

• 水工岩石力学 •

DOI:10.12454/j.jsuese.202500274



本刊网刊

考虑中主应力影响的修正摩尔-库仑硬岩强度准则

俞 缙¹, 周永盛¹, 张 超^{1,2,3*}, 常 旭¹, 蔡燕燕¹

(1. 华侨大学 福建省隧道与城市地下空间工程技术研究中心, 福建 厦门 361021; 2. 中铁五局集团有限公司, 湖南 长沙 410021; 3. 湖南科技大学 土木工程学院, 湖南 湘潭 411201)

摘 要: 预测岩石破坏强度的关键在于建立能够准确反映复杂应力条件下岩石强度准则。首先, 基于摩尔应力圆理论提出了真三轴应力条件下 Mohr-Coulomb 准则(M-C 准则)泛函式, 结合岩石真三轴试验数据进行分析, 结果表明, 中主应力对黏结强度分量影响显著, 而对摩擦强度分量的影响可忽略不计, 该规律可通过中主应力效应函数进行量化表征。随后, 通过分析 D-P 准则、Mogi 准则和修正 Lade 准则, 发现强度预测偏差大的原因在于中主应力效应函数的数学表征失准, 为解决这一关键问题, 引入双参数 η 和 γ 构建新型中主应力效应函数, 并结合岩石临界状态特性对经典 M-C 准则进行修正, 建立能够考虑中主应力影响的非线性 M-C 强度准则。最后, 采用 6 类不同硬岩真三轴试验数据对新准则的适用性进行验证, 并与 4 种传统强度准则进行对比分析。结果表明, 修正 M-C 强度准则能够很好地描述中主应力效应, 强度预测精度达 0.94 以上, 证明了该准则在复杂应力状态下的适用性和工程应用价值。

关键词: 深部岩石; 强度准则; 中主应力; 临界围压; 非线性

中图分类号: TU452

文献标志码: A

文章编号: 2096-3246(2026)01-0046-11

岩石强度预测是岩体工程稳定性分析的理论基础, 关键在于建立能够准确反映复杂应力条件下岩石强度准则^[1-2]。Mohr-Coulomb 准则(M-C 准则)和 Hock-Brown 准则(H-B 准则)因其参数物理意义明确、表达式简洁, 在浅部工程稳定性评估中得到了广泛应用^[3]。然而, 深埋硬岩表现出显著的非线性变形特征, 中主应力影响显著, 因此, 建立考虑中主应力影响的硬岩非线性强度准则具有重要的理论应用价值。

经典的 M-C 准则和 H-B 准则存在明显的局限性。随着围压的增加, 其强度预测值会偏离岩石强度试验值且误差呈增大趋势^[4-5], 两者均未考虑中主应力对岩石强度的显著影响。这种理论缺陷在深部岩体工程中表现尤为突出: 深部岩石在高围压作用下呈现非线性强度演化特征, 当围压达到临界值时岩石进入强度稳定阶段^[4]; 真三轴应力场使中主应力效应成为不可忽略的影响因素, 显著增加了强度预测难度。基于真三轴试验的硬岩强度特性研究表明^[6-7], 中主应力对岩石破坏强度

的影响具有 3 个典型特征: 1) 在小主应力恒定条件下, 强度随中主应力的增加呈现先增后减的非单调变化趋势, 但始终大于常规三轴强度; 2) 中主应力效应弱于围压效应, 且与小主应力水平存在耦合关系; 3) 强度随中主应力的变化呈现非对称性。

现有岩石真三轴强度准则主要分为两类: 1) 基于强度理论与真三轴试验数据构建, 如考虑静水压力的 D-P 准则^[8], 但其假定中主应力与小主应力对强度具有等效作用, 与试验结果存在矛盾; Mogi^[9]和 You^[10]提出的经验准则虽能够较好拟合试验数据, 但违背了 D-P 准则假定; Ewy^[11]通过引入黏结应力改进 Lade 准则, 拓展了适用范围。2) 研究集中于经典二维准则的三维扩展, 如 Wu^[12]、Singh^[13]、张强^[14]、Lee^[15]等解决了拉压点奇异问题, 但推导过程复杂, 且缺乏物理依据; 王国安^[16]、石祥超^[17]、Li^[18]等通过在 H-B 准则中引入中主应力参数进行扩展, 虽表达形式简单但仍未解决高围压下强度预测值偏差增大的缺陷。

收稿日期: 2025-04-15 修回日期: 2025-10-10 网络出版日期: 2025-10-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(52374090); 中国博士后科学基金资助项目(2023MD744275); 贵州省基础研究计划(黔科合基础 MS [2025]037)

作者简介: 俞 缙(1978—), 男, 教授. 研究方向: 深部岩石工程与防灾. E-mail: bugyu0717@163.com

* 通信作者: 张 超, 讲师, E-mail: flyheartzc@hmust.edu.cn

为此,本文首先基于经典M-C强度理论开展摩尔应力圆特性分析,提出真三轴应力条件下M-C强度准则泛函式,并采用4种硬岩真三轴试验数据进行初步验证;然后,通过对比分析现有常用岩石强度准则,提出一种新的中主应力效应函数表达式,建立修正M-C强度准则;进一步地引入临界围压概念对摩尔包络线进行修正,建立非线性M-C强度准则;最后,基于6种不同硬岩真三轴试验数据验证该准则的适用性,为深部岩体工程稳定性分析提供更合理的强度准则。

1 真三轴下M-C强度准则泛函式

为表征岩石真三轴应力状态,郑颖人等^[19]提出中主应力系数 β 的表达式,即:

$$\beta = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, 0 \leq \beta \leq 1 \quad (1)$$

式中, σ_1 、 σ_2 和 σ_3 分别为最大主应力、中主应力和最小主应力。当 $\sigma_2 = \sigma_3$ 时, $\beta = 0$;当 $\sigma_2 = \sigma_1$ 时, $\beta = 1$ 。根据摩尔-库仑准则,增大 σ_3 不会改变岩石的黏聚力 c 和内摩擦角 φ ,然而,在 σ_2 作用下,破坏面上法向应力 σ 增大不会引起 φ 的变化,但会导致 c 的增大^[19], β 的改变会导致库仑线上移,黏聚力提高,其公式可表示为:

$$\tau_\beta = c + \Delta c + \sigma_\beta \tan \varphi \quad (2)$$

式中: τ_β 和 σ_β 分别为不同 β 条件下岩石剪切面上的抗剪切应力和法向应力; Δc 为改变 β 引起的黏聚力变化值,可称为似黏聚力^[19]。

式(2)可改写为:

$$\tau_\beta = cf(\beta) + \sigma_\beta \tan \varphi \quad (3)$$

式中, $f(\beta)$ 为中主应力效应函数。

$$f(\beta) = 1 + \Delta c/c \quad (4)$$

根据极限平衡状态时的摩尔应力圆,可得真三轴应力条件下岩石M-C强度准则泛函式,即:

$$\sigma_1 = \sigma_{cc} + q_0 \sigma_3 \quad (5)$$

$$\begin{cases} \sigma_{cc} = f(\beta)C_0, \\ C_0 = 2c \cos \varphi / (1 - \sin \varphi), \\ q_0 = (1 + \sin \varphi) / (1 - \sin \varphi) \end{cases} \quad (6)$$

式中, σ_{cc} 和 C_0 分别为岩石双轴压缩强度和单轴压缩强度, q_0 为与 c 和 φ 相关的参数。可以看出,岩石的强度由黏结强度分量 $f(\beta)C_0$ 和摩擦强度分量 $q_0\sigma_3$ 构成。 σ_2 仅对双轴压缩强度产生作用,具体而言是显著影响其黏结强度分量,而对摩擦强度分量的影响可忽略不计,中主应力的作用方式和影响程度可通过 $f(\beta)$ 来表征,若能够获得 $f(\beta)$,可基于常规三轴试验数据,实现真三轴应力条件下岩石强度的有效预测。

为了验证M-C强度准则泛函式的合理性,本文采

用4种岩石真三轴试验数据^[20-23]进行分析,不同 β 条件下岩石强度规律如图1所示。

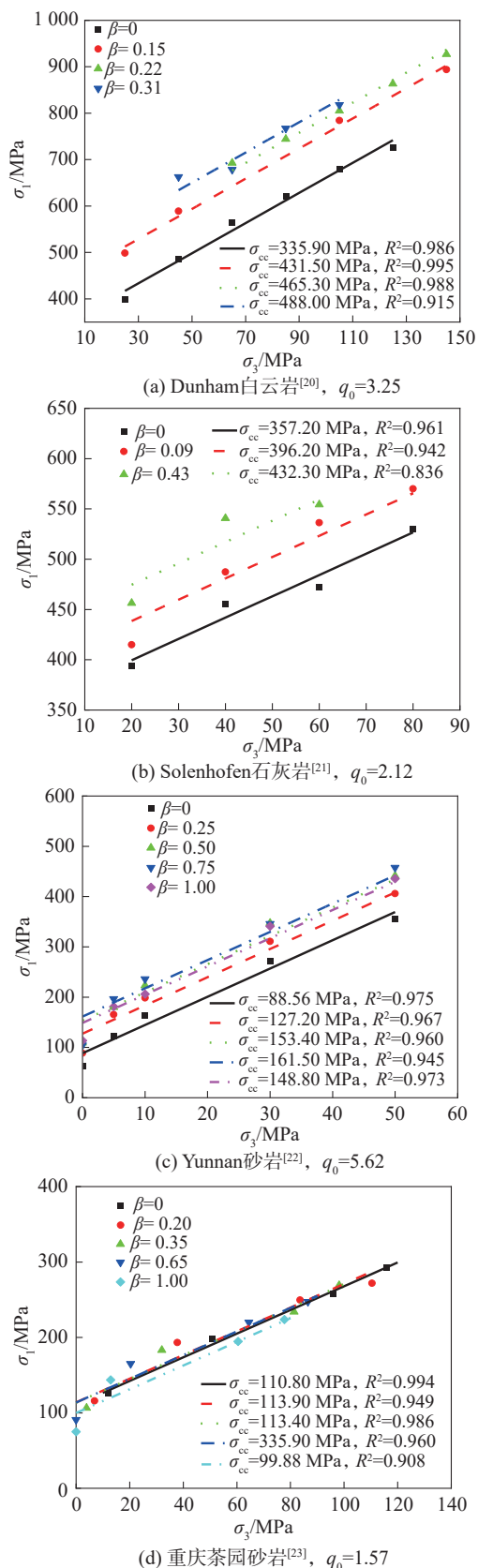


图1 不同 β 条件下岩石强度规律

Fig. 1 Strength rules of rocks under different β

从图 1 中可以看出,根据式(5)~(6)对 4 种岩石在不同 β 条件下的真三轴试验数据分别进行拟合,均表现出良好的拟合效果,除 Solenhofen 石灰岩在 $\beta=0.43$ 时的拟合优度 R^2 为 0.836(此情况下数据量较少且分布较离散)外,其余岩石在不同 β 下的 R^2 值均达到 0.900 以上,因此,可认为采用该泛函式对真三轴应力条件下岩石强度进行预测具有可行性。

2 中主应力效应函数的构建方法

为了构建能够更准确地考虑中主应力影响的岩石真三轴强度准则,其关键在于确定中主应力效应函数的表达式。由于 M-C 强度准则泛函式是基于摩尔-库仑强度理论所提出,针对一定条件下可退化为 M-C 准则的常用岩石强度准则,包括 D-P 强度准则、Mogi 强度准则及修正 Lade 强度准则,通过评估这 3 种强度准则的中主应力效应函数表征能力,在此基础上构建一个新的中主应力效应函数表达式。

2.1 各强度准则的中主应力效应函数

2.1.1 D-P 强度准则

该准则考虑了中间主应力的影响,通过引入静水压力项,将屈服面描述为一个圆锥面,其数学表达式为^[8]:

$$\sqrt{J_2} = \alpha I_1 + k \quad (7)$$

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 = \frac{1}{6} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \sin \varphi / (\sqrt{3} (3 - \sin \varphi)), \\ k = 6c \cos \varphi / (\sqrt{3} (3 - \sin \varphi)) \end{cases} \quad (9)$$

式(7)~(9)中: J_2 为应力偏张量的第二不变量,表示剪切应力; I_1 为应力张量的第一不变量,表示静水压力; α 和 k 为材料参数,与材料的内摩擦角和黏聚力相关。

将式(1)代入式(8),可得:

$$\begin{cases} I_1 = (1 + \beta)\sigma_1 + (2 - \beta)\sigma_3, \\ J_2 = (1 - \beta + \beta^2)(\sigma_1 - \sigma_3)^2 / 3 \end{cases} \quad (10)$$

将式(9)和(10)代入式(7),可得:

$$\sigma_1 = \frac{3\sqrt{1-\beta+\beta^2} + (4-2\beta-\sqrt{1-\beta+\beta^2})\sin\varphi}{3\sqrt{1-\beta+\beta^2} - (2+2\beta+\sqrt{1-\beta+\beta^2})\sin\varphi} \sigma_3 + \frac{6c \cos \varphi}{3\sqrt{1-\beta+\beta^2} - (2+2\beta+\sqrt{1-\beta+\beta^2})\sin\varphi} \quad (11)$$

于是,可得 D-P 准则的中主应力效应函数表达式,记为 $f(\beta)_{D-P}$,即:

$$f(\beta)_{D-P} = \frac{1 - \sin \varphi}{\sqrt{1 - \beta + \beta^2} - (2 + 2\beta + \sqrt{1 - \beta + \beta^2}) \sin \varphi / 3} \quad (12)$$

2.1.2 Mogi 强度准则

该准则通过考虑中间主应力的影响,改进了 M-C 强度准则的局限性,能够更准确地预测岩石的破坏强度,其表达式为^[9]:

$$\tau_{\text{oct}} = A + B(\sigma_1 + \sigma_3) / 2 \quad (13)$$

$$\begin{cases} \tau_{\text{oct}} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} / 3, \\ A = 2\sqrt{2} c \cos \varphi / 3, \\ B = 2\sqrt{2} \sin \varphi / 3 \end{cases} \quad (14)$$

式(13)~(14)中, τ_{oct} 为八面体剪应力, A 和 B 为材料参数。

将式(1)和(14)代入式(13),可得:

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{1-\beta+\beta^2} + \sin\varphi}{\sqrt{1-\beta+\beta^2} - \sin\varphi} \sigma_3 + \frac{2c \cos \varphi}{\sqrt{1-\beta+\beta^2} - \sin\varphi} \quad (15)$$

于是,可得 Mogi 强度准则的中主应力效应函数表达式,记为 $f(\beta)_{\text{Mogi}}$,即:

$$f(\beta)_{\text{Mogi}} = \frac{1 - \sin \varphi}{\sqrt{1 - \beta + \beta^2} - \sin \varphi} \quad (16)$$

2.1.3 修正 Lade 强度准则

该准则引入材料参数和应力不变量,能够更准确地反映中间主应力对材料强度的影响,其数学表达式为^[24]:

$$\frac{(I_1')^3}{I_3'} = K = \frac{(3 - \sin \varphi)^3}{(1 + \sin \varphi)(1 - \sin \varphi)^2} \quad (17)$$

$$\begin{cases} I_1' = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 3\sigma_0, \\ I_3' = (\sigma_1 + \sigma_0)(\sigma_2 + \sigma_0)(\sigma_3 + \sigma_0), \\ \sigma_0 = c \cot \varphi \end{cases} \quad (18)$$

式(17)中, K 为材料常数。

将式(17)整理成含 β 的 σ_1 与 σ_3 的函数关系式,但推导过程十分复杂,为便于分析,将整理后的式子记为:

$$\sigma_1 = f(\beta)_{\text{Lade}} C_0 + q_{\text{Lade}} \sigma_3 \quad (19)$$

式中, $f(\beta)_{\text{Lade}}$ 为修正 Lade 准则的中主应力效应函数表达式, q_{Lade} 为修正 Lade 准则的最小主应力函数表达式。

2.2 中主应力效应函数对比分析

中主应力效应函数 $f(\beta)$ 能够集中反映中主应力对岩石强度产生的影响规律,该函数需满足以下条件:1) $f(\beta)$ 随 β 的增大呈先增大后减小的变化趋势;2) 当 β 取 0 和 1 时,其对应的 $f(\beta)$ 函数值不相同, $\beta=1$ 时的岩石强度大于 $\beta=0$ 时的岩石强度。

根据 4 种岩石真三轴试验数据,将 D-P 准则、Mogi 准则和修正 Lade 准则中的中主应力效应函数进行比较,结果如图 2 所示。从图 2 中可以看出,不同准则的中主应力效应函数理论值 $f(\beta)$ 与试验值均呈现一定程度的偏差,总体偏差由小到大依次为修正 Lade 准则、

Mogi 准则和 D-P 准则。随着 β 的增大,各强度准则所对应的中主应力效应函数均呈先增大后减小的变化

趋势,这一现象揭示了中主应力对材料强度影响所存在的区间效应特征。

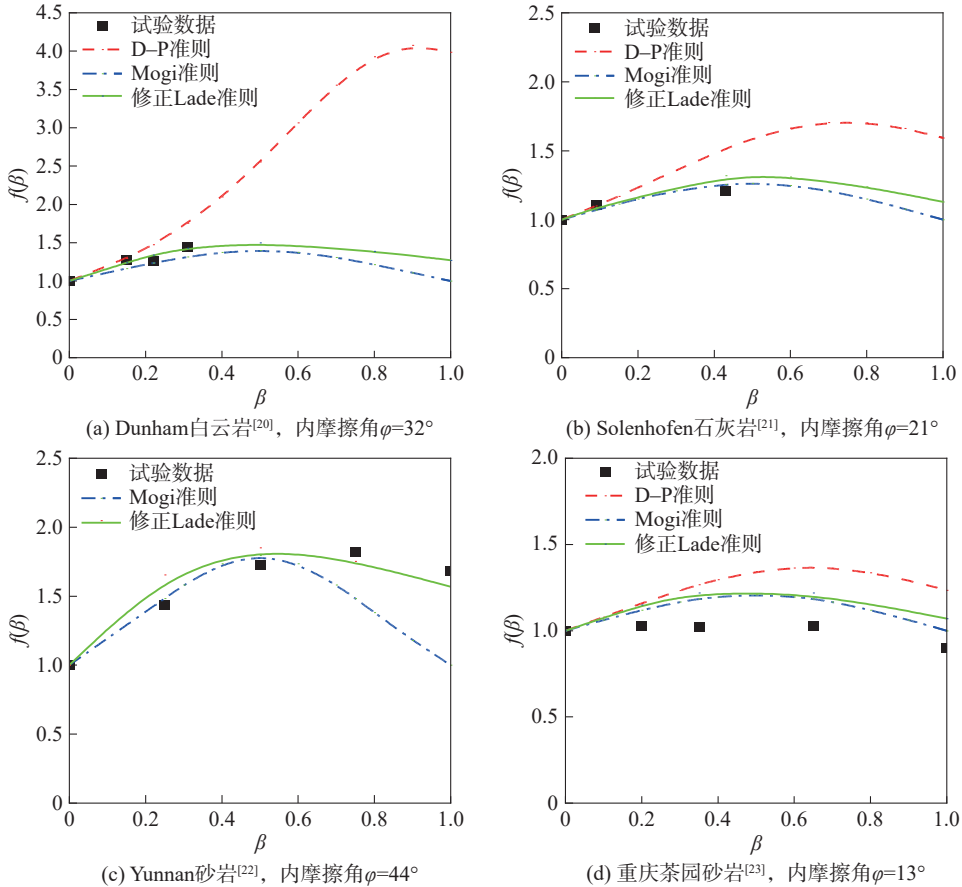


图 2 不同准则的中主应力效应函数比较

Fig. 2 Comparison of intermediate principal stress effect functions under different criteria

对于 D-P 准则,随着 β 的增加, $f(\beta)_{D-P}$ 呈现近似线性增长趋势,达到峰值后出现轻度衰减,当 β 取 0 和 1 时, $f(\beta)_{D-P}$ 值不相同,但其理论曲线始终位于试验值上方,表明 D-P 准则在描述中主应力效应时存在系统偏差,明显高估了中主应力对岩石强度的增强作用。对于 Mogi 准则, $f(\beta)_{Mogi}$ 表现出关于 $\beta=0.5$ 的对称性,导致其在 β 取 0 和 1 时的预测值完全相等,这与 Feng 等^[6]通过试验揭示硬岩强度随中主应力呈非对称变化的重要特征相矛盾。尽管 Mogi 准则的预测偏差较 D-P 准则有所改善,但其对称性仍无法合理反映岩石在 $\sigma_2=\sigma_3$ 和 $\sigma_2=\sigma_1$ 条件下的强度差异。相比之下,修正 Lade 准则的 $f(\beta)_{Lade}$ 与试验值吻合度最佳,但其表达式的复杂性导致难以获得精确的解析解。

的函数形式,在此基础上提出一种能够准确反映中主应力效应的新的 $f(\beta)$, 即:

$$f(\beta) = \frac{1 - \sin \phi}{\sqrt{1 - \beta + \beta^2} + A(\beta)\sin \phi} \quad (20)$$

式中: $A(\beta)$ 为含中主应力系数 β 的函数表达式; 当 $A(\beta) = -1$ 时, $f(\beta) = f(\beta)_{Mogi}$; 当 $A(\beta) = -(2 + 2\beta + \sqrt{1 - \beta + \beta^2})/3$ 时, $f(\beta) = f(\beta)_{D-P}$ 。

根据 $f(\beta)_{Mogi}$ 表达式分析可知,因为函数项 $\sqrt{1 - \beta + \beta^2}$ 在 β 取 0 和 1 时函数项的数值相等,导致 $f(\beta)_{Mogi}$ 无法反映岩石在 $\sigma_2=\sigma_3$ 和 $\sigma_2=\sigma_1$ 条件下的强度差异,因此,考虑在该函数项中引入参数 η , 得到 $\sqrt{1 - \beta + \eta\beta^2}$, 其中,参数 η 反映岩石拉压强度差异性。根据 $f(\beta)_{D-P}$ 表达式分析可知,引起中主应力对岩石强度产生增强作用的原因在于 $A(\beta)$ 受 β 变化的敏感性较大,因此,引入参数 γ 对其进行修正。为了使 $A(\beta)$ 对岩石拉压强度差异性不产生影响且当 $\beta=0$ 时, D-P 准则能够退化为 M-C 强度准则, 令 $A(\beta) = \gamma(1 - \sqrt{1 - \beta + \beta^2})^2 - 1$, 可知 $A(0) = A(1) = -1$, $A(\beta)$

尽管 3 种常用岩石强度准则的中主应力效应函数在中主应力效应描述方面均存在显著的局限性,但为本文构建更准确的中主应力效应函数提供了一种重要参考路径。

2.3 新的中主应力效应函数

由式(12)和(16)可知, $f(\beta)_{D-P}$ 和 $f(\beta)_{Mogi}$ 具有相似

仅反映中主应力对岩石真三轴强度的影响。于是,在此基础上提出一种新的中主应力效应函数,即:

$$f(\beta) = \frac{1 - \sin \varphi}{\sqrt{1 - \beta + \eta\beta^2} + (\gamma(1 - \sqrt{1 - \beta + \beta^2})^2 - 1)\sin \varphi} \quad (21)$$

将式(21)代入式(6),并结合式(5)可得真三轴应力条件下岩石类材料M-C强度准则,即:

$$\sigma_1 = \frac{2c \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta + \eta\beta^2} + (\gamma(1 - \sqrt{1 - \beta + \beta^2})^2 - 1)\sin \varphi} + q_0 \sigma_3 \quad (22)$$

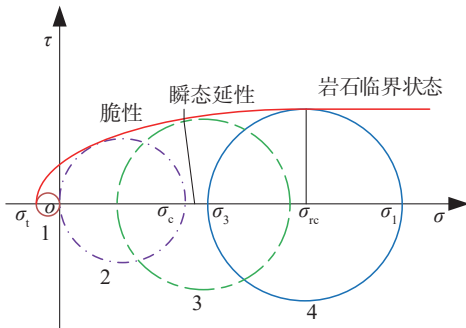
当 $\beta=0$ 时,式(22)退化为传统M-C强度准则。

3 修正M-C强度准则

通过第1节分析可知,虽然将中主应力对岩石强度的影响归结在黏结强度上具有一定的合理性,但在 β 恒定时,能够发现岩石强度包络线($\sigma_1-\sigma_3$)呈现上凸趋势,并非线性增加,为提升准则的预测精度,考虑对 β 恒定的真三轴应力条件下岩石类材料M-C强度准则进行修正。

3.1 岩石临界状态

根据岩石力研究成果^[25-26],岩石三轴强度特性呈现显著的围压依存性:在低围压区间,强度与围压近似呈线性正相关,但随着围压的持续增加,强度增长率呈非线性衰减特征,摩尔应力圆强度包络线,如图3所示。图3中, σ_t 为单轴抗拉强度, G_c 为单轴抗压强度, τ 为剪应力。由图3可知,包络线以单轴抗压强度 σ_c 为起点,随着围压 σ_3 的增加呈上凸型非线性强化趋势,其强化梯度 $d(\sigma_1-\sigma_3)/d\sigma_3$ 随 σ_3 增大而渐趋0。Barton^[27]通过理论分析将摩尔包络线峰值抗剪强度梯度为零的应力状态定义为岩石临界状态,其所处的围压水平为临界围压 σ_{rc} 。值得注意的是,深部工程岩体所处围压环境与浅部岩体明显不同,此时若继续采用线性强度准则将导致显著的计算偏差。



1. 单轴拉伸; 2. 单轴压缩;
3. 脆性-延性瞬态; 4. 临界状态。

图3 摩尔应力圆强度包络线

Fig. 3 Mohr stress circles strength envelope

常规三轴试验是真三轴应力状态的特例,对于给定的围压 σ_3 ,假设岩石真三轴破坏主应力差($\sigma_1-\sigma_3$)与式(22)所求理论值的偏差数值可表征为 $\alpha_\beta\sigma_3^2$,其中, α_β 为与中主应力有关的系数。于是,式(22)可改写为:

$$\sigma_1 = \frac{2c \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta + \eta\beta^2} + (\gamma(1 - \sqrt{1 - \beta + \beta^2})^2 - 1)\sin \varphi} + q_0 \sigma_3 - \alpha_\beta \sigma_3^2 \quad (23)$$

考虑两个边界条件:

1) 当 $\sigma_2=\sigma_3=0$ 时, $\sigma_1=\sigma_c$;

2) 当 $\sigma_3 \rightarrow \sigma_{rc}$ 时, $\partial(\sigma_1-\sigma_3)/\partial\sigma_3 \rightarrow 0$ 。

根据边界条件可得:

$$\alpha_\beta = \frac{\sin \varphi}{\sigma_{rc}(1 - \sin \varphi)} \quad (24)$$

值得注意的是,由于前述理论推导均建立在 β 为定值的假设基础上,因此,当已知岩石破坏应力状态时,可将真三轴应力条件下M-C强度准则中的 β 作为材料常数处理,其取值范围为 $[0,1]$ 。在执行边界条件2)计算时,该参数对强度包络线的偏导数为0。

将式(24)代入式(23)可得中主应力影响的修正M-C强度准则,即:

$$\sigma_1 = \frac{2c \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta + \eta\beta^2} + (\gamma(1 - \sqrt{1 - \beta + \beta^2})^2 - 1)\sin \varphi} + q_0 \sigma_3 - \frac{\sin \varphi}{\sigma_{rc}(1 - \sin \varphi)} \sigma_3^2 \quad (25)$$

式(25)适用范围为 $0 \leq \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_{rc}$ 。当 $\sigma_2 > \sigma_{rc}$ 或 $\sigma_3 > \sigma_{rc}$ 时,用 σ_{rc} 代替式(25)中 σ_2 或 σ_3 。

3.2 强度准则参数的确定方法

参数 c 、 φ 、 σ_{rc} 可基于岩石常规三轴试验数据,借助1stOpt或Matlab软件,采用全参数拟合法进行求解。

根据参数 η 的含义可知,参数 η 可通过广义三轴拉伸状态($\sigma_2=\sigma_1>\sigma_3$)的强度值进行确定,于是将 $\beta=1$ 代入式(25)可得:

$$\sigma_1 = \frac{2c \cos \varphi}{\sqrt{\eta} - \sin \varphi} + q_0 \sigma_3 - \frac{\sin \varphi}{\sigma_{rc}(1 - \sin \varphi)} \sigma_3^2 \quad (26)$$

由于 $\beta=1$ 时的岩石强度大于 $\beta=0$ 时的岩石强度,因此可推知 η 取值小于1,而当 $\eta=1$ 时,表明 β 取0或1条件下岩石强度不存在差异性。

参数 γ 反映在最小主应力 σ_3 保持不变条件下,中主应力 σ_2 对岩石强度的影响。对于中主应力效应函数 $f(\beta)$, β 为变量且其取值范围为 $[0,1]$,对该函数求极值,即:

$$\frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} = 0 \quad (27)$$

当该函数的偏导数等于0时,岩石强度取得极大值,其对应的中主应力系数为 β_{\max} ,结合式(21)与(27)可得参数 γ 的确定方法,即:

$$\frac{2\eta\beta_{\max} - 1}{\sqrt{1 - \beta_{\max} + \eta\beta_{\max}^2}} = \frac{2\gamma \sin \varphi (2\beta_{\max} - 1) (1 - \sqrt{1 - \beta_{\max} + \beta_{\max}^2})}{\sqrt{1 - \beta_{\max} + \beta_{\max}^2}} \quad (28)$$

特别地,强度准则参数求解过程需留意以下 3 点: 1)若存在 1 组或多组 β 由 0 到 1 完整变化区间的数 据,可通过前述方法确定 η 和 γ ; 2)若缺乏 β 由 0 到 1 完整变化区间的数 据,可将仅有试验数据导入 1stOpt 软件,将基于常规三轴试验数据获得的 c 、 φ 和 σ_{rc} 设定为常数,并假设 η 和 β_{\max} 为拟合参数,运用全局优化算法即可求得最优的拟合参数值,根据式(28)求得 γ ; 3)若通过试验数据求得 $\beta_{\max}=0.5$,与此同时 $\eta=1$,则由式(28)确定 γ 的方法将不再适用,但可借助 1stOpt 软件,以 γ 为未知参数, c 、 φ 和 σ_{rc} 为已知参数,式(25)为拟合函数,1 组或多组真三轴试验数据的 σ_3 、 β 、 σ_1 作为拟合数据,采用全局优化算法求得 γ 。

4 强度准则适用性分析

为了验证修正 M-C 强度准则的适用性,从以下 3 个方面开展验证。

1) 新 $f(\beta)$ 的合理性验证

基于 Yunnan 砂岩真三轴试验数据,通过计算可得新 $f(\beta)$ 的表达式,将其理论值与试验值进行对比,结果如图 4 所示。本文提出的新 $f(\beta)$ 能够准确描述中主应力效应,与试验值的拟合精度达到 0.940,从而验证了新 $f(\beta)$ 的合理性。

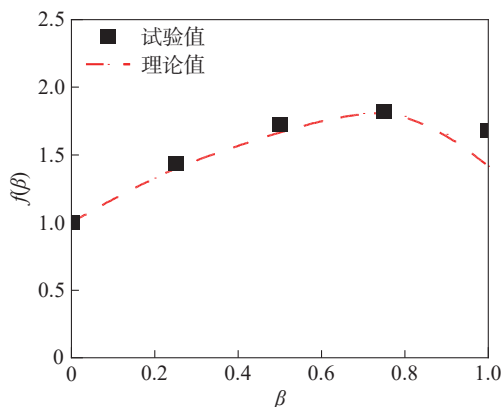


图 4 Yunnan 砂岩试验数据下的新 $f(\beta)$

Fig. 4 New $f(\beta)$ based on Yunnan sandstone test data

2) 修正 M-C 强度准则理论预测验证

选取 6 类不同岩性的岩石,包括 Yunnan 砂岩^[22]、Linghai 花岗岩^[6]、CJPL-II 大理岩^[22]、Mizuho 粗面岩^[9]、自贡砂岩^[28]及花岗岩^[29]。根据这些岩石真三轴试验结果,采用 1stOpt 软件的全局优化算法确定修正 M-C 强度准则参数,如表 1 所示。

表 1 修正 M-C 强度准则参数

Tab. 1 Improved M-C strength criterion parameters

岩石	$\varphi/(^\circ)$	c/MPa	σ_{rc}/MPa	η	γ	β_{\max}	R^2
Yunnan 砂岩 ^[22]	46.16	20.32	157.53	0.84	3.51	0.73	0.992
CJPL-II 大理岩 ^[22]	38.29	53.17	285.03	0.80	2.69	0.72	0.972
Linghai 花岗岩 ^[6]	49.63	50.60	5 056.81	0.96	4.66	0.66	0.965
Mizuho 粗面岩 ^[9]	25.53	61.39	281.59	0.82	0.32	0.62	0.980
自贡砂岩 ^[28]	47.99	20.78	87.12	0.97	3.43	0.55	0.994
花岗岩 ^[29]	50.66	46.17	3 101.81	0.98	3.45	0.54	0.941

图 5 为修正 M-C 强度准则对 6 类不同岩性的岩石真三轴试验强度的预测。由图 5 可知,该准则预测出了岩石强度随中主应力增大呈先增大后减小的变化规律,以及在 $\sigma_2=\sigma_3$ 和 $\sigma_2=\sigma_1$ 条件下表现出显著的强度差异性。不同 σ_3 下强度准则的变化规律保持一致,但 $\partial\sigma_1/\partial\sigma_3$ 逐渐减小,岩石强度增幅随 σ_3 的增大而减小,表明中主应力对岩石强度的增强效应随着应力水平升高表现出衰减特征。当 $\sigma_2=\sigma_3$ 时,该准则退化为考虑岩石临界状态的非线性 M-C 强度准则。随着 σ_3 的增加,岩石侧向变形约束效应不断增大,导致强度包络线曲率不断增大,岩石由脆性向延性转变。当 $\sigma_3 \geq \sigma_{rc}$ 时,强度包络线趋近水平,表明岩石进入完全延性状态。

根据拟合优度 R^2 (计算公式见式(29)),定量评估修正 M-C 强度准则的理论预测精度,见表 1, R^2 均达到 0.940 以上,表明修正 M-C 强度准则具有较高的强度预测精度,解决了传统准则在真三轴及高应力状态存在强度预测偏差大的问题。

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_1^{\text{theory}} - \sigma_1^{\text{test}})_i^2}{\sum_{i=1}^N (\sigma_1^{\text{test}} - E[\sigma_1^{\text{test}}])_i^2} \quad (29)$$

式中, σ_1^{theory} 与 σ_1^{test} 分别为破坏应力的理论值及试验值, N 为试验组数, $E[\sigma_1^{\text{test}}]$ 为期望试验值。

3) 各准则强度预测结果对比验证

均方根误差 (RMSE, 记为 R) 和平均绝对百分比误差 (MAPE, 记为 M) 分别由式(30)和式(31)计算,即:

$$R = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_1^{\text{theory}} - \sigma_1^{\text{test}})_i^2} \quad (30)$$

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\sigma_1^{\text{theory}} - \sigma_1^{\text{test}}}{\sigma_1^{\text{test}}} \right|_i \times 100\% \quad (31)$$

通过计算本文准则、M-MC 真三轴准则^[30]、Mogi 准则、修正 Lade 准则和 D-P 准则等 5 种强度准则的 RMSE 和 MAPE 两项指标,评估各准则对 6 类岩石强度的预测误差对比,如图 6 所示,由于 D-P 准则的 RMSE 和 MAPE 均远大于其余 4 种准则(如花岗岩等岩石,采用

D-P 准则计算,在 β 接近0时有效,但随着 β 的增加,中主应力对岩石强度的增强效应被夸大,甚至部分应力状态下强度无解,故不便于同时显示计算结果,从图6可以

看出,相同岩石种类条件下本文准则的RMSE和MAPE均小于其余准则,表明本文修正M-C强度准则对6类岩石真三轴强度的预测精度均大于其余4种准则。

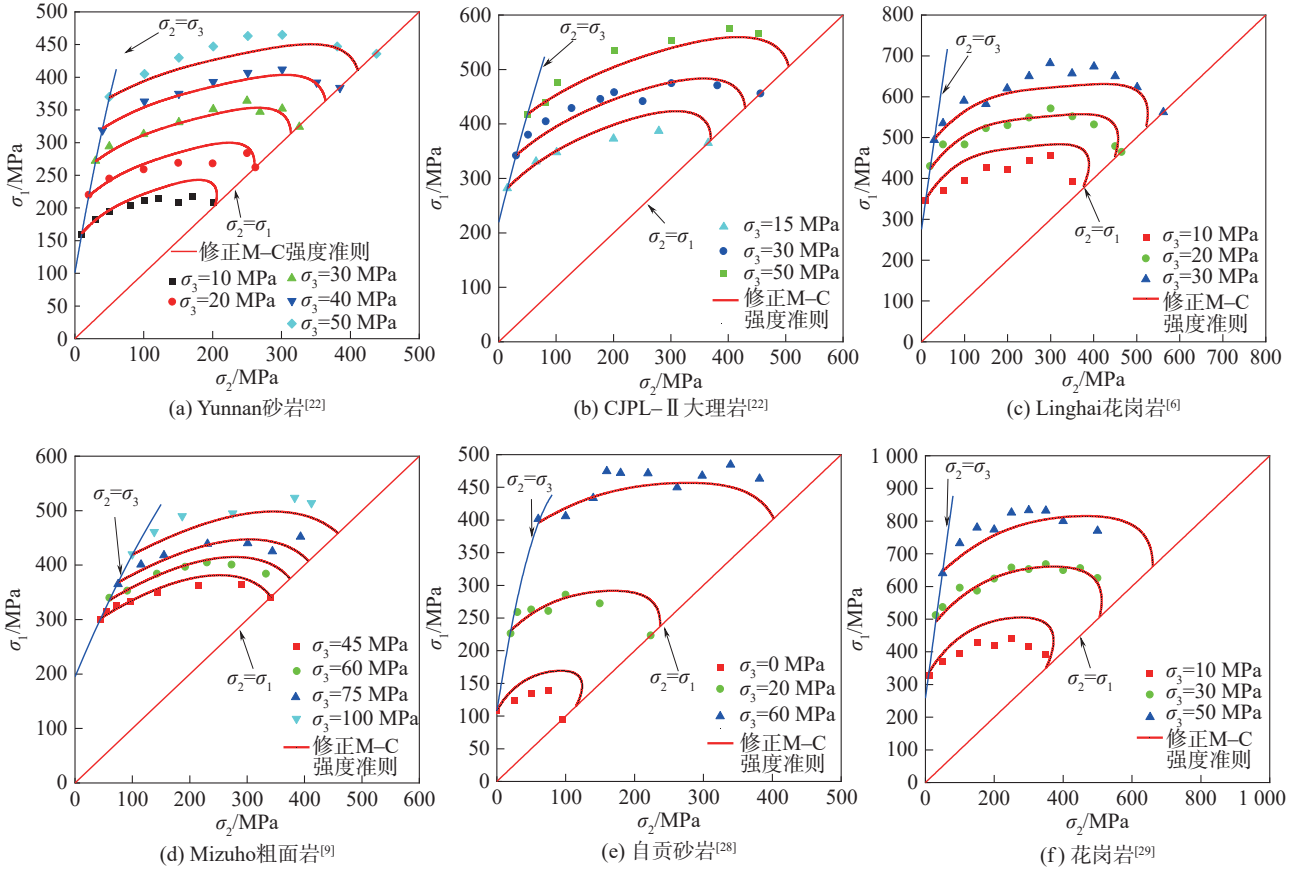


图5 修正M-C强度准则对6类岩石真三轴试验强度预测

Fig. 5 Prediction of true triaxial strength of six kinds of rocks by modified M-C strength criterion

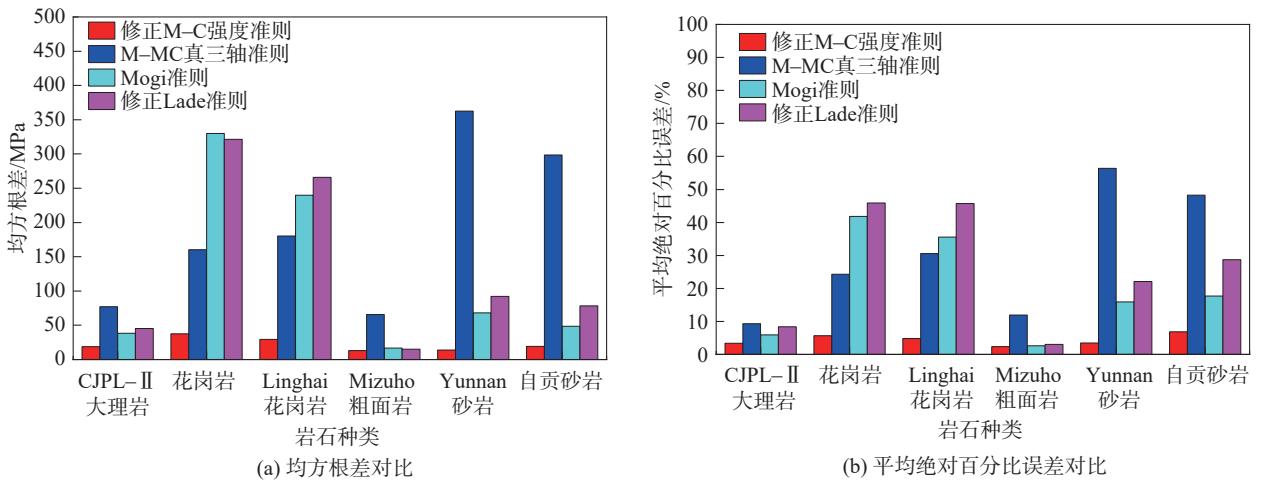


图6 不同强度准则的理论预测值误差对比

Fig. 6 Comparison of theoretical prediction errors for different strength criteria

图7为5种不同强度准则对6类岩石真三轴强度的理论预测曲线。从图7可以看出,D-P准则在预测岩石真三轴强度方面误差最大,M-MC真三轴准则虽能表征岩石强度随中主应力的增大呈先增大后减小的变化规律,且在 $\sigma_2=\sigma_3$ 时预测精度较高,但在对 $\sigma_2=\sigma_1$ 时

预测偏差显著。Mogi准则与M-MC真三轴强度准则的RMSE和MAPE均比D-P准则小,预测更为精准。在6类岩石中,对于相对较软的岩石如Mizuho粗面岩、砂岩、自贡砂岩,Mogi准则的RMSE、MAPE均比M-MC真三轴强度准则低,Mogi准则精度更高,但其

无法反映广义三轴压缩和拉伸强度差异性,与试验观测结果不符。修正 Lade 准则在 σ_3 取值低时预测精度较高,但随着 σ_3 的增大,预测偏差也逐渐增大。相比之下,

本文准则能够较精确地描述 σ_3 在大区间变化条件下中主应力对岩石强度的影响,且整体预测精度高于其他准则,从而表明本文准则具有一定的合理性和可行性。

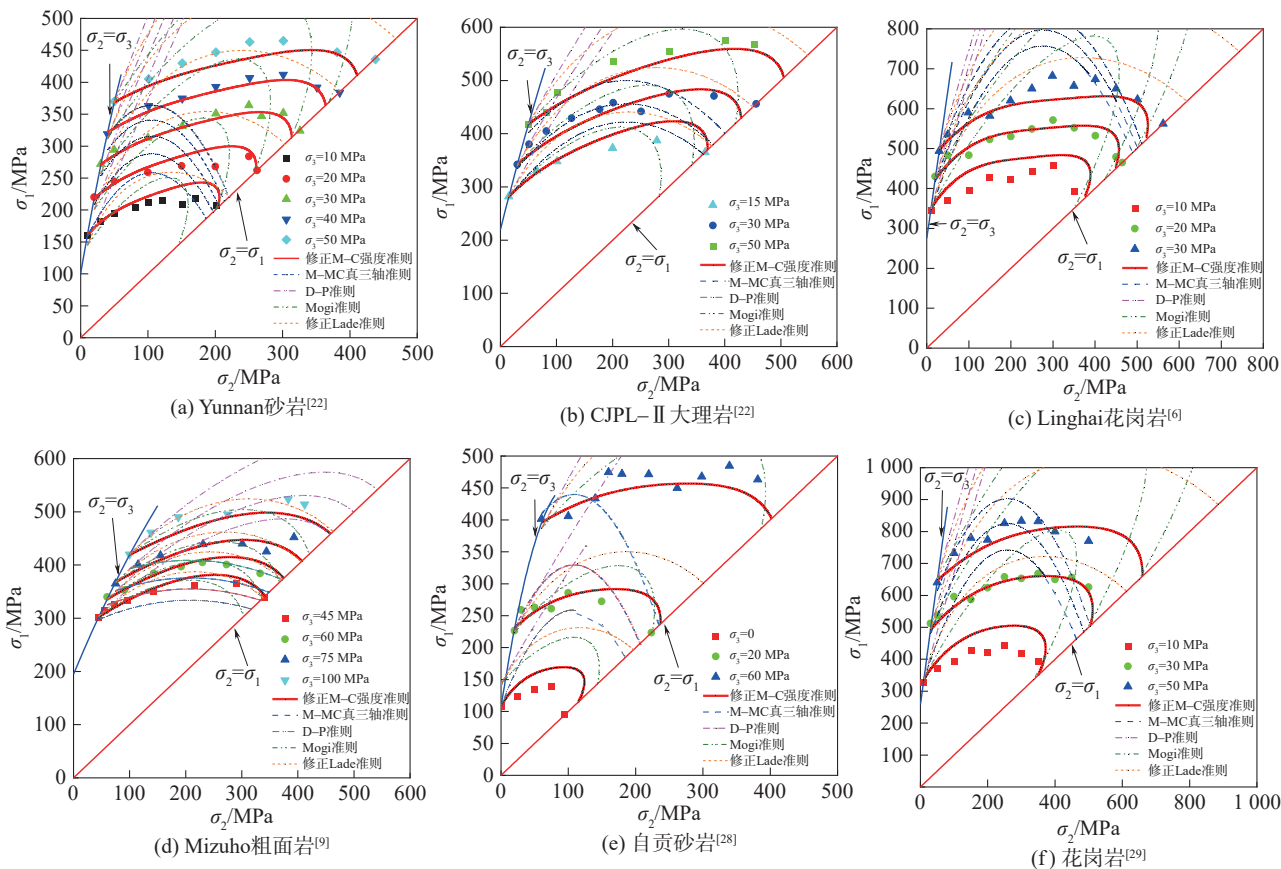


图 7 5 种不同强度准则对 6 类岩石真三轴强度的理论预测曲线

Fig. 7 Theoretical prediction curves of true triaxial strength of six types of rocks by five different strength criteria

5 结 论

本文基于摩尔应力圆理论分析不同岩石真三轴试验数据,考虑中主应力对岩石强度产生的影响,提出修正摩尔-库仑强度准则,并开展准则适用性分析研究,可得到如下结论:

1)提出了真三轴应力条件下岩石类材料M-C强度准则泛函式。经试验数据验证表明,中主应力对岩石强度的影响可通过中主应力效应函数 $f(\beta)$ 进行表征,在已知 $f(\beta)$ 前提下,仅需常规三轴试验数据即可预测岩石真三轴强度。

2)传统准则(D-P准则、Mogi准则和修正 Lade 准则)的 $f(\beta)$ 在中主应力效应描述方面存在显著的局限性,从而导致各准则在预测岩石真三轴强度时出现较大偏差,在此基础上提出了能够克服该缺陷的新的中主应力效应函数。

3)提出了能够考虑中主应力影响的修正摩尔-库仑强度准则,该准则表达式简单,参数易获取且物理意义明确,能够准确反映岩石强度的非线性特征,不同种类

岩石强度的预测精度显著提高,拟合优度 R^2 均达到0.940以上,表明本文强度准则具有一定的合理性和可行性。

参 考 文 献:

[1] Geng Fei, Li Xiaojun, Xu Chao, et al. Failure strength criterion for rock based on the parameter of principal stresses $\sigma_2\sigma_3$ [J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2022, 30(1): 89–100. [耿飞, 李小军, 徐超, 等. 基于主应力 $\sigma_2\sigma_3$ 为参数的岩石破坏强度准则[J]. 应用基础与工程科学学报, 2022, 30(1): 89–100.]

[2] Li Xiulei, Li Qiwei, Yang Chao, et al. Nonlinear failure strength criterion of rock based on triaxial ultimate peak eccentric stress[J]. Journal of China Coal Society, 2019, 44(S2): 517–525. [李修磊, 李起伟, 杨超, 等. 基于三轴极限峰值偏应力的岩石非线性破坏强度准则[J]. 煤炭学报, 2019, 44(增刊2): 517–525.]

[3] Li Xiulei, Chen Chen, Ling Tianqing. A nonlinear true triaxial strength criterion for rocks considering principal stress space characteristics[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2021, 53(11): 127–135. [李修磊, 陈臣, 凌天清. 一种考虑主应力空间的岩石非线性真三轴强度准

- 则[J].哈尔滨工业大学学报,2021,53(11):127-135.]
- [4] Li Bin.Study on rock failure characteristics and rock strength criteria under high confining pressure[D].Wuhan: Wuhan University of Science and Technology,2015.[李斌.高围压条件下岩石破坏特征及强度准则研究[D].武汉:武汉科技大学,2015.]
- [5] Wang Yunfei,Zheng Xiaojuan,Chu Huaibao,et al. Brittle and ductile failure meso-mechanics strength properties of granite under high stress state[J].Chinese Journal of Underground Space and Engineering,2017,13(5):1180-1185.[王云飞,郑晓娟,褚怀保,等.花岗岩高应力状态脆延破坏细观力学强度特性[J].地下空间与工程学报,2017,13(5):1180-1185.]
- [6] Feng Xiating,Kong Rui,Zhang Xiwei,et al. Experimental study of failure differences in hard rock under true triaxial compression[J].Rock Mechanics and Rock Engineering,2019,52(7):2109-2122.
- [7] Du Kun,Yang Chengzhi,Su Rui,et al. Failure properties of cubic granite,marble,and sandstone specimens under true triaxial stress[J].International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2020,130:104309.
- [8] Drucker D C,Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design[J].Quarterly of Applied Mathematics,1952,10(2):157-165.
- [9] Mogi K. Flow and fracture of rocks under general triaxial compression[J].Applied Mathematics and Mechanics,1981,2(6):635-651.
- [10] You Mingqing. True-triaxial strength criteria for rock[J].International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2009,46(1):115-127.
- [11] Ewy R T. Wellbore-stability predictions by use of a modified lade criterion[J].SPE Drilling & Completion,1999,14(2):85-91.
- [12] Wu Shunchuan,Zhang Shihuai,Zhang Guang. Three-dimensional strength estimation of intact rocks using a modified Hoek-Brown criterion based on a new deviatoric function[J].International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2018,107:181-190.
- [13] Singh A,Ayothiraman R,Rao K S. Failure criteria for isotropic rocks using a smooth approximation of modified Mohr-Coulomb failure function[J].Geotechnical and Geological Engineering,2020,38(4):4385-4404.
- [14] Zhang Qiang,Li Cheng,Guo Qiang,et al. Exponential true triaxial strength criteria for rock[J].Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2018,40(4):625-633.[张强,李诚,郭强,等.指数型岩石真三轴强度准则[J].岩土工程学报,2018,40(4):625-633.]
- [15] Lee Y K,Pietruszczak S,Choi B H. Failure criteria for rocks based on smooth approximations to Mohr-Coulomb and Hoek-Brown failure functions[J].International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2012,56:146-160.
- [16] Wang Guoan, Ma Linjian, Liu Xinyu, et al. A new three-dimensional Hoek-Brown strength criterion considering effect of intermediate principal stress and its applicability[J].Rock and Soil Mechanics,2015,36(8):2291-2297.[王国安,马林建,刘新宇,等.考虑中间主应力Hoek-Brown强度准则及其适用性[J].岩土力学,2015,36(8):2291-2297.]
- [17] Shi Xiangchao, Li Qingling, Liu Jianfeng, et al. An improved true triaxial Hoek-Brown strength criterion[J].Advanced Engineering Sciences,2023,55(2):214-221.[石祥超,李清蛟,刘建锋,等.一种改进的真三轴Hoek-Brown强度准则[J].工程科学与技术,2023,55(2):214-221.]
- [18] Li Hangzhou, Guo Tong, Nan Yalin, et al. A simplified three-dimensional extension of Hoek-Brown strength criterion[J].Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering,2021,13(3):568-578.
- [19] Zheng Yingren, Xiang Yuzhou, Gao Hong. The Mohr stress circle theory and strength criterion of friction materials of rock and soil[J].Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2016,35(6):1081-1089.[郑颖人,向钰周,高红.岩土类摩擦材料空间Mohr应力圆与强度准则[J].岩石力学与工程学报,2016,35(6):1081-1089.]
- [20] Zhang Chuanqing, Feng Xiating, Zhou Hui. Relationship between polyaxial strength and conventional triaxial strength for rock[J].Chinese Journal of Solid Mechanics,2011,32(3):228-234.[张传庆,冯夏庭,周辉.岩石多轴与常规三轴强度的关系[J].固体力学学报,2011,32(3):228-234.]
- [21] Zhang Chuanqing, Zhou Hui, Feng Xiating, et al. A new interpretation for the polyaxial strength effect of rock[J].International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2010,47(3):496-501.
- [22] Feng Xiating, Kong Rui, Yang Chengxiang, et al. A three-dimensional failure criterion for hard rocks under true triaxial compression[J].Rock Mechanics and Rock Engineering,2020,53(1):103-111.
- [23] Song Zhenlong. Study on rock failure mechanism based on influence of hydrostatic stress on lode angle effect[D].Chongqing:Chongqing University,2019.[宋真龙.基于静水应力对罗德角效应影响的岩石破坏机理研究[D].重庆:重庆大学,2019.]
- [24] Tian Zhenyuan, Wang Wei, Zhu Qizhi, et al. A statistical damage constitutive model and its modifying method based on Lade-Duncan failure criterion[J].Science Technology and Engineering,2014,14(35):104-108.[田振元,王伟,朱其志,等.基于Lade-Duncan强度准则的统计损伤

- 本构模型及其修正研究[J]. 科学技术与工程,2014,14(35):104–108.]
- [25] Wang Bin,Zhu Jiebing,Wu Aiqing,et al.Experimental validation of nonlinear strength property of rock under high geostress[J].Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2010,29(3):542–548.[汪斌,朱杰兵,邬爱清,等.高应力下岩石非线性强度特性的试验验证[J].岩石力学与工程学报,2010,29(3):542–548.]
- [26] Zhou ChaoLan,Li Bin,Xu Mengguo. Experimental study on characteristics of shear strength parameter of granite under high stress[J].Nonferrous Metals(Mine Section), 2020,72(2):58–63.[周朝兰,李斌,许梦国.高应力下花岗岩抗剪强度参数特征试验研究[J].有色金属(矿山部分), 2020,72(2):58–63.]
- [27] Barton N.The shear strength of rock and rock joints[J].International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts,1976,13(9):255–279.
- [28] Zhang Shihuai.Study on strength and deformability of hard brittle sandstone[D].Beijing:University of Science and Technology Beijing,2019.[张诗淮.硬脆性砂岩强度与变形特性研究[D].北京:北京科技大学,2019.]
- [29] Wang Gang.Research about strength properties of granite under true triaxial stress state and prediction of strength based on neural network[D].Shenyang:Northeastern University,2015.[王刚.花岗岩真三轴强度特性及神经网络强度预测的应用研究[D].沈阳:东北大学,2015.]
- [30] Singh M,Raj A,Singh B.Modified Mohr–Coulomb criterion for non-linear triaxial and polyaxial strength of intact rocks[J].International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2011,48(4):546–555.

Modified Mohr–Coulomb Hard Rock Strength Criterion Considering the Influence of Intermediate Principal Stress

YU Jin¹, ZHOU Yongsheng¹, ZHANG Chao^{1,2,3*}, CHANG Xu¹, CAI Yanyan¹

(1.Fujian Engineering Technology Research Center for Tunnel and Underground Space, Huaqiao University, Xiamen 361021, China;

2.China Railway No.5 Engineering Group Co., Ltd., Changsha 410021, China;

3.College of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract:

Objective Accurate prediction of the strength of deeply buried hard rock is crucial for ensuring the safety and stability of deep rock engineering. Currently, two key factors influencing the strength prediction of deep-buried hard rock are high stress and the intermediate principal stress. High stress produces nonlinear deformation characteristics in deeply buried hard rock, and the intermediate principal stress substantially affects the deformation and failure behavior of hard rock. This study proposes a modified Mohr–Coulomb strength criterion for hard rock, which simultaneously considers the nonlinear strength characteristics under large-range variations in confining pressure and the influence of the intermediate principal stress on rock strength.

Methods First, an analysis of Mohr’s stress circle under true triaxial conditions was conducted. Based on the theory of Mohr’s stress circle, it was determined that rock strength comprised cohesive and frictional strength components. The intermediate principal stress significantly influenced the cohesive strength component, while its effect on the frictional strength component remained negligible. A generalized functional form of the Mohr–Coulomb (M–C) strength criterion under true triaxial stress conditions was proposed, which attributed the influence of the intermediate principal stress on rock strength to an intermediate principal stress effect function. The rationality of this functional form was preliminarily validated using true triaxial test data from four types of hard rock. Then, an analysis was conducted on commonly used rock strength criteria that reduced to the M–C criterion under certain conditions, including the D–P criterion, the Mogi criterion, and the modified Lade criterion. The results revealed that the significant deviations in their strength predictions primarily resulted from inaccuracies in the mathematical characterization of the intermediate principal stress effect function. Therefore, the specific forms of the intermediate principal stress effect functions corresponding to the D–P, Mogi, and modified Lade criteria were examined in detail. On this basis, a parameter η , which represented the difference between the tensile and compressive strengths of the rock, and a parameter γ , which characterized the influence of the intermediate principal stress (σ_2) on rock strength under constant minimum principal stress (σ_3), were introduced. A new intermediate principal stress effect function was constructed. The classical M–C criterion was modified, establishing a nonlinear M–C strength criterion that accounted for the influence of the intermediate principal stress by integrating the critical state characteristics of rock. Then, methods for determining the parameters were provided. Finally, the applicability of the new criterion was validated using true triaxial test data from six types of hard rock, and a comparative analysis was conducted with four traditional strength criteria.

Results and Discussions Predictions from this criterion were compared to true triaxial test data from six types of hard rock, along with a comparative analysis against four traditional strength criteria to validate the applicability of the proposed modified M–C strength criterion that considered the influence of the intermediate principal stress. The results demonstrated that the proposed criterion effectively captured the observed trend

in which rock strength initially increased and then decreased with the rise of the intermediate principal stress, as well as the significant strength differences exhibited under the conditions of $\sigma_2=\sigma_3$ and $\sigma_2=\sigma_1$. Under different confining pressure σ_3 conditions, the variation patterns captured by this strength criterion remained consistent. However, as the $\partial\sigma_1/\partial\sigma_3$ ratio gradually decreased, the increase in rock strength became more moderated with rising σ_3 , indicating that the enhancing effect of the intermediate principal stress on rock strength exhibited a decaying characteristic with increasing stress levels. When $\sigma_2=\sigma_3$, the criterion reduces to a nonlinear M–C strength criterion that accounts for the critical state of rock. With increasing σ_3 , the lateral deformation constraint effect continuously strengthened, which led to a persistent increase in the curvature of the strength envelope and reflected the transition of rock mechanical behavior from brittle to ductile. When $\sigma_3 \geq \sigma_{rc}$, the strength envelope approached horizontal, indicating that the rock entered a fully ductile state. In addition, for all six types of hard rock, the goodness of fit R^2 of the proposed criterion exceeded 0.94, which demonstrated its high accuracy in strength prediction. Based on the true triaxial test data from these six hard rock types, it was found that the D–P criterion exhibited the largest prediction errors. Although the M–MC true triaxial criterion captured the trend of rock strength initially increasing and then decreasing with the rise of the intermediate principal stress and showed high prediction accuracy under the condition of $\sigma_2=\sigma_3$, its prediction deviation became significant when $\sigma_2=\sigma_1$. The Mogi criterion, while relatively accurate, failed to reflect the difference between generalized triaxial compression and tensile strength, which contradicted experimental observations. The modified Lade criterion performed well under low σ_3 conditions, but its prediction deviation gradually increased as σ_3 rose. In comparison, the root mean square error (RMSE) and mean absolute percentage error (MAPE) of the proposed criterion remained lower than those of the other four traditional strength criteria. In addition, it more accurately described the influence of the intermediate principal stress on rock strength under large-range variations of σ_3 . These results demonstrated the rationality and feasibility of the proposed criterion.

Conclusions The proposed strength criterion exhibits a clear formulation with parameters that are simple to determine and possess explicit physical significance. It effectively captures the influence of intermediate principal stress on hard rock strength and represents the nonlinear mechanical response under high stress conditions. Its high predictive accuracy for various hard rocks confirms the criterion's broad applicability under complex stress states and reinforces its value for practical engineering applications.

Key words: deep rock; strength criteria; intermediate principal stress; critical confining pressure; nonlinearity

(编辑 张 琼)

引用格式: Yu Jin,Zhou Yongsheng,Zhang Chao,et al.Modified Mohr–Coulomb hard rock strength criterion considering the influence of intermediate principal stress[J].Advanced Engineering Sciences,2026,58(1):46–56.[俞缙,周永盛,张超,等.考虑中主应力影响的修正摩尔–库仑硬岩强度准则[J].工程科学与技术,2026,58(1):46–56.]