

•水利与土木工程•

DOI:10.12454/j.jsuese.202400073



本刊网刊

互承结构在缩聚节点编码系下的空间刚架位移法

夏永强^{1,2}, 王晋³, 孟秀梅¹, 王鹤臣¹, 倪可忆⁴, 余子英⁵, 肖南⁶, 邹宝平^{1,2*}

(1. 浙江科技大学 土木与建筑工程学院, 浙江 杭州 310023; 2. 浙江-新加坡城市更新与未来城市联合实验室, 浙江 杭州 310023;
3. 浙江瑞邦科特检测有限公司, 浙江 杭州 311122; 4. 布里斯托大学 社会科学及法学学部, 布里斯托尔 BS8;
5. 浙江省标准化研究院, 浙江 杭州 310011; 6. 浙江大学 建筑工程学院, 浙江 杭州 310058)

摘要:互承结构中铰节点位于杆件边缘,无法通过直接修改刚度矩阵的方式描述这类连接关系。为了更加高效地计算互承结构的内力和变形,本文提出一套适用于互承结构的静力计算方法。在铰节点处定义广义节点位移由铰节点的三向线位移、两个梁端节点的三向角位移组成。根据互承搭接节点处梁端节点的位移关系,用铰节点广义位移描述梁端节点位移,在传统空间刚架位移法的基础上,用铰节点处编码取代梁端节点上的两个编码,对整体结构节点编码进行缩聚。根据虚功原理,推导缩聚节点编码系下结构的总体刚度方程,集成缩聚节点编码系下结构的总体刚度矩阵。引入边界条件修正总体刚度矩阵,代入刚度方程即可求得缩聚节点编码系下结构的节点位移,进一步求得原编码系下结构的位移和内力。在算例分析中,采用本文所提方法对空间两杆搭接结构和阿基米德 6^3 型互承结构进行计算分析,并借助有限元软件 ANSYS 进行对比验证。结果显示:两种计算方法所得结果误差在 3.5% 以内,验证了本文所提方法的正确性;有限单元法模拟互承搭接节点时需要额外建立短刚臂,短刚臂将产生 15 个节点自由度,而提出的方法只需要使用实际铰节点处广义节点位移的 9 个自由度,有效减少了整体结构的计算自由度数目,在求解互承结构时更加简洁高效。

关键词:互承结构;缩聚节点编码;刚度矩阵;空间刚架位移法;有限单元法

中图分类号: TU356; TU318.1

文献标志码: A

文章编号: 2096-3246(2026)02-0302-09

互承结构构型独特,具有节点形式简单、建筑工业化程度高、造型美观等特点,近年来受到工程界的广泛关注。互承结构组成的基本特征是任一杆件的端部与相邻杆件的内部结合,所有节点仅连接两根杆件,杆件之间不存在主次等级关系。目前,这类结构形式主要应用于空间结构屋盖、廊桥和临时建筑。Gobin 等^[1]提出直接构型方法,并将遗传算法和牛顿法等应用于互承结构的构型过程,解决了互承结构的形状生成问题。Su^[2-4]、武岳^[5]、苏岩^[6]、Song^[7-8]、徐霄雁^[9]、Asefi^[10]等在 Gobin 等^[1]研究成果的基础上,优化了互承结构的构型方法,设计了可以快速实现互承构型的实用性工具。Branca^[11]、Nazarzadeh^[12]、夏永强^[13]等针对曲杆互承结构开展了一系列研究,提出曲杆互承结构的构型方法。在互承结构的静动定特性分析方面,Parigi^[14]、Xia^[15]、夏

永强^[16]等推导了互承结构的运动矩阵和平衡矩阵,以杆件位移为基本未知量,建立了互承结构的静动定特性判定方法。在互承结构的力学性能方面,Rizzuto^[17]、Castritto^[18]、齐麟^[19]、武岳^[20]等开展了数值模拟和模型试验;夏永强等^[21]推导了互承结构的静力计算公式;Castritto^[22]、张文元^[23]等研究了互承结构的节点性能。现有研究成果表明,互承结构比传统结构更柔,其力学性能较大程度地依赖于基本单元块的类型^[24-27]。

目前,互承结构尚未在实际工程中得到广泛应用,静动力计算方法复杂是造成这一局面的主要原因之一。有限单元法^[28-29]是当前互承结构静动力分析的首选,由于互承结构杆件间相互搭接,铰节点位于杆件截面边缘,为了模拟节点搭接真实情况,有限元建模时,有两种解决办法:一种是选用实体模型^[17],求得

收稿日期:2024-01-26 修回日期:2024-04-22 网络出版日期:2024-04-24

基金项目:浙江省“尖兵”“领雁”研发攻关计划(2022C03157);国家自然科学基金青年科学基金项目(72301238);浙江省自然科学基金青年科学基金项目(LQ23G20002)

作者简介:夏永强(1994—),男,讲师,博士。研究方向:钢结构;大跨空间结构。E-mail: xia-y-q@zust.edu.cn

*通信作者:邹宝平,教授,E-mail: zoubp@zust.edu.cn

结构的应力,再根据相应的材料力学知识计算梁单元的内力;另一种是用梁单元模拟互承杆件^[21],对每一个搭接点,需额外增加两个短刚臂来模拟铰接。然而,无论哪种方式,对于大型互承结构,都将带来巨大的工作量。

互承结构属于空间网格结构,空间刚架位移法是空间网格结构的重要求解方法^[30]。目前,这种方法通过直接划掉刚度矩阵中铰节点对应的行、列来模拟杆件铰接^[31],但仅适用于两根杆件直接在轴心线上铰接的情况,当铰节点位于杆件边缘时,由于存在偏心矩,杆件之间仍然可以传递弯矩,因此,直接修改刚度矩阵的方法对于这类互承体系并不适用。互承结构研究领域亟待提出一种适用于互承结构的静力计算方法,以准确高效地模拟互承搭接节点。

因此,根据互承搭接节点处梁端节点的位移关系,用铰节点的广义位移描述梁端节点位移,在传统空间刚架位移法编码原则的基础上,用铰节点处编码取代梁端节点上的两个编码,对整体结构节点编码进行缩聚。根据虚功原理,推导缩聚节点编码系下结构的总体刚度矩阵和刚度方程,提出适用于互承结构的静力计算方法。进一步地,开展算例分析,采用本文所提方法对空间两杆搭接结构和阿基米德 σ^3 型互承结构进行计算分析,并借助有限元软件 ANSYS 进行对比验证。

1 基本假定

互承结构搭接节点处力学关系复杂,为了便于刚度矩阵的推导,作如下基本假定:

- 1) 梁单元为等截面直杆;
- 2) 梁截面满足平截面假定,即变形后的梁截面仍保持为平面;
- 3) 变形后的梁截面垂直于中和轴,不考虑剪切变形的影响;
- 4) 杆件间搭接点处不产生局部挤压变形;
- 5) 杆件符合小变形、小应变假定;
- 6) 杆件材料为各向同性的线弹性材料;
- 7) 荷载仅作用在节点上。

2 铰节点处梁端节点位移关系

两根杆件相互搭接于点 m ,过点 m 分别做杆件 b_1 和 b_2 中和轴的垂面,垂面和中和轴的交点分别为点 p 和 q ,互承结构节点连接如图 1 所示。根据基本假定 2)~4),无论两根杆件产生怎样的变形,点 p 和 m 始终在同一个横截面上且两点的距离 I_{mp} 始终保持为定值;同理, I_{mq} 也始终为定值。

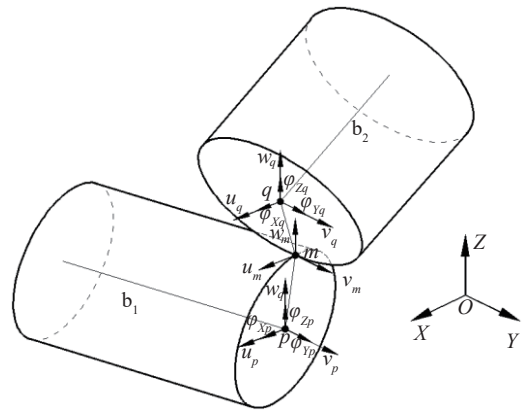


图 1 互承结构节点连接

Fig. 1 Connection of reciprocal structure

图 1 中,在整体坐标系 $O-XYZ$ 下,杆件 b_1 的梁端节点 p 有 3 个线位移和 3 个角位移,点 p 的线位移向量 $\mathbf{d}_p = [u_p \ v_p \ w_p]^T$,点 p 的角位移向量 $\Phi_p = [\varphi_{Xp} \ \varphi_{Yp} \ \varphi_{Zp}]^T$,其中, u_p 、 v_p 、 w_p 分别为点 p 沿 X 、 Y 、 Z 方向的线位移, φ_{Xp} 、 φ_{Yp} 、 φ_{Zp} 分别为点 p 绕 X 、 Y 、 Z 轴的角位移。铰节点 m 只有 3 个线位移,点 m 的线位移向量 $\hat{\mathbf{d}}_m = [u_m \ v_m \ w_m]^T$,其中, u_m 、 v_m 、 w_m 分别为点 m 沿 X 、 Y 、 Z 方向的线位移。可得到 m 和 p 点位移的关系:

$$\mathbf{d}_p = \hat{\mathbf{d}}_m - \mathbf{B}_p^m \Phi_p \tag{1}$$

式中, \mathbf{B}_p^m 为 m 和 p 点的位移转换矩阵, $\mathbf{B}_p^m = \begin{bmatrix} 0 & z_m - z_p & -(y_m - y_p) \\ -(z_m - z_p) & 0 & x_m - x_p \\ y_m - y_p & -(x_m - x_p) & 0 \end{bmatrix}$,其中, x_m 、 y_m 、 z_m

分别为整体坐标系 $O-XYZ$ 下点 m 沿 X 、 Y 、 Z 方向的坐标, x_p 、 y_p 、 z_p 分别为整体坐标系 $O-XYZ$ 下点 p 沿 X 、 Y 、 Z 方向的坐标。

同理可得:

$$\mathbf{d}_q = \hat{\mathbf{d}}_m - \mathbf{B}_q^m \Phi_q \tag{2}$$

式中: \mathbf{d}_q 为点 q 的线位移向量, $\mathbf{d}_q = [u_q \ v_q \ w_q]^T$,其中, u_q 、 v_q 、 w_q 分别为点 q 沿 X 、 Y 、 Z 方向的线位移; Φ_q 为点 q 的角位移向量, $\Phi_q = [\varphi_{Xq} \ \varphi_{Yq} \ \varphi_{Zq}]^T$,其中, φ_{Xq} 、 φ_{Yq} 、 φ_{Zq} 分别为点 q 绕 X 、 Y 、 Z 轴的角位移; \mathbf{B}_q^m 为 m 和 q 点的位移转换矩

阵, $\mathbf{B}_q^m = \begin{bmatrix} 0 & z_m - z_q & -(y_m - y_q) \\ -(z_m - z_q) & 0 & x_m - x_q \\ y_m - y_q & -(x_m - x_q) & 0 \end{bmatrix}$,其中,

x_q 、 y_q 、 z_q 分别为整体坐标系 $O-XYZ$ 下点 q 沿 X 、 Y 、 Z 方向的坐标。

特别地,当铰节点位于梁端节点上,即点 p 和 q 直接铰接时, $\mathbf{B}_p^m = \mathbf{B}_q^m = 0$,有 $\mathbf{d}_p = \mathbf{d}_q = \hat{\mathbf{d}}_m$,点 p 、 q 和 m 这 3 点线位移相等。

定义广义节点位移向量 $\hat{\mathbf{D}}_m$,由铰节点 m 的线位移、

梁端节点 p 的角位移和梁端节点 q 的角位移 3 部分组成, $\hat{\mathbf{D}}_m = [\hat{\mathbf{d}}_m^T \quad \Phi_p^T \quad \Phi_q^T]^T$ 。点 p 和 q 的位移向量 $\mathbf{D}_p, \mathbf{D}_q$ 分别由 $\hat{\mathbf{D}}_m$ 表示为:

$$\mathbf{D}_p = [\mathbf{d}_p^T \quad \Phi_p^T]^T = \mathbf{R}_p \hat{\mathbf{D}}_m \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_q = [\mathbf{d}_q^T \quad \Phi_q^T]^T = \mathbf{R}_q \hat{\mathbf{D}}_m \quad (4)$$

式中, $\mathbf{R}_p, \mathbf{R}_q$ 分别为点 m 广义节点位移和点 p, q 位移之间的转换矩阵, $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_p^E \otimes \mathbf{E}_3 - \mathbf{R}_p^B \otimes \mathbf{B}_p^m, \mathbf{R}_q = \mathbf{R}_q^E \otimes \mathbf{E}_3 - \mathbf{R}_q^B \otimes \mathbf{B}_q^m$, 其中, \otimes 表示克罗内克积, \mathbf{E}_3 为 3 阶单位矩阵, $\mathbf{R}_p^E, \mathbf{R}_p^B, \mathbf{R}_q^E, \mathbf{R}_q^B$ 为专门定义的过渡矩阵, $\mathbf{R}_p^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_p^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_q^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_q^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

利用式(3)和(4), 梁端节点位移可以由对应的铰节点的广义节点位移描述。

3 缩聚节点编码系下的总刚度方程

3.1 单元刚度矩阵

对空间中的梁单元数 e , 点 i, j 为梁单元的两个端点。根据梁的基本理论, 空间梁单元两端截面分别存在 6 个节点内力分量和 6 个节点位移分量。在整体坐标系 $O-XYZ$ 下, 6 个节点内力分量 \mathbf{F}^e 可表示为:

$$\mathbf{F}^e = [f_{Xi} \ f_{Yi} \ f_{Zi} \ M_{Xi} \ M_{Yi} \ M_{Zi} \ f_{Xj} \ f_{Yj} \ f_{Zj} \ M_{Xj} \ M_{Yj} \ M_{Zj}]^T \quad (5)$$

式中, f_{Xi}, f_{Yi}, f_{Zi} 分别为端点 i 沿着 X, Y, Z 方向的节点力, M_{Xi}, M_{Yi}, M_{Zi} 分别为端点 i 绕着 X, Y, Z 方向的节点力矩, f_{Xj}, f_{Yj}, f_{Zj} 分别为端点 j 沿着 X, Y, Z 方向的节点力, M_{Xj}, M_{Yj}, M_{Zj} 分别为端点 j 绕着 X, Y, Z 方向的节点力矩。

6 个节点位移分量 \mathbf{D}^e 可表示为:

$$\mathbf{D}^e = [u_i \ v_i \ w_i \ \varphi_{Xi} \ \varphi_{Yi} \ \varphi_{Zi} \ u_j \ v_j \ w_j \ \varphi_{Xj} \ \varphi_{Yj} \ \varphi_{Zj}]^T \quad (6)$$

式中, u_i, v_i, w_i 分别为端点 i 沿着 X, Y, Z 方向的节点位移, $\varphi_{Xi}, \varphi_{Yi}, \varphi_{Zi}$ 分别为端点 i 绕着 X, Y, Z 轴的转角; u_j, v_j, w_j 分别为端点 j 沿着 X, Y, Z 方向的节点位移, $\varphi_{Xj}, \varphi_{Yj}, \varphi_{Zj}$ 分别为端点 j 绕着 X, Y, Z 轴的转角。

梁单元节点力和节点位移之间的关系可表示为:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{D}^e = \mathbf{F}^e \quad (7)$$

式中: \mathbf{K}^e 为第 e 个单元在整体坐标系下的刚度矩阵, 可参考李亚明^[30]的研究成果并结合坐标转换矩阵推导获得。

3.2 缩聚节点编码

对各个单元和节点进行编码, 设结构共有 N 个梁端节点, 梁端节点位移可用一个 $6N$ 维向量 \mathbf{D} 表示:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1^T \quad \mathbf{D}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{D}_N^T]^T \quad (8)$$

式中, $\mathbf{D}_i (i=1, 2, \dots, N)$ 为节点的位移向量。

当结构存在 N_m 个铰节点时, 铰节点处对应的两个梁端节点的节点位移可以用铰节点处的广义节点位移描述, 因此, 可用一个铰节点处的编码来取代梁端节点上的两个编码(图 1 中, 点 p 和 q 不再编码, 只在点 m 编码)。将原编码系进行缩聚, 缩聚后编码的个数由 N 变为 $N-N_m$, 缩聚节点编码系下的节点位移向量 $\hat{\mathbf{D}}$ 削减为 $6N-3N_m$ 维。

$$\hat{\mathbf{D}} = [\hat{\mathbf{D}}_1^T \quad \hat{\mathbf{D}}_2^T \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{D}}_{N-N_m}^T]^T \quad (9)$$

设梁端节点在原编码系下的编码为 $n (1 \leq n \leq N)$, 对应缩聚节点编码系下的编码为 $k (1 \leq k \leq N_m)$, 引入 $(N-N_m) \times (N-N_m)$ 的分块矩阵 \mathbf{H} , 第 k 行、 k 列子矩阵 $\mathbf{H}_{(k,k)}$ 为:

$$\mathbf{H}_{(k,k)} = \begin{cases} \mathbf{A}, & \text{编码为 } k \text{ 的节点不是铰接点;} \\ \mathbf{E}_9, & \text{编码为 } k \text{ 的节点是铰接点} \end{cases} \quad (10)$$

式中: $\mathbf{A} = [\mathbf{E}_6 \quad \mathbf{0}_{6 \times 3}]^T$, 其中, \mathbf{E}_6 为 6 阶单位矩阵, $\mathbf{0}_{6 \times 3}$ 为 6 行 3 列的 $\mathbf{0}$ 矩阵; \mathbf{E}_9 为 9 阶单位矩阵。

矩阵 \mathbf{H} 中除了第 k 行、第 k 列子矩阵, 其余位置的子矩阵均为 $\mathbf{0}$ 矩阵。可得到过渡节点位移向量 $\hat{\mathbf{D}}_H = \mathbf{H}\hat{\mathbf{D}}$, 该向量用以建立两套节点编码系统下节点位移向量之间的联系。

引入 $N \times (N-N_m)$ 的矩阵 $\mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n$ 仅第 n 行、第 k 列元素为 1, 其余元素均为 0, 定义参数矩阵 \mathbf{C}_n 为:

$$\mathbf{C}_n = \begin{cases} \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}^T, & \text{编码为 } k \text{ 的节点是铰接点;} \\ \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{R}_n, & \text{编码为 } k \text{ 的节点不是铰接点} \end{cases} \quad (11)$$

式中, \mathbf{R}_n 为转换矩阵, 通过 $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_p^E \otimes \mathbf{E}_3 - \mathbf{R}_p^B \otimes \mathbf{B}_p^m, \mathbf{R}_q = \mathbf{R}_q^E \otimes \mathbf{E}_3 - \mathbf{R}_q^B \otimes \mathbf{B}_q^m$ 求得。

进一步地, 可得到整体结构的缩聚节点编码系节点位移转换矩阵 \mathbf{J} 为:

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^N \mathbf{C}_n \quad (12)$$

两套节点编码系下的节点位移转换关系为:

$$\mathbf{D} = \mathbf{J}\hat{\mathbf{D}}_H = \mathbf{J}\mathbf{H}\hat{\mathbf{D}} \quad (13)$$

3.3 缩聚节点编码系下的整体刚度矩阵

对于互承结构, 由于采取两套节点编码准则, 传统“对号入座”的整体刚度矩阵集成过程难以实现。故而, 借助虚功原理, 集成结构的整体刚度矩阵。

空间梁单元的节点力和节点位移如图 2 所示。对图 2 的任意梁单元在整体坐标系下, 梁端节点产生虚位移 $\delta \mathbf{D}^e$:

$$\delta \mathbf{D}^e = \lambda^e \delta \mathbf{D} = \lambda^e \mathbf{J}\mathbf{H}\delta \hat{\mathbf{D}} \quad (14)$$

式中: δ 为虚位移的计算符号; λ^e 为 $12 \times 6N$ 维的单元定位矩阵, 反映了梁单元的梁端节点位移在整体结构节点位移中的位置, 该矩阵求法参考李亚明^[30]的研究。

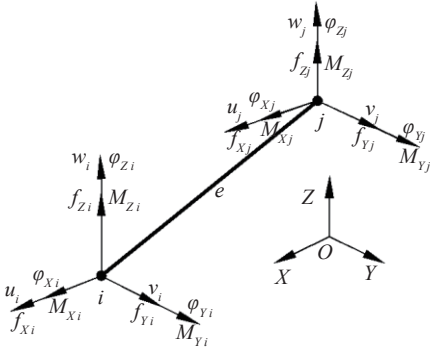


图 2 空间梁单元的节点力和节点位移

Fig. 2 Nodal forces and nodal displacements of a space beam element

梁单元内力在虚位移 $\delta \mathbf{D}^e$ 上所做的虚功 W_{in}^e 为:

$$W_{in}^e = \delta [\mathbf{D}^e]^T \mathbf{K}^e \mathbf{D}^e = \delta [\lambda^e \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\mathbf{D}}]^T \mathbf{K}^e [\lambda^e \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\mathbf{D}}] \quad (15)$$

\mathbf{P}^e 为作用于第 e 个梁单元上的等效节点荷载向量, 荷载在虚位移 $\delta \mathbf{D}^e$ 上做的虚功 W_{out}^e 为:

$$W_{out}^e = \delta [\mathbf{D}^e]^T \mathbf{P}^e = \delta [\lambda^e \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\mathbf{D}}]^T \mathbf{P}^e \quad (16)$$

当结构包含 N^e 个单元时, 根据整体结构内力虚功和外力虚功相等的原则, 可以得到结构的虚功方程为:

$$\sum_e^{N^e} \delta [\lambda^e \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\mathbf{D}}]^T \mathbf{K}^e [\lambda^e \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\mathbf{D}}] = \sum_e^{N^e} \delta [\lambda^e \mathbf{J} \mathbf{H} \hat{\mathbf{D}}]^T \mathbf{P}^e \quad (17)$$

进一步地, 可得到缩聚节点编码系下结构的总体刚度方程:

$$\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{P}} \quad (18)$$

式中, $\hat{\mathbf{K}}$ 和 $\hat{\mathbf{P}}$ 分别为缩聚节点编码系下结构的总体刚度矩阵和等效节点荷载向量, 与传统的矩阵位移法一样, $\hat{\mathbf{K}}$ 也为对称矩阵。

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{H}^T \mathbf{J}^T \left[\sum_e^{N^e} [\lambda^e]^T \mathbf{K}^e \lambda^e \right] \mathbf{J} \mathbf{H} \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{H}^T \mathbf{J}^T \sum_e^{N^e} [\lambda^e]^T \mathbf{P}^e \quad (20)$$

对于式(18), 通过修正刚度矩阵, 引入边界条件, 使结构满足成为几何不变体系的条件 $|\hat{\mathbf{K}}| \neq 0$, 即可求得缩聚节点编码系下结构的节点位移 $\hat{\mathbf{D}}$ 。如果 $|\hat{\mathbf{K}}| = 0$, 说明结构是几何可变体系, 无法计算。

4 算例分析

4.1 空间两杆搭接结构计算分析

空间中两根杆件在端部搭接组成一“L”形刚架, 杆件 b_1 沿 X 方向, 杆件 b_2 沿 Y 方向, 空间两杆搭接结构如图 3 所示。杆件截面为直径 20 mm 的实心圆。结构材料的弹性模量 $E=2.06 \times 10^{11}$ N/m², 泊松比 $\nu=0.3$, 剪切模量 $G=E/2(1+\nu)$ 。杆件与基础刚接, 在 b_1 端点位置作用沿 Z 轴负向的集中荷载 800 N。

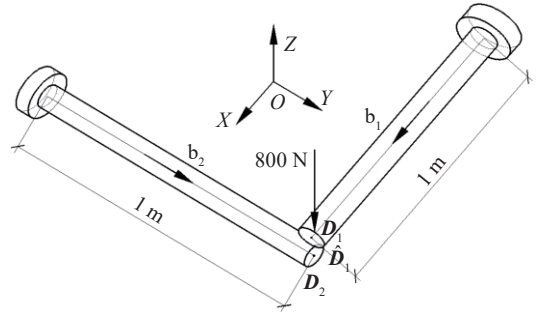


图 3 空间两杆搭接结构

Fig. 3 Space lap structure with two rods

根据空间刚架位移法的基本原理, 可将整体结构离散为两个单元, 杆件上的箭头表示单元的正方向, 由梁端节点 i 指向梁端节点 j 。本文算例节点数目较少, 为了减少矩阵的维度, 采用先处理法^[30], 不对支座约束处的节点进行编码, 原始梁端节点编码、缩聚节点编码见图 3。两套编码系统下的位移描述转换关系为:

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{D}}_1 \quad (21)$$

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{R}_2 \hat{\mathbf{D}}_1 \quad (22)$$

式(21)、(22)中: \mathbf{D}_1 为杆件 b_1 端部节点位移向量; \mathbf{D}_2 为杆件 b_2 端部节点位移向量; $\hat{\mathbf{D}}_1$ 为缩聚节点编码系下的节点位移向量; \mathbf{R}_1 、 \mathbf{R}_2 为转换矩阵, 分别表示为

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

可得到结构的虚功方程:

$$\delta \mathbf{D}_1^T \mathbf{K}_{jj}^1 \mathbf{D}_1 + \delta \mathbf{D}_2^T \mathbf{K}_{jj}^2 \mathbf{D}_2 = \delta \mathbf{D}_1^T \mathbf{P}_j^1 \quad (23)$$

式中, \mathbf{K}_{jj}^1 、 \mathbf{K}_{jj}^2 分别为整体坐标系 $O-XYZ$ 下 1 号梁单元 j 端的刚度矩阵和 2 号梁单元 j 端的刚度矩阵, \mathbf{P}_j^1 为整体坐标系 $O-XYZ$ 下作用于 1 号梁单元 j 端的等效节点荷载向量。

将式(21)、(22)代入式(23)可得:

$$\left(\mathbf{R}_1^T \mathbf{K}_{jj}^1 \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2^T \mathbf{K}_{jj}^2 \mathbf{R}_2 \right) \hat{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{R}_1^T \mathbf{P}_j^1 \quad (24)$$

因此, 结构在缩聚节点编码系下的总体刚度矩阵 $\hat{\mathbf{K}}$ 和等效节点荷载向量 $\hat{\mathbf{P}}$ 为:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{R}_1^T \mathbf{K}_{jj}^1 \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2^T \mathbf{K}_{jj}^2 \mathbf{R}_2 \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{R}_1^T \mathbf{P}_j^1 \quad (26)$$

根据结构力学, 可得:

实体单元有限元模拟得到Z向位移云图。由图8可知,结构的最大Z向位移仍然为-0.083 m,有限元结果与理论计算结果吻合良好。

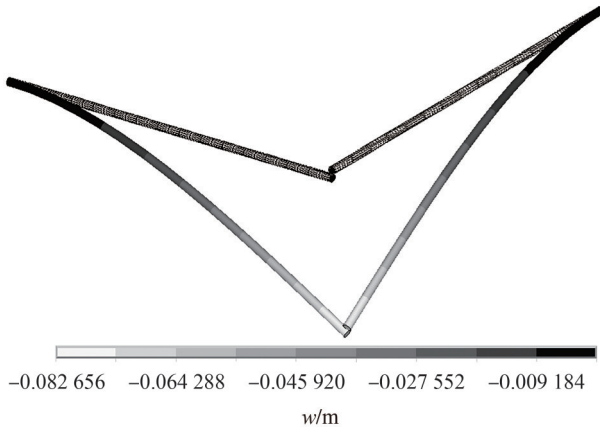


图8 ANSYS 实体单元模型计算结构Z向位移云图

Fig. 8 Z-component of nodal displacements calculated by ANSYS solid element model

4.2 阿基米德 6³型互承结构的计算分析

图9为阿基米德 6³型互承结构,每根杆件为直径 60 mm、长 1.2 m 的等截面圆杆,杆件外部自由端与基础铰接,点2和12处沿Z轴负向的集中荷载均为 80 kN。按照空间刚架位移法,该构型共包含 21 个梁单元、30 个梁端节点,有 12 对梁端节点存在两两铰接关系。经过节点编码缩聚,缩聚节点编码系中共 12 个节点编码,如图9中编号1~12所示。

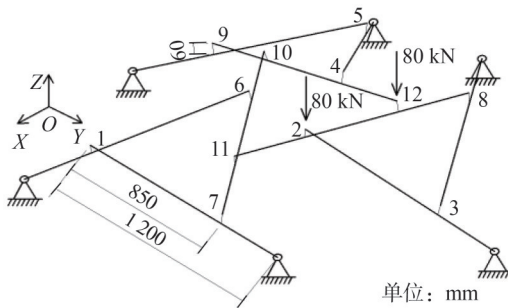


图9 阿基米德 6³型互承结构

Fig. 9 Reciprocal structure based on 6³ type of Archimedes tiling

梁单元材料特性、ANSYS 单元选取、互承节点模拟方式等同算例 4.1。图 10 为阿基米德 6³型互承结构的有限元模型。分别采用本文所提方法和有限元软件 ANSYS 计算结构在荷载作用下的节点位移和内力。

阿基米德 6³型互承结构梁端节点位移、内力数据对比分别如图 11、12 所示。图 11、12 中, τ_x 、 τ_y 、 τ_z 分别为节点沿着 X、Y、Z 方向的节点位移或节点力, τ_{rotX} 、 τ_{rotY} 、 τ_{rotZ} 分别为节点绕着 X、Y、Z 轴的转角或节点力矩, η_t 为理论计算结果和有限元结果计算的误差率。

由图 11、12 可知,两种计算方法所得结果误差率

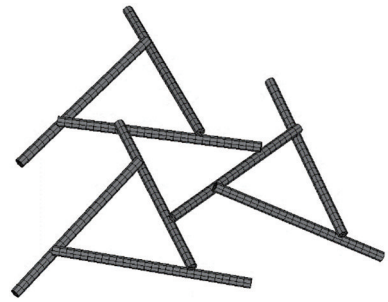


图10 阿基米德 6³型互承结构的有限元模型

Fig. 10 Finite element model of the reciprocal structure transformed from the 6³ type of Archimedes paving

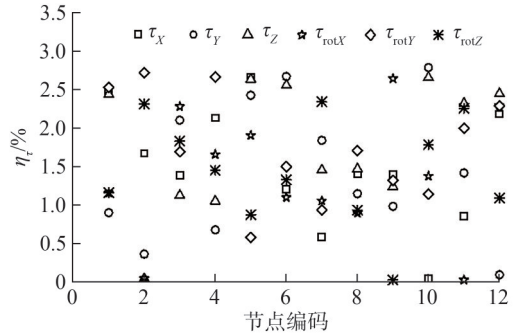


图11 阿基米德 6³型互承结构梁端节点位移数据对比

Fig. 11 Comparison of the results for the beam end nodal displacements of the reciprocal structure transformed from the 6³ type of Archimedes paving

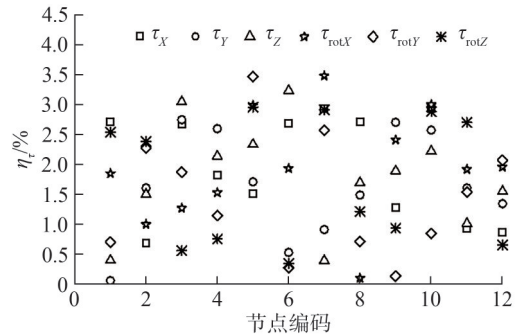


图12 阿基米德 6³型互承结构梁端节点内力数据对比

Fig. 12 Comparison of the results for the beam end nodal forces of the reciprocal structure transformed from the 6³ type of Archimedes paving

小于 3.5%, 结果基本一致, 但不完全符合。误差产生的原因是: ANSYS 模拟梁端节点铰接时建立了短刚臂, 虽然令刚臂的刚度远大于结构杆件的刚度, 但并没有达到绝对刚性, 因此, ANSYS 的建模并不完全符合平截面假定。

通过算例分析可以发现, 相较于有限元分析, 将本文提出的缩聚节点编码系下的空间刚架位移法用于分析互承结构时, 具有以下两点优势:

1) 有限单元法采用增加刚臂单元的方法来模拟互承搭接节点, 建立一对短刚臂需要引入 15 个自由度, 包括两个刚臂, 分别和所在杆件刚接产生的 6 个自由度 (3 个线位移、3 个角位移), 两刚臂铰接产生的

3个自由度(3个线位移);而在缩聚节点编码系下,只需要使用实际铰节点 m 处广义节点位移的9个自由度,自由度的数目减少了40%。因此,本文所提方法有效减少了整体结构的计算自由度数目,大大降低了计算工作量。

2)有限单元法中,为了符合平截面假定,两个短刚臂需要设定非常大的刚度值,若刚度取值不当,会导致非线性计算收敛困难甚至不收敛。本文提出的方法不包含刚臂单元,具有更好的数值稳定性。

5 结论

1)根据互承结构搭接点处梁端节点的位移关系,在实际铰节点上定义广义节点位移,用广义节点位移描述梁端节点位移。在传统空间刚架位移法编码原则的基础上,用铰节点处编码来取代梁端节点上的两个编码,对整体结构节点编码进行缩聚。根据虚功原理,推导缩聚节点编码系下结构的总体刚度矩阵和刚度方程,提出适用于互承结构的静力计算方法。

2)将传统的空间刚架位移法计算铰接于梁端节点外的互承结构时,必须额外增加短刚臂,对于大型结构,将带来巨大的工作量。本文所提方法在已知构型的情况下,铰节点位置已经确定,无须专门增加单元,在实际操作执行时,可以更加便捷地算出梁端节点位移和节点力,从而获得整个结构的变形和内力。

3)利用提出的方法分别对空间两杆搭接结构和阿基米德 6^3 型互承结构进行计算分析,并与有限元软件ANSYS分析结果比较,结果表明,两种方法计算误差在3.5%以内,所得结果基本一致,验证了本文所提方法的正确性。

参考文献:

[1] Gobin T, Mesnil R, Douthe C, et al. Form finding of nexorades using the translations method[C]//Robotic Fabrication in Architecture, Art and Design 2018. Cham: Springer, 2019: 232–241.

[2] Su Yan, Zhang Jingyao, Ohsaki M, et al. Topology optimization and shape design method for large-span tensegrity structures with reciprocal struts[J]. International Journal of Solids and Structures, 2020, 206: 9–22.

[3] Su Yan, Wu Yue, Qiao Gang, et al. Self-adaptive form generation method for reciprocal grid structures[J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2019, 34(5): 444–454.

[4] Su Yan, Ohsaki M, Wu Yue, et al. A numerical method for form finding and shape optimization of reciprocal structures[J]. Engineering Structures, 2019, 198: 109510.

[5] Wu Yue, Su Yan, Qiao Gang. A form-finding method for re-

ciprocal spatial grid structure[J]. Journal of Building Structures, 2018, 39(7): 11–17. [武岳, 苏岩, 乔刚. 互承式空间网格结构找形方法研究[J]. 建筑结构学报, 2018, 39(7): 11–17.]

[6] Su Yan. Research and application of morphological generation for innovative spatial structures[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021. [苏岩. 新型空间结构形态创建研究与应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2021.]

[7] Song Peng, Fu C W, Goswami P, et al. Reciprocal frame structures made easy[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(4): 1–13.

[8] Song Peng, Fu C W, Goswami P, et al. An interactive computational design tool for large reciprocal frame structures[J]. Nexus Network Journal, 2014, 16(1): 109–118.

[9] Xu Xiaoyan, Xiao Nan, Fan Binghe. Feasibility determination of common cylindrical grids converting to reciprocal configurations[J]. Journal of Zhejiang University(Engineering Science), 2018, 52(8): 1583–1595. [徐霄雁, 肖南, 范冰河. 常用柱面网格生成互承构型的可行性判定[J]. 浙江大学学报(工学版), 2018, 52(8): 1583–1595.]

[10] Asefi M, Bahremandi-Tolou M. Design challenges of reciprocal frame structures in architecture[J]. Journal of Building Engineering, 2019, 26: 100867.

[11] Brancart S, Larsen O P, Laet L D, et al. Bending-active reciprocal structures based on equilateral polyhedral geometries [C]//Proceedings of the IASS Annual Symposium 2017. Hamburg: IASS, 2017: 1–10.

[12] Nazarzadeh F, Asefi M. Geometric feasibility of kinetic reciprocal frame structures with linear and curved elements and a constant perimeter[J]. Journal of Architectural Engineering, 2022, 28(2): 04022014.

[13] Xia Yongqiang, Xiao Nan, Zhang Zihao, et al. Configuration approach to reciprocal structures assembled by curved rods based on optimization algorithm[J]. Journal of Building Structures, 2023, 45(1): 69–75. [夏永强, 肖南, 张子昊, 等. 基于优化算法的曲杆互承结构构型方法[J]. 建筑结构学报, 2023, 45(1): 69–75.]

[14] Parigi D, Sassone M, Kirkegaard P H, et al. Static and kinematic formulation of planar reciprocal assemblies[J]. Nexus Network Journal, 2014, 16(1): 37–59.

[15] Xia Yongqiang, Xiao Nan, Chen Huapeng, et al. Determination of static and kinematic determinacy of pin-jointed assemblies using rigid-body displacements as primary unknown variables[J]. Engineering Structures, 2019, 181: 643–652.

[16] Xia Yongqiang, Xiao Nan, Qian Xiaoqian. Investigation on determination method of static and kinematic determinacy by matrix analysis for reciprocal configurations[J]. Journal of Building Structures, 2020, 41(3): 140–149. [夏永强, 肖南, 钱晓倩. 互承构型静动定特性矩阵判定方法研究[J]. 建

- 筑结构学报,2020,41(3):140–149.]
- [17] Rizzuto J P. Experimental investigation of reciprocally supported element (RSE) lattice honeycomb domes structural behaviour[J]. *Engineering Structures*, 2018, 166: 496–510.
- [18] Castriotto C, Celani G, Tavares F. Reciprocal frames algorithm based on symmetry groups[J]. *Nexus Network Journal*, 2022, 24(1): 167–186.
- [19] Qi Lin, Li Zifei, Pan Hui, et al. Study on mechanical properties of double-layer hex-tri timber reciprocal frame of mortise-tenon connections[J]. *Journal of Building Structures*, 2022, 43(11): 151–157. [齐麟, 李子飞, 潘慧, 等. 双层六边-三边形榫卯互承木结构受力性能研究[J]. *建筑结构学报*, 2022, 43(11): 151–157.]
- [20] Wu Yue, Su Yan. Experimental study and finite element analysis on mechanical behavior of suspended reciprocal grid structures[J]. *Journal of Building Structures*, 2021, 42(7): 65–75. [武岳, 苏岩. 弦支式互承网格结构受力性能试验及有限元分析[J]. *建筑结构学报*, 2021, 42(7): 65–75.]
- [21] Xia Yongqiang, Xiao Nan, Qian Xiaoqian. Novel approach to calculation of internal forces for the reciprocal frames with hinged girders[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2019, 47(3): 115–120. [夏永强, 肖南, 钱晓倩. 铰接梁系静定互承结构的内力计算方法[J]. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2019, 47(3): 115–120.]
- [22] Castriotto C, Tavares F, Celani G, et al. Clamp links: A novel type of reciprocal frame connection[J]. *International Journal of Architectural Computing*, 2022, 20(2): 378–399.
- [23] Zhang Wenyuan, Liu Chenchen, Ding Yukun, et al. Mechanical performance of a new hanger joint of secondary beam to primary beam in timber structures[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2019, 51(12): 128–136. [张文元, 刘辰辰, 丁玉坤, 等. 木结构主次梁新型挂钩件连接节点的受力性能[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2019, 51(12): 128–136.]
- [24] Li Chuandong. Research on mechanical performance and failure mechanism of reciprocal timber shell structure[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021. [李传栋. 互承式木网壳受力性能与失效机理研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2020.]
- [25] Qiao Gang. Geometric configuration and mechanical performance analysis of reciprocal structure[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2016. [乔刚. 互承式空间网格结构构形方法及受力性能研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2016.]
- [26] Piekarski M. Static analysis of structural grillages made of steel reciprocal beams[J]. *Engineering Structures*, 2023, 291: 116360.
- [27] Chea C P, Bai Yü, Fang Yihai, et al. Geometric forming and mechanical performance of reciprocal frame structures assembled using fibre reinforced composites[J]. *Engineering Structures*, 2022, 250: 113420.
- [28] 汪利, 刘祚秋, 吕中荣. 有限单元法[M]. 广州: 中山大学出版社, 2022.
- [29] Li Gang, Lu Zhichao, Yu Dinghao. The finite element model for inelasticity-separated multi-layer shell[J]. *Engineering mechanics*, 2020, 37(3): 18–27. [李刚, 吕志超, 余丁浩. 隔离非线性分层壳有限单元法[J]. *工程力学*, 2020, 37(3): 18–27.]
- [30] 李亚明. 复杂空间结构设计与实践[M]. 上海: 同济大学出版社, 2021.
- [31] Sneathish C, Karan K P. Computational structural mechanics: Static and dynamic behaviors[M]. Massachusetts: Academic Press, 2018.

Spatial Matrix Displacement Method of Reciprocal Structures Based on Condensed Nodal Coding System

XIA Yongqiang^{1,2}, WANG Jin³, MENG Xiumei¹, WANG Hechen¹, NI Keyi⁴, YU Ziyang⁵, XIAO Nan⁶, ZOU Baoping^{1,2*}

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China;

2. Zhejiang–Singapore Joint Laboratory for Urban Renewal and Future City, Hangzhou 310023, China;

3. Zhejiang Reborn Inspection Co., Ltd, Hangzhou 311122, China;

4. Faculty of Social Science and Law, University of Bristol, Bristol BS8, the United Kingdom;

5. Institute of Standardization Research Zhejiang Province, Hangzhou 310011, China;

6. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract:

Objective The rod articulation in the spatial matrix displacement method is simulated by directly eliminating the rows and columns associated with the hinge point in the stiffness matrix, which is only applicable when two rods are directly articulated on the axial line. For reciprocal structures, the hinge points are located at the rod edges, and the presence of eccentricity allows the bending moments to be transmitted between rods, so the direct modification of stiffness matrices is not applicable to this type of reciprocal system. This study proposes a static calculation method applicable to such systems to accurately and efficiently simulate the reciprocal hinge point and more conveniently calculate the internal forces and deformations of reciprocal structures.

Methods First, the generalized nodal displacement consisting of nine components is defined at the hinge point, including the three translations at

the hinge point and the three rotations at the two beam end nodes. The displacement relationship of the beam end nodes at the reciprocal connection is simplified by introducing the generalized displacements at the hinge point to describe the displacements of the nodes at the beam ends. Based on the traditional spatial matrix displacement method, the elements and nodes of the spatial frame structure require coding. Because the nodal displacements at the beam end nodes are described by the generalized displacements at the hinge point, the entire structural nodal coding is condensed by replacing the two codes at the beam end nodes with one code at the hinge point. For a structure with N beam end nodes and N_m hinge points, the number of nodal codes decreases from N to $N - N_m$ after condensation, and the dimension of the nodal displacement vector is also reduced. Due to the adoption of two sets of nodal coding, integrating the whole stiffness matrix by using the traditional positional localization approach becomes difficult. Therefore, the equation of internal virtual work done by the internal force of the beam element on the virtual displacement of the beam end nodes and the equation of external virtual work done by the equivalent node load on the virtual displacement of the beam end nodes are established separately. Based on the principle of virtual work, in which the virtual work of internal force equals the virtual work of external force, the virtual work equation of the structure is obtained as the whole stiffness equation of the structure under the condensed nodal coding system. At the same time, the whole stiffness matrix of the structure under the condensed coding system is obtained and, similar to the traditional matrix displacement method, remains symmetric. After introducing boundary conditions, the whole stiffness matrix is modified, and the nodal displacements of the structure under the condensed nodal coding system are obtained. In addition, the displacements and internal forces of the structure under the original coding system are calculated.

Results and Discussions In the numerical examples, the proposed method is first applied to calculate and analyze the nodal displacements and internal forces of the space lap structure with two rods, and ANSYS software is employed to perform finite element analysis for verification. In the finite element model, Beam 189 and Solid 45 are utilized to simulate the rods, and the results show that regardless of the element type, the finite element results agree well with the theoretical results. Further, the reciprocal structure transformed from the 6^3 type of Archimedes paving is determined by the proposed method to obtain the nodal displacements and internal forces, and comparative validation is again conducted by using ANSYS finite element software. The results show that the error between the proposed method and ANSYS finite element results remains within 3%. The two sets of results are generally consistent but do not perfectly match because short stiff arms are introduced in the ANSYS model to simulate the articulation of the beam end nodes. The stiff arm is not absolutely rigid, although it has much greater stiffness than the rods, so the ANSYS finite element model does not fully satisfy the flat cross-section assumption.

Conclusions Compared to finite element analysis, the spatial rigid matrix displacement method under the condensed nodal coding system presents clear advantages for analyzing reciprocal structures. The finite element method requires additional short stiff arms to simulate the reciprocal connection, which generates 15 nodal degrees of freedom. In contrast, the proposed method uses only 9 degrees of freedom for the generalized nodal displacements at the actual hinge points, effectively reducing the computational degrees of freedom of the whole structure and providing a more concise and efficient analysis approach. In addition, in the finite element method, enforcing the flat cross-section assumption requires the stiffness of the two short rigid arms to be extremely large, which can cause convergence difficulties or even non-convergence in nonlinear calculations when inappropriate stiffness values are used. Because the proposed method does not include short rigid arm elements, it exhibits better numerical stability.

Key words: reciprocal structure; condensed nodal coding; stiffness matrix; spatial matrix displacement method; finite element method

(编辑 周璇)

引用格式: Xia Yongqiang, Wang Jin, Meng Xiumei, et al. Spatial matrix displacement method of reciprocal structures based on condensed nodal coding system[J]. *Advanced Engineering Sciences*, 2026, 58(2): 302–310. [夏永强, 王晋, 孟秀梅, 等. 互承结构在缩聚节点编码系下的空间刚架位移法[J]. *工程科学与技术*, 2026, 58(2): 302–310.]