)～(20)中，A_1、A_2表示常数。结合式(10)、(16)、(19)与(20)可以得到：

$$\theta=\frac{\tan\varphi}{A_3(C_D+C_L\tan\varphi)} \tag{21}$$

式中，A_3为一常数，$A_3=0.8(A_1+A_2)^2$。

水流推移力系数与水流上举力系数是无因次泥沙颗粒粒径d_*的函数[30]，从式(18)可以看出泥沙颗粒休止角正切值$\tan\varphi$也是d_*的函数，因此令

$$g(d_*)=C_D+C_L\tan\varphi \tag{22}$$

式中，$g(d_*)$表示无因次泥沙颗粒粒径d_*的未知函数。

从而式(21)可以变为：

$$\theta=\frac{\tan\varphi}{A_3g(d_*)} \tag{23}$$

图4显示了文献[31]实测的未知函数$A_3g(d_*)$与d_*的关系。

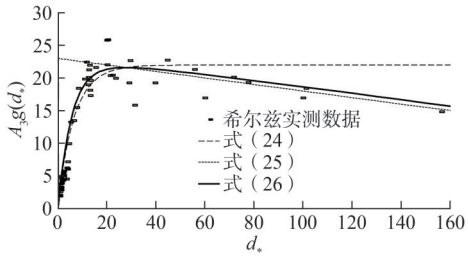

图4　未知函数$A_3g(d_*)$与无因次粒径d_*关系

Fig. 4　Variation of $A_3g(d_*)$ with dimensionless sediment diameter d_*

从图4可以看出，未知函数$g(d_*)$随着d_*的增大呈现先增大的趋势，当$d_*>20$后又缓慢减小。在低d_*函数段，可以利用如下公式拟合：

$$A_3g(d_*)=22-22e^{-0.17d_*^{0.95}} \tag{24}$$

当无因次泥沙粒径大于20时，可以利用如下公式拟合：

$$A_3g(d_*)=-0.05d_*+23 \tag{25}$$

整个d_*范围内的$A_3g(d_*)$可以利用比例法进行拟合：

$$A_3g(d_*)=(22-22e^{-0.17d_*^{0.95}})^M(-0.05d_*+23)^{1-M} \tag{26}$$

式中，M为比例系数：

$$M=\frac{1}{1+0.03d_*^{1.1}} \tag{27}$$

从图4还可看出，比例法拟合式(26)与实测数据吻合程度较好。

3 误差分析

本文建立的起动概率式(12)是一个积分关系式，工程上应用很不方便。郭俊克等[32]曾经推导出此类积分式的近似表达式：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \approx 0.5\frac{x}{|x|}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{2x^2}{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

利用式(28)，本文建立的起动概率公式(12)可以表示成一个连续的关系式：

$$P=1-0.5\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{2\left(B+\bar{u}_{\mathrm{b}}\right)^2}{\pi\sigma^2}}\right]^{\frac{1}{2}}-0.5\frac{B-\bar{u}_{\mathrm{b}}}{\left|B-\bar{u}_{\mathrm{b}}\right|}\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{2\left(B-\bar{u}_{\mathrm{b}}\right)^2}{\pi\sigma^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

将B代入式(29)并整理可以得到：

$$P=1-0.5\left[1-\mathrm{e}^{-\left(0.447\sqrt{\frac{\tan\varphi}{g(d_*)}}\theta^{-0.5}+2.276\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}-0.5\frac{0.196-\theta^{0.5}\sqrt{\frac{g(d_*)}{\tan\varphi}}}{\left|0.196-\theta^{0.5}\sqrt{\frac{g(d_*)}{\tan\varphi}}\right|}\times\left[1-\mathrm{e}^{-\left(0.447\sqrt{\frac{\tan\varphi}{g(d_*)}}\theta^{-0.5}-2.276\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{30}$$

在利用式(30)计算起动概率之前，必须先求出式(26)中的常数A_3，为此，将式(29)与Luque等[33]的水槽试验数据(该试验是在床面不同坡度的封闭矩形流道中进行的，并采用了5种不同的床材料测定了平均床面切应力、平均推移质输沙率、平均颗粒流速、单位面积每秒平均沉积颗粒数、平均粒径等一系列数据)进行比较，可以得出A_3=135。图5显示了振动概率计算值与实测值的对比效果，为了进一步检验本论文计算公式的计算效果，引入了经典的Guy等[34]推移质实测数据。从图5可以看出，无论是Luque等[33]还是Guy等[34]的试测数据，数据点都能集中在最佳线两侧，说明本论文推导出的泥沙颗粒起动概率公式具有很高的计算精度。

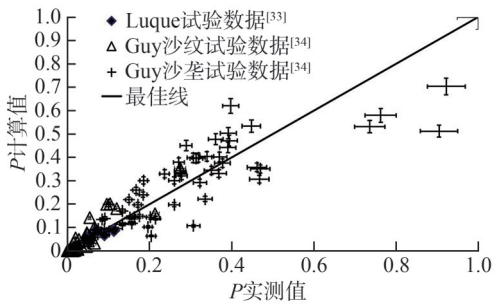

图5 起动概率计算值与实测值对比效果

Fig. 5 Comparison of computed pickup probability values with measured data

为了进一步比较本文起动概率式(30)的计算精度，表1列出了不同计算公式与实测资料拟合的平均误差。从表1中可以看出：对于实测资料，本文所建立的起动概率公式具有最小的计算误差，这说明本文起动概率公式具有较高的计算精度。针对Guy沙纹试验资料，3家计算公式平均误差都在100%以上，这说明他们不适合沙纹泥沙床面。表1还显示Cheng等[20]公式(式(3))的计算精度排在第2位，Engelund[19]公式(式(2))排在第3位。Einstein[18]公式(式(1))对于所有实测资料其计算平均误差都在100%以上，这是因为爱因斯坦当初只是在推导推移质输沙率公式时提出了起动概率的概念，并没有对起动概率进行单独的检验。

表1 起动概率计算误差

Tab. 1 Summary of errors for different pickup equations

%

计算公式	Luque实测数据	Guy沙纹试验数据	Guy沙垄试验数据
本文	22.8	66.9	28.8
Einstein[18]	772.9	2 666.4	418.4
Engelund等[19]	55.6	1 432.1	44.5
Cheng等[20]	24.2	243.4	42.8

图6显示了泥沙颗粒处于临界状态时各起动概率公式变化规律。此时，各起动概率公式取值各不相同。当泥沙颗粒起动时，Einstein[18]取P=0.02，Engelund等[19]取P=0.018 7，Cheng等[20]取P=0.013。3家公式取值接近窦国仁[21]的中动起动标准。本文公式取值P=0.000 045 98，属于窦国仁[21]划定的弱动起动标准。更重要的是3家起动概率公式只适合d_*>160的大颗粒泥沙，而对于小一些的泥沙颗粒计算值明显偏离。相比之下，本文起动概率公式很好地与经典的希尔兹曲线重合，说明本文起动概率公式可以精确地计算泥沙颗粒起动问题。

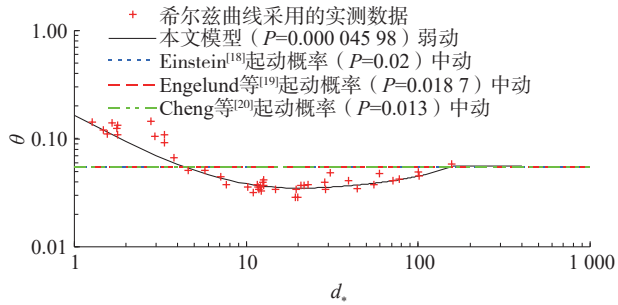

图6 泥沙颗粒处于临界状态时起动概率变化规律

Fig. 6 Variation of pickup probability when the initial motion of sediment particle occur

4 结　论

本文系统地研究了泥沙颗粒起动概率问题，在弥补前人研究不足的前提下，建立了新的起动概率表达式。结论如下：

1）采用滚动或者滑动的运动模式，结合泥沙颗粒起动时水流推移力、水流上举力和泥沙自身的重力与泥沙颗粒休止角之间的关系，根据受力平衡关系式得到了泥沙颗粒起动概率积分表达式。该表达式充分揭示了泥沙颗粒的受力机制，弥补了以往起动概率公式忽略水流推移力的不足。

2）本文建立的起动概率公式有 5 个参数需要确定。通过无量纲粒径参数结合实验资料，求出了起动概率公式中的休止角正切值变量；利用粗糙床面水流流速和紊动分布试验数据，确定了近床面的平均流速和水流方向的紊动强度；利用均匀沙起动资料结合比例法确定了水流推移力系数和水流上举力系数。

3）利用实测资料对本文的泥沙颗粒起动概率公式进行了验证，并与其他计算公式进行了比较，比较结果显示：本研究得到的起动概率公式具有最高的计算精度。另外，对于临界状态的泥沙颗粒，本研究起动概率倾向于弱动的起动模式，而其他公式则趋向于中动起动模式；与经典的希尔兹起动概率公式比较，本文取得的起动概率公式可以很好地与希尔兹曲线重合，而其他公式则是一条直线，只能计算大颗粒的泥沙起动问题。

在采用经典的推移质实测数据验证，以及误差计算后得出的结果表明，本文所建立的公式，结构合理，相较于以往的计算公式，精确度更高。同时，当选定起动概率时，起动切应力符合希尔兹曲线，可用来判别粗细泥沙颗粒的起动。不过由于本文公式是建立在均匀沙的基础之上的，因此，只适用于均匀沙的计算。

参考文献：

[1] Deng Jianhui,Zhou Xiaopeng,Zhao Siyuan,et al.Evolution of river valley civilization and paleo-landslidedam-mingevents: An example of Zhuoying village in the upper reaches of Jinsha River[J].Advanced Engineering Sciences,2023,55(6):1–9.[邓建辉,周小棚,赵思远,等.河谷文明演变与历史滑坡堵江——以金沙江上游卓英村为例[J]工程科学与技术,2023,55(6):1–9.]

[2] Deng Jianhui,Wei Xiao,Dai Shigui,et al.Characterization analysis of triggered disasters in the luding earthquake[J].Advanced Engineering Sciences,2024,56(1):117–126.[邓建辉,韦晓,戴仕贵,等.泸定地震诱发灾害特征分析[J].工程科学与技术,2024,56(1):117–126.]

[3] Huang Faming,Zhang Yinlang,Guo Zizheng,et al.Effects of different classification methods on regional landslide-susceptibility zonation[J].Advanced Engineering Sciences,2024,56(1):148–159.[黄发明,张崟琅,郭子正,等.不同分级方法对区域滑坡易发性区划的影响[J].工程科学与技术,2024,56(1):148–159.]

[4] Peng Ming,Ma Fujun,Shen Danyi,et al.A method for estimating human loss of life in dam-breach flood considering human-fluid interaction[J].Advanced Engineering Sciences,2024,56(1):127–137.[彭铭,马福军,沈丹祎,等.考虑人体与水流相互作用的溃坝洪水生命损失评估模型[J].工程科学与技术,2024,56(1):127–137.]

[5] Khu Soonthiam,Wang Jia,Wang Mingna.Application status and future of citizen science in hydrology[J].Advanced Engineering Sciences,2023,55(5):141–148.[邱顺添,王佳,王明娜.公众科学在水文领域的应用现状与未来[J].工程科学与技术,2023,55(5):141–148.]

[6] Julien P Y.Erosion and Sedimentation[M].Cambridge:Cambridge University Press,2010.

[7] 邵学军,王兴奎.河流动力学概论[M].2 版.北京:清华大学出版社,2013.

[8] Shen Ying, Liu Jie, Yang Shengfa. Literature review of entrainment probability of coarse-grained sediment[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University(Natural Science Edition),2023,42(4):1–10.[沈颖,刘洁,杨胜发.粗颗粒泥沙起动概率研究综述[J].重庆交通大学学报(自然科学版),2023,42(4):1–10.]

[9] Wu Fuchun,Chou Yiju.Rolling and lifting probabilities for sediment entrainment[J].Journal of Hydraulic Engineering,2003,129(2):110–119.

[10] Cheng Ye,Zhang Genguang,Wu Zhangsong,et al.Comparative analysis of starting probability of different sediment starting modes[J]. Sediment Research,2017,42(5):31–35.[程烨,张根广,吴彰松,等.泥沙不同起动模式的起动概率对比分析[J].泥沙研究,2017,42(5):31–35.]

[11] Wang Xiyue,Zhang Genguang,Xu Xiaoyang,et al.Calculation of bimodal sediment coarsing grading by clear water erosion based on starting probability[J].Sediment Research,2023,48(5):20–27.[王玺玥,张根广,许晓阳,等.基于起动概率的清水冲刷双峰型泥沙粗化层级配计算[J].泥沙研究,2023,48(5):20–27.]

[12] Xu Xiaoyang,Zhang Genguang,Zhou Shuang,et al.Study on starting velocity of non-cohesive non-uniform sand classification[J].Sediment Research,2022,47(5):1–7[许晓阳,张根广,周双,等.无黏性非均匀沙分级起动流速研究[J].泥沙研究,2022,47(5):1–7.]

[13] Kramer H.Sand mixtures and sand movement in fluvial model[J].Transactions of the American Society of Civil Engineers,1935,100(1):798–838.

[14] 张小峰,刘兴年.河流动力学[M].北京:中国水利水电出版社,2010.
[15] 钱宁,万兆惠.泥沙运动力学[M].北京:科学出版社,1983.
[16] Yalin M S.Mechanics of sediment transport[M].New York: Pergamon Press,1977.
[17] 韩其为,何明民.泥沙起动规律及起动流速[M].北京:科学出版社,1999.
[18] Einstein H A.The bed load function for sediment transportation in open channel flows[R].Washington:United States Department of Agriculture Soil Conservation Service,1950.
[19] Engelund F, Fredsøe J.A sediment transport model for straight alluvial channels[J].Hydrology Research,1976, 7(5):293–306.
[20] Cheng Niansheng,Chiew Y M.Pickup probability for sediment entrainment[J].Journal of Hydraulic Engineering, 1998,124(2):232–235.
[21] 窦国仁.论泥沙起动流速[J].水利学报,1960(4):44–60.
[22] Vanoni V A.Sedimentation engineering[M].Reston:ASCE Press,2006.
[23] 韩其为,何明民.泥沙运动统计理论[M].北京:科学出版社,1984.
[24] Nezu I, Nakagawa H. Turbulence in open-channel flows [M].Rotterdam:IAHR Press,1993.
[25] Zhang Shaopei,Yang Yang,Yang Fengguang,et al.Experimental investigation on flow velocity distribution in mountain rivers with coarse sediment bed[J].Advanced Engineering Sciences,2019,51(1):152–157.[张绍培,杨阳,杨奉广,等.山区河道粗颗粒床面垂线流速分布规律试验研究[J].工程科学与技术,2019,51(1):152–157.]
[26] Einstein H A,Berkeley E.Hydrodynamic forces on a rough wall[J].Reviews of Modern Physics,1949,21(3):520–524.
[27] Kironoto B A. Turbulence characteristics of uniform and non-uniform,rough open-channel flow[D].Lausanne:EPFL thesis,1993.
[28] Yang Fengguang,Liu Xingnian,Yang Kejun,et al.Study on the angle of repose of nonuniform sediment[J].Journal of Hydrodynamics,Ser B,2009,21(5):685–691.
[29] Yang Fengguang, Zhou Xiaoquan, Liu Xingnian, et al. Experimental study of breach growth processes in sand dams of quake lakes[J].Journal of Earthquake and Tsunami, 2011,5(5):445–459.
[30] Yalin M S,Silva A M F.Fluvial processes[M].Delft:IAHR press,2001.
[31] Buffington J M.The legend of A. F.Shields[J]. Journal of Hydraulic Engineering,ASCE,1999,125(4):376–387.
[32] Guo Junke,Guo Sukai.Finite approximate formula of error function and its applications[J].Journal of Taiyuan University of Technology,1988,19(3):17–24.[郭俊克,郭苏凯.误差函数的有限形式近似式及其应用[J].太原工业大学学报,1988,19(3):17–24.]
[33] Luque R F,Beek R.Erosion and transport of bed-load sediment[J].Journal of Hydraulic Research,IAHR,1976,14(2): 127–144.
[34] Guy H P,Simons D B,Richardson E V.Summary of alluvial channel data from flume experiments[R].Washington: United States Government Printing Office,1966.

Comparison of Pickup Probability Formulas for Uniform Sediment

ZHONG Chenyong, *YANG Fengguang**, *NIE Ruihua*, *HUANG Er*, *LIU Xingnian*

(State Key Laboratory of Hydraulics and Mountain River Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract:

Objective The incipient motion of sediment constitutes an integral component in the study of sediment transportation. It plays a significant role in the design of stable channels, sediment transport analysis, and hazard assessment related to channel degradation. Due to the stochastic nature of sediment movement in natural rivers, defining the incipient motion criteria precisely is challenging. Therefore, accurately assessing the pickup probability of natural sediments remains essential. The objective of the present study is to develop a theoretical pickup probability formula for uniform sediment by employing a force balance mechanism in conjunction with a stochastic method.

Methods The forces acting on a sediment particle that are considered to influence the incipient motion included the drag force, lift force, submerged weight, and resistance force. Based on the rolling motion, a critical relation for the incipient motion is derived. Under the condition of incipient motion, the tangential and normal forces are related to the angle of repose of sediment particles. The incipient motion of a sediment particle occurs when the tangential drag force exceeds the tangential resistance forces. Hence, a theoretical pickup probability formula was developed based on the force balance model. Experimental results showed that the time-averaged velocity increases with increasing flow depth. It reached the maximum value at the water surface for wide open-channel flow. The time-averaged velocity was distributed based on a logarithmic law. The near-bed time-averaged velocity in the present pickup probability equation was derived by assuming the drag force acted at a position of 0.35 d distance from the theoretical bed level. For uniform flow, previous results showed that the turbulence intensity followed the exponential law. Also, the turbulence intensity in the water flow direction decreased with increasing water depth. With reference to the experimental data for a

rough open-channel flow bed conducted by Kironoto, the parameter of near-bed turbulence intensity in the present pickup probability equation was obtained. The angle of repose is a fundamental property of sediment particles. Under static conditions, the angle of repose is the steepest incline beyond which the slope of the sediment particles collapses. This property is important in sediment transportation. Previous results showed that it increases with sediment size d. With reference to the experimental data conducted by Yang, the present study derived a theoretical formula to calculate the angle of repose in a water medium. Unlike previous studies, the angle of repose equation developed in this study is a function of dimensionless sediment size d_*. The parameter of the tan value of the angle of repose was determined based on the angle of repose equation developed in this study. The drag and lift force coefficients were usually considered as unknown functions of the particle Reynolds number. Different values of both coefficients were reported in the literature. This study combined the two coefficients with an unknown function. The unknown function in the pickup probability equation was determined by comparison to the measured data.

Results and Discussions There are five parameters: the angle of repose of sediment, near-bed average velocity, near-bed turbulence intensity, drag force coefficient, and lift force coefficient. Once they are determined, the present pickup probability equation can be used in engineering applications. This study obtained all the parameters with reference to the experimental data in rough open-channel flow. The measured pickup probability data were utilized to test the proposed model. Also, the present pickup probability model was compared to the Einstein formula, Engelund and Fredsoe formula, and Cheng and Chiew formula. The pickup probability was computed using the present study formula, Einstein formula, Engelund and Fredsoe formula, and Cheng and Chiew formula with the measured input data to test the accuracy of the pickup probability equation developed in the present study. The pickup probability predictions by the four equations were listed in an error table to explain the results. The pickup probability formula developed in this study has an average relative error of 22.8% for Luque data, 66.9% for Guy ripple data, and 28.2% for Guy dune data. The results showed that the equation developed in this study provides the best representation of experimental measurements. Einstein's formula has an average relative error of 772.9% for Luque data, 2 666.4% for Guy ripple data, and 418.4% for Guy dune data. Einstein's pickup probability formula produces the highest errors, probably because his formula was not verified with experimental data in his original papers. For a given pickup probability, the pickup probability equation can be utilized to calculate the critical shear velocity of uniform sediments. Under threshold conditions, the present pickup probability $P = 0.000\ 045\ 98$, Einstein pickup probability $P = 0.02$, Engelund and Fredsoe formula $P = 0.018\ 7$, and Cheng and Chiew formula $P = 0.013$. The threshold value P of this study fell into the "weak movement" criterion, whereas the other three equations fell into the "middle movement" criterion. In addition, the present pickup probability model fitted the classic Shields diagram quite well under the incipient motion condition.

Conclusions The integral expression of sediment particle pickup probability is derived. This expression fully reveals the force mechanism acting on sediment particles and compensates for the limitation of previous pickup probability formulas that ignored the drag force of water. The pickup probability formula developed in this study demonstrates the highest calculation accuracy. In addition, for sediment particles in the critical state, the pickup probability derived in this study tends to align with the weak moving pickup criteria, whereas other formulas correspond to the moderate moving pickup criteria. Finally, when compared to the classical Shields curve, the pickup probability formula proposed in this study shows good agreement, while other formulas yield a straight line that can only determine the incipient shear stress of large particles.

Key words: uniform sediment; average flow velocity; flow lift force; flow drag force; incipient motion of sediment

（编辑　张　琼）

引用格式: Zhong Chenyong, Yang Fengguang, Nie Ruihua, et al. Comparison of pickup probability formulas for uniform sediment[J]. Advanced Engineering Sciences, 2025, 57(6): 62–69. [钟臣勇,杨奉广,聂锐华,等. 均匀沙起动概率计算模型比较研究[J]. 工程科学与技术, 2025, 57(6): 62–69.]