

DOI: 10.13715/j.issn.2096-644X.20250821.0001

引用格式: 陈杰, 贾美美. 分数阶忆阻多涡卷系统的构造及动力学行为分析[J]. 湘潭大学学报(自然科学版), 2026, 48(2): 73-88.

Citation: CHEN Jie, JIA Meimei. Design of fractional-order memristive multi-scroll systems and analysis of their dynamical behaviors [J]. Journal of Xiangtan University (Natural Science Edition), 2026, 48(2): 73-88.

分数阶忆阻多涡卷系统的构造及动力学行为分析*

陈杰^{1,2}, 贾美美^{1,2}

(1. 内蒙古工业大学 电力学院, 内蒙古 呼和浩特 010080;

2. 内蒙古自治区机电控制重点实验室, 内蒙古 呼和浩特 010051)

摘要: 【目的】该文旨在探究分数阶忆阻耦合对神经网络动力学行为的增强机制, 构建一种能够生成拓扑结构可调的多涡卷吸引子的新型混沌系统, 从而为信息安全等领域提供具有高复杂度和高可控性的理论模型基础. 【方法】基于类激活函数设计了一种新型分数阶忆阻器模型, 并将其作为突触引入经典 Hopfield 神经网络中, 构建出分数阶忆阻 Hopfield 神经网络 (FOMHNN). 采用数值仿真方法, 通过相图、分岔图、李雅普诺夫指数等工具, 系统研究了分数阶阶次、耦合强度及忆阻器内部参数对系统动力学的影响. 【结果】该 FOMHNN 能产生数量与奇偶性均可通过忆阻器参数控制的多涡卷混沌吸引子. 系统随分数阶阶次与耦合强度的变化展现出丰富的动力学特性, 包括周期、混沌、瞬态混沌及多种类型的共存吸引子. 相较于对应的整数阶模型, 分数阶系统表现出更优的动力学复杂性和初值敏感性. 【结论】该文通过揭示分数阶与忆阻耦合对动力学行为的增强机制, 为后续在图像加密、安全通信等领域的实际应用奠定了理论基础.

关键词: 分数阶; 忆阻器; 多涡卷混沌系统; Hopfield 神经网络; 共存吸引子

中图分类号: O415.5

文献标志码: A

文章编号: 2096-644X (2026) 02-0073-16

Design of fractional-order memristive multi-scroll systems and analysis of their dynamical behaviors

CHEN Jie^{1,2}, JIA Meimei^{1,2}

(1. College of Electric Power, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010080, China;

2. Key Laboratory of Electromechanical Control in Inner Mongolia Autonomous Region, Hohhot 010051, China)

Abstract: 【Objective】The purpose is to investigate the enhancement mechanism of fractional-order memristive coupling on the dynamical behaviors of neural networks, and to construct a new chaotic system capable of generating multi-scroll attractors with tunable topological structures, thereby providing a theoretical model foundation with high complexity and controllability for fields such as information security. 【Method】A novel fractional-order memristor model was designed based on a class of activation-like functions and introduced as a synaptic element into the classical Hopfield neural network to construct the FOMHNN. Numerical simulation methods, utilizing tools such as phase portraits, bifurcation diagrams, and Lyapunov exponents, were employed to systematically study the effects of the fractional order, coupling strength, and internal memristor parameters on the system dynamics. 【Result】Experimental results demonstrate that the proposed FOMHNN can generate multi-scroll chaotic attractors whose quantity and

* 收稿日期: 2025-08-21

基金项目: 内蒙古自治区自然科学基金 (2024MS06006)

通信作者: 贾美美 (1985-), 女, 内蒙古乌兰察布人, 副教授, 硕士生导师. E-mail: meimeijia14@163.com

parity are controllable via the memristor parameters. The system exhibits rich dynamical behaviors with variations in the fractional order and coupling strength, including periodic, chaotic, and transient chaotic states, as well as various types of coexisting attractors. Compared to its integer-order counterpart, the fractional-order system shows significantly superior dynamical complexity and sensitivity to initial conditions. **【Conclusion】** By revealing the enhancement mechanism of fractional-order and memristive coupling on dynamical behaviors, this work lays a theoretical foundation for subsequent practical applications in image encryption and secure communication.

Key words: fractional-order; memristor; multi-scroll chaotic system; Hopfield neural network; coexisting attractors

0 引言

混沌系统因对初始条件的敏感依赖性和复杂的动力学特性,在数学、计算机、保密通信、图像加密等多个领域中有着广泛的应用,构建具有复杂动力学特性的混沌系统一直是该领域的研究热点^[1].近年来,随着人工智能及人工神经网络的快速发展,许多研究指出人脑本身就是一个复杂的非线性系统,呈现出丰富的混沌动力学行为,研究类脑神经系统的混沌现象具有重要意义.为此,学者们提出了许多类脑神经网络模型^[2-4],其中 Hopfield 神经网络凭借其独特的网络结构,易于产生复杂的动力学行为,如共存吸引子^[5]、隐藏吸引子^[6]、超混沌吸引子^[7]等,在构建复杂混沌系统中展现出巨大潜力^[8].

忆阻器作为第四种基本电路元件,其非线性和记忆特性使其能够有效模拟生物神经突触的功能或外部电磁辐射效应,从而有效模拟神经网络的动力学特性^[9-12].基于此,大量的忆阻 Hopfield 神经网络被提出.研究表明,忆阻器的引入能使 Hopfield 神经网络表现出更复杂、更混沌的动力学行为^[13].例如, Yao 等^[14]提出了一种新型多稳态高可调忆阻器模型,并基于该模型构建了非对称忆阻 Hopfield 神经网络,发现其具有复杂的动力学行为,包括耦合强度控制的振幅缩放混沌、初始状态与耦合强度控制的共存非典型混沌吸引子,且存在无限持续的非典型混沌吸引子. Wang 等^[15]提出了一种异构忆阻 Hopfield 神经网络,结合传统激活函数和忆阻自适应激活函数,发现网络存在多涡卷混沌、瞬态混沌、状态跳变、多类型共存吸引子等复杂动力学行为.

多涡卷吸引子因拓扑结构较其他混沌系统更为复杂,在需要高安全性的应用领域中有极高的应用价值^[16].基于忆阻器生成多涡卷的典型方法:首先需要构建一类可通过内部状态变量拓展指标 2 的鞍焦平衡点的忆阻器,再利用忆阻器替换非线性动力学系统中的非线性部分,或者直接在线性动力学系统中引入忆阻器,进而建立具有多涡卷混沌吸引子的非线性动力学系统^[17].例如, Lai 等^[18]设计了一种基于双曲正切函数的新型忆阻器,将其作为突触引入 Hopfield 神经网络,构建出可生成多涡卷吸引子的忆阻神经网络.该网络具有可调忆导函数、定量可控多稳定性和振幅控制特性,其动态行为通过电路实现得到验证.基于此网络设计的图像加密方案,通过多轮置乱与扩散,展现出优异的加密性能. Wan 等^[19]通过引入外部多电平逻辑脉冲电流构建脉冲控制忆阻 HNN,再引入多分段忆阻器,通过调整脉冲电流和忆阻器参数,生成双涡卷、三涡卷、四涡卷等复杂网络多卷吸引子.

然而,上述研究多基于整数阶混沌系统.相对于整数阶微积分的值完全依赖于函数的局部特性,分数阶微积分以加权方式累积了一定时间范围内函数的所有信息,所以在很多情况下建立基于分数阶微积分的数学模型,可以更精确地描述实际系统的动态行为^[20].将分数阶微积

分引入忆阻 Hopfield 神经网络模型中, 有助于研究更复杂、更精细的动态行为^[21]. 例如, Yu 等^[22]构建了新型 4D 分数阶忆阻 Hopfield 神经网络 (4D-FOMHNN). 分析发现, 改变系统参数和分数阶阶次可呈现暂态混沌、混沌、共存吸引子等丰富的动态行为. Biamou 等^[23]提出了一种由两个非同质子 Hopfield 神经网络通过多稳态磁通控制忆阻器耦合而成的新型分数阶忆阻耦合 Hopfield 神经网络, 发现其存在混沌、多重瞬态转换、初始偏移行为及对称多涡卷混沌吸引子等复杂特性.

综上所述, 分数阶忆阻神经网络确实展现出比整数阶模型更丰富的动力学特性, 而目前关于分数阶神经网络的研究相对较少. 本文通过类激活函数设计了一种分段点可导的非线性函数, 并通过上述非线性函数设计构造了新型分数阶通用忆阻器模型. 通过引入忆阻器代替原神经网络中神经元间突触的方式, 构建了新型分数阶忆阻 Hopfeild 神经网络模型, 本文将对这一系统的动力学行为进行深入分析与探讨.

1 基本理论

目前主要有 3 种分数阶微积分的定义, 分别是 Grunwald-Letnikov、Riemann-Liouville 以及 Caputo. Caputo 因其在微分方程初值问题中允许使用标准的整数阶初值条件, 在工程与物理建模中应用广泛, 故本研究采用此定义.

给定函数 $f(t)$ 的 Caputo 分数阶微分定义如下:

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha-m}} d\tau, \quad (1)$$

式中: $m = [\alpha]$ 为整数; $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, 且要求 $f(t)$ 及其 i 阶导数连续, $i = 1, 2, \dots, m$.

给定函数 $f(t)$ 的 Caputo 分数阶积分定义如下:

$${}^c J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad (2)$$

不失一般性, 本文所研究的分数阶系统阶次为 $\alpha \in [0, 1]$. 分数阶系统的稳定性理论与整数阶系统的稳定性理论存在显著不同, 相关定理阐述如下:

定理 1 一般的 N 维分数阶系统的数学模型如下:

$$D^\alpha \mathbf{X} = f(\mathbf{X}), \quad (3)$$

式中: α 为分数阶次; $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbf{R}^n$; $D^\alpha \mathbf{X} = (D^\alpha x_1, D^\alpha x_2, \dots, D^\alpha x_n)^\top$. 该分数阶系统的平衡点为方程 $f(\mathbf{X}) = 0$ 的根^[24].

定理 2 设 O 点为系统式 (3) 的平衡点. $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 O 点处雅可比矩阵的特征值. 如果至少有一个负实特征值的同时至少有一对共轭复特征值且满足 $|\arg(\lambda_i)| < \alpha \frac{\pi}{2}$ 时, 该点称为指标 2 的鞍焦平衡点. 若至少有一个正实特征值同时至少有一对共轭复特征值且满足 $|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}$, 则该点称为指标 1 的鞍焦平衡点^[24].

2 基于类激活函数的新型分数阶忆阻器

通用型忆阻器的数学模型如下:

$$\begin{cases} i = G(\varphi)v, \\ \frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi, v), \end{cases} \quad (4)$$

式中: $G(x)$ 为忆导函数; v, i, φ 分别为忆阻器的输入电压、输出电流以及忆阻器内部状态变量.

本节将一种由类激活函数构成的新型多分段非线性函数和 Caputo 微分算子引入通用型忆阻器式 (4) 中, 构成一种新型分数阶通用型忆阻器.

2.1 分数阶忆阻器的数学模型

受文献 [17] 启发, 基于类激活函数 $H(x)$, 通过 2 种不同的构造方式, 构造了新型光滑非线性函数 $f(x)$. 函数 $H(x)$ 的数学表达式如下:

$$H(x) = \begin{cases} \frac{ax}{1 + e^{-bx}}, & x \leq 0, \\ \frac{ax}{1 + e^{bx}}, & x > 0, \end{cases} \quad (5)$$

式中, a, b 分别为可调节的参数.

为了控制多涡卷吸引子的数量与奇偶性, 定义函数 $f(x)$, 分为 2 种具体形式 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$. 其数学表达式如下:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = M \sum_{i=0}^n [H(x - 2im) + H(x + 2im) - H(x)], \\ f_2(x) = M \sum_{i=0}^n [H(x - (2i - 1)m) + H(x + (2i - 1)m)], \end{cases} \quad (6)$$

式中: M, m 分别为放缩系数及平移系数; n 为涡卷吸引子数量控制参数; $i = 1, 2, \dots, n$.

将函数 $f(x)$ 及 Caputo 算子引入通用忆阻器模型式 (4) 中, 得到新型分数阶忆阻器的数学模型:

$$\begin{cases} i = G(\varphi)v, \\ D^\alpha \varphi = cv - df(\varphi), \end{cases} \quad (7)$$

式中: $G(\varphi) = \sin x + x$; c, d 为可调参数; v, i, φ 分别为忆阻器的输入电压、输出电流以及分数阶忆阻器内部状态变量.

2.2 分数阶忆阻器的特性分析

在固定可调参数 $a = 10, b = 3, c = 1.8, d = 1, n = 1, M = m = 1$ 以及忆阻器初始状态 $\varphi(0) = 0$ 不变的情况下, 选择输入电压 $V = A \sin(2\pi ft)$. 分别研究不同激励频率、幅值及分数阶阶次对忆阻器磁滞回线特性的影响.

固定频率 $f = 10$ Hz, 分数阶阶次 $\alpha = 0.9$, 选取幅值 A 分别为 5、10、15. 当函数 $f(x)$ 采用 $f_1(x)$ 的形式时, 忆阻器模型的磁滞回线如图 1 所示; 当采用 $f_2(x)$ 的形式时, 磁滞回线如图 2 所示. 仿真结果表明, 随着幅值增大, 磁滞回线所围成的面积相应增大.

固定幅值 $A = 10$, 分数阶阶次 $\alpha = 0.9$ 时, 选取频率 f 分别为 5 Hz、15 Hz、50 Hz. 函数 $f(x)$ 分别采用 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的形式, 数值仿真结果分别如图 3 与图 4 所示. 结果表明, 随着频率增加, 磁滞回线面积减小; 当频率足够大时, 磁滞回线退化为单值函数曲线, 忆阻器表现出线性电阻特性.

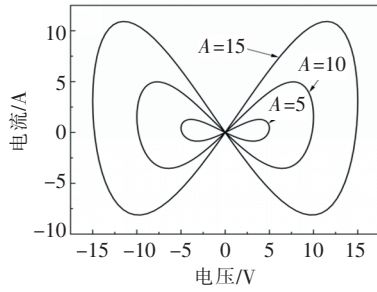


图 1 不同幅值时忆阻器的磁滞回线 $f(w) = f_1(w)$

Fig. 1 Hysteresis loop of memristor under different amplitudes $f(w) = f_1(w)$

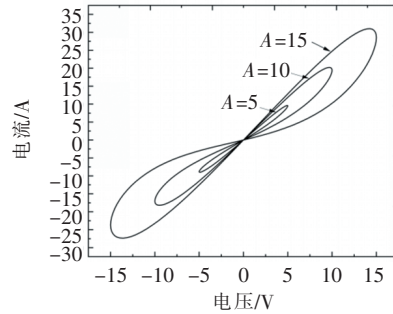


图 2 不同幅值时忆阻器的磁滞回线 $f(w) = f_2(w)$

Fig. 2 Hysteresis loop of memristor under different amplitudes $f(w) = f_2(w)$

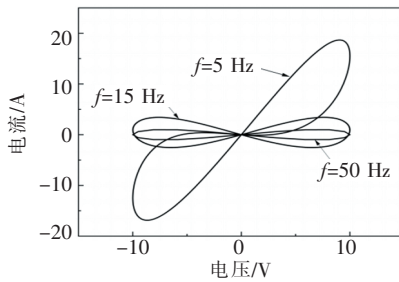


图 3 不同频率下忆阻器的磁滞回线 $f(w) = f_1(w)$

Fig. 3 Hysteresis loops of memristors at different frequencies $f(w) = f_1(w)$

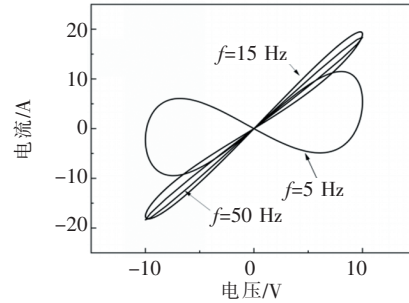


图 4 不同频率下忆阻器的磁滞回线 $f(w) = f_2(w)$

Fig. 4 Hysteresis loops of memristors at different frequencies $f(w) = f_2(w)$

固定频率 $f = 10\text{Hz}$, 幅值 $A = 10$, 选取分数阶阶次 α 分别为 0.8、0.9、1. 磁滞回线的数值仿真结果分别如图 5 与图 6 所示. 当分数阶阶次增加时, 磁滞回线的面积减小, 说明阶次越小, 忆阻器的记忆效果越强.

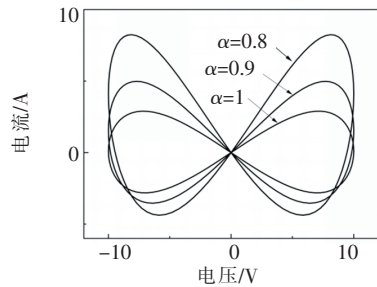


图 5 不同分数阶阶次下忆阻器的磁滞回线 $f(w) = f_1(w)$

Fig. 5 Hysteresis loops of memristors with different fractional orders $f(w) = f_1(w)$

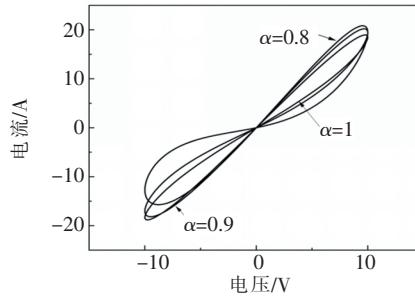


图 6 不同分数阶阶次下忆阻器的磁滞回线 $f(w) = f_2(w)$

Fig. 6 Hysteresis loops of memristors with different fractional orders $f(w) = f_2(w)$

在上述不同频率、幅值和分数阶阶次的数值仿真中, 磁滞回线始终通过 $v-i$ 平面零点. 这

一特性证明所提出的数学模型符合忆阻器的本质特征. 同时, 与整数阶情况相比, 分数阶忆阻器的记忆特性更好^[25].

3 分数阶忆阻多涡卷神经网络

具有 n 个神经元的 Hopfield 神经网络数学模型如下^[26]:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\mathbf{X} + \boldsymbol{\omega} \tanh(\mathbf{X}) + \mathbf{I}, \quad (8)$$

式中: $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为神经元的膜电压; $\boldsymbol{\omega}$ 为突触权重矩阵; $\tanh(\cdot)$ 为神经网络的激活函数; \mathbf{I} 为外部刺激电流.

3.1 突触耦合型分数阶忆阻神经网络的数学模型

基于第 2 节所提出的分数阶忆阻器, 通过将其作为突触耦合元件引入, 构建了一种三神经元分数阶忆阻 Hopfield 神经网络, 其拓扑结构如图 7 所示. 该网络的数学模型由如下分数阶微分方程组描述:

$$\begin{cases} D^\alpha x = -x + \omega_{11} \tanh(x) + \omega_{12} \tanh(y) + \omega_{13} \tanh(z), \\ D^\alpha y = -y + \omega_{21} \tanh(x) + \omega_{22} \tanh(y) + \omega_{23} \tanh(z), \\ D^\alpha z = -z + \omega_{31} \tanh(x) + kG(w) \tanh(y) + \omega_{33} \tanh(z), \\ D^\alpha w = c \tanh(y) - df(w), \end{cases} \quad (9)$$

式中: $G(w)$ 为分数阶忆阻器的忆导函数; c, d 分别为可调参数; k 为忆阻突触的耦合强度; ω_{ij} 为神经元之间的突触权重矩阵. 权重矩阵选择如下形式:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 2.5 & -1.4 & 0.4 \\ 2.4 & 1.5 & 1.2 \\ -9 & kG(w) & -0.8 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

在参数 $n = 1, c = 1.8, d = 1, \alpha = 0.9$, 耦合强度 $k = 0.1$, 系统的初值取 $[0.1, 0.1, 0.1, 0]^T$ 的条件下, 采用 $f_1(x)$ 的形式设置仿真步长 $h = 0.01$, 仿真时间 $t = 2000$ s, 得到的数值仿真结果如图 8 所示. 该系统产生了 3 对双涡卷吸引子, 展现了复杂的混沌动力学行为.

设置仿真步长为 1, 仿真时间为 2000 s, 通过 wolf 方法计算系统的李雅普诺夫指数分别为 $LE_1 = 0.17, LE_2 = -0.007, LE_3 = -0.026, LE_4 = -0.508$, 证实了系统处于混沌状态. 在相同的仿真参数设置下, 选取分数阶阶次为 1 时系统的李雅普诺夫指数为 $LE_1 = 0.12, LE_2 = 0.0007, LE_3 = -0.39, LE_4 = -1.5$. 可以看出分数阶系统较整数阶系统的李雅普诺夫指数更大. 在图像加密等高安全性领域, 更大的李雅普诺夫指数意味着更大的密钥空间和更高的随机性, 从而直接转化为更强的抗攻击能力与更高的安全鲁棒性.^[27-28]

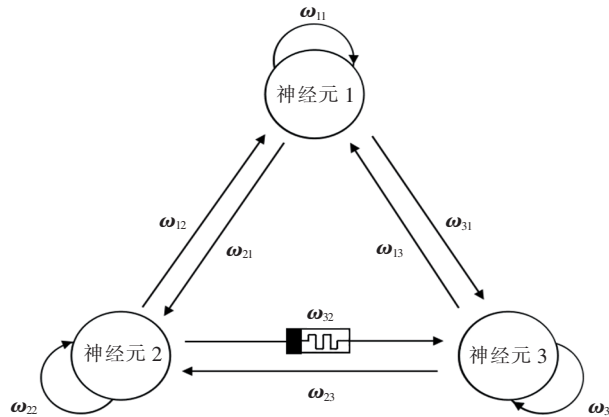


图 7 分数阶忆阻 Hopfield 神经网络的拓扑结构

Fig. 7 Topological structure of fractional-order memristive Hopfield neural network

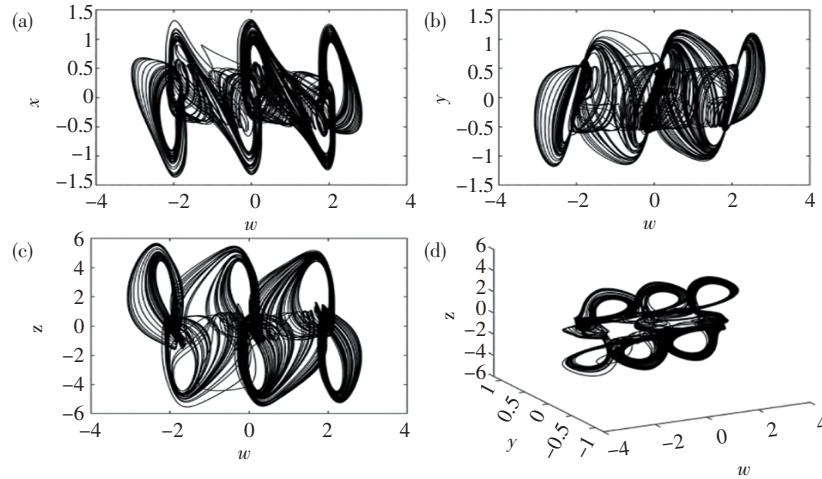


图 8 系统相图: (a) w - x 相图; (b) w - y 相图; (c) w - z 相图; (d) w - y - z 相图

Fig. 8 System phase diagram: (a) w - x phase diagram; (b) w - y phase diagram; (c) w - z phase diagram; (d) w - y - z phase diagram

当 n 分别为 0, 1, 2 时, 其所产生的涡卷数量如表 1 所示. 当 $f(w) = f_1(w)$ 时, 可以产生 $2n + 1$ 个双涡卷吸引子. 当 $f(w) = f_2(w)$ 时, 可以产生 $2n + 2$ 个双涡卷吸引子. 系统相图如图 9 所示.

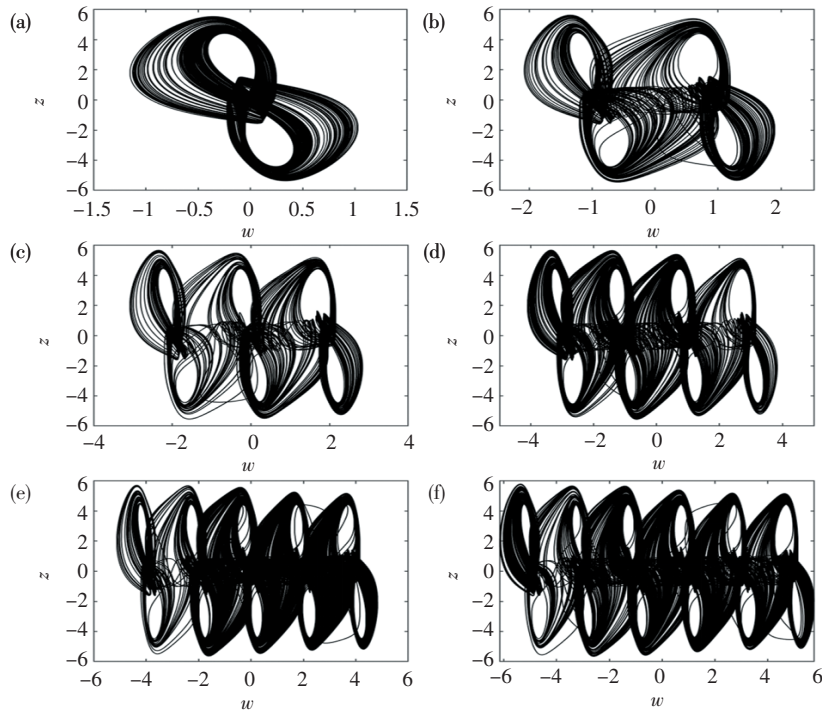


图 9 当 n 与 $f(x)$ 取值不同时系统的相图: (a) $f(x) = f_1(x)$, $n=0$, 2-涡卷; (b) $f(x) = f_2(x)$, $n=0$, 4-涡卷; (c) $f(x) = f_1(x)$, $n=1$, 6-涡卷; (d) $f(x) = f_2(x)$, $n=1$, 8-涡卷; (e) $f(x) = f_1(x)$, $n=2$, 10-涡卷; (f) $f(x) = f_2(x)$, $n=2$, 12-涡卷

Fig. 9 When n and $f(x)$ take different values, the system phase diagram: (a) $f(x) = f_1(x)$, $n=0$, 2-scroll; (b) $f(x) = f_2(x)$, $n=0$, 4-scroll; (c) $f(x) = f_1(x)$, $n=1$, 6-scroll; (d) $f(x) = f_2(x)$, $n=1$, 8-scroll; (e) $f(x) = f_1(x)$, $n=2$, 10-scroll; (f) $f(x) = f_2(x)$, $n=2$, 12-scroll

表 1 当 n 取值不同时多涡卷吸引子的数量Tab. 1 The number of multi-scroll attractors when n is different

$f(x)$ 形式	n 取值	双涡卷吸引子数量
$f_1(x)$	0	1
	1	3
	2	5
	N	$2N+1$
$f_2(x)$	0	2
	1	4
	2	6
	N	$2N+2$

3.2 分数阶忆阻多涡卷神经网络的动力学行为分析

系统的动力学行为受多种参数控制. 本节综合运用相图、分岔图及李雅普诺夫指数等工具深入研究系统式 (9) 的平衡点以及参数对其动力学的影响.

3.2.1 平衡点的对涡卷的控制作用与稳定性分析

以分数阶阶次取 0.9、耦合强度 $k=0.1$ 为例, 由定理 1 可得系统平衡点的方程如下:

$$\begin{cases} -x + 2.5 \tanh(x) - 1.4 \tanh(y) + 0.4 \tanh(z) = 0, \\ -y + 2.4 \tanh(x) + 1.5 \tanh(y) + 1.2 \tanh(z) = 0, \\ -z - 9 \tanh(x) + 0.1G(w) \tanh(y) - 0.8 \tanh(z) = 0, \\ 1.8 \tanh(y) - f(w) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

为了便于求解平衡点, 将式 (10) 改写为隐函数形式:

$$\begin{cases} y = \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{1.8}f(w)\right), \\ z = \operatorname{arctanh}(y - 2.4 \tanh(x) - 1.5 \tanh(y)), \\ L_1(x, w) = -x + 2.5 \tanh(x) - 1.4 \tanh(y) + 0.4 \tanh(z), \\ L_2(x, w) = -z - 9 \tanh(x) + 0.1G(w) \tanh(y) - 0.8 \tanh(z). \end{cases} \quad (12)$$

隐函数 L_1, L_2 的交点即为式 (11) 的解. 当 $n=1$ 时, 系统存在 15 个平衡点. 平衡点处的雅可比矩阵如下:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 + 2.5 \operatorname{sech}^2(x) & -1.5 \operatorname{sech}^2(y) & 0.4 \operatorname{sech}^2(z) & 0 \\ 2.4 \operatorname{sech}^2(x) & -1 + 1.5 \operatorname{sech}^2(y) & 1.2 \operatorname{sech}^2(z) & 0 \\ -9 \operatorname{sech}^2(x) & kG(w) \operatorname{sech}^2(y) & -1 - 0.8 \operatorname{sech}^2(z) & k \frac{dG}{dw} \tanh(y) \\ 0 & 1.8 \operatorname{sech}^2(y) & 0 & -\frac{df_1}{dw} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

式中: $\frac{dG}{dw} = \cos w + 1$; $\frac{df_1}{dw}$ 为函数 $f_1(w)$ 的导数. 其表达式如式 (14) 与式 (15) 所示.

$$\frac{dH(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{a(1 + e^{-bx}) + abx(1 + e^{-bx})}{(1 + e^{-bx})^2}, & x \leq 0, \\ \frac{a(1 + e^{bx}) - abx(1 + e^{bx})}{(1 + e^{bx})^2}, & x > 0, \end{cases} \quad (14)$$

式中: $\frac{dH(x)}{dx}$ 表示为 $H(x)$ 的导数; a, b 为可调参数. 以下简称为 $DH(x)$.

$$\frac{df}{dw} = \begin{cases} \frac{df_1}{dw} = M \sum_{i=0}^n [DH(x - 2im) + DH(x + 2im) - DH(x)], \\ \frac{df_2}{dw} = M \sum_{i=0}^n [DH(x - (2i - 1)m) + DH(x + (2i - 1)m)], \end{cases} \quad (15)$$

式中: M 和 m 分别为放缩系数及平移系数; n 为涡卷吸引子数量控制参数; $i = 1, 2, \dots, n$.

基于平衡点的数值解及平衡点处的雅可比矩阵, 可计算出系统平衡点处的特征值与特征向量. 通过定理 2 可进一步确定平衡点的类型及稳定性, 数值计算结果如表 2 所示.

表 2 系统平衡点

Tab. 2 Equilibrium point

序号	平衡点坐标	特征值	平衡点类型	平衡点稳定性
1	(-0.500, -0.185, 1.243, -2.061)	(0.555 ± 1.520i, -0.768, -3.951)	指标 2 鞍焦点	不稳定
2	(0, 0, 0, -1.990)	(-0.657 ± 2.453i, -4.117, 1.514)	指标 1 鞍焦点	不稳定
3	(0.500, 0.185, -1.243, -1.910)	(0.554 ± 1.5192i, -3.507, -0.769)	指标 2 鞍焦点	不稳定
4	(0.500, 0.185, -1.243, -1.191)	(0.555 ± 1.518i, 1.681, -0.770)	指标 1 鞍焦点	不稳定
5	(0, 0, 0, -1.002)	(-0.662 ± 2.431i, 1.524, 1.772)	指标 1 鞍焦点	不稳定
6	(-0.499, -0.185, 1.243, -0.814)	(0.558 ± 1.516i, 1.694, -0.772)	指标 1 鞍焦点	不稳定
7	(-0.499, -0.145, 1.243, -0.08)	(0.559 ± 1.512i, -0.774, -3.577)	指标 2 鞍焦点	不稳定
8	(0, 0, 0, 0)	(-0.671 ± 2.393i, -4.754, 1.541)	指标 1 鞍焦点	不稳定
9	(0.499, 0.185, -1.242, 0.08)	(0.559 ± 1.512i, -0.777, -3.576)	指标 2 鞍焦点	不稳定
10	(0.499, 0.185, -1.242, 0.814)	(0.560 ± 1.509i, 1.696, -0.779)	指标 1 鞍焦点	不稳定
11	(0, 0, 0, 1.002)	(-0.680 ± 3.466i, 2.559, 1.772)	指标 1 鞍焦点	不稳定
12	(-0.499, -0.185, 1.242, 1.191)	(0.562 ± 1.508i, 1.6794, -0.782)	指标 1 鞍焦点	不稳定
13	(-0.492, -0.185, 1.242, 1.910)	(0.562 ± 1.506i, -0.783, -3.508)	指标 2 鞍焦点	不稳定
14	(0, 0, 0, 1.990)	(-0.685 ± 2.333i, -4.718, 1.570)	指标 1 鞍焦点	不稳定
15	(0.499, 0.185, -1.242, 2.063)	(0.563 ± 1.506i, -0.783, -3.951)	指标 2 鞍焦点	不稳定

15 个平衡点每 3 个为一组. 以序号 1, 2, 3 这一组为例, 由两个指标 2 鞍焦点和一个指标 1 鞍焦点组成, 3 个平衡点共同组成了一个双涡卷吸引子. 这 15 个平衡点中共有 3 组这样的双涡卷吸引子, 其余指标 1 鞍焦平衡点则是这 3 组双涡卷吸引子之间键带形成的基础.

随着多涡卷控制参数 n 的改变, 两种类型的鞍焦平衡点的数量也会发生变化. 图 10 与图 11 分别为 $n=0$ 与 $n=2$ 时式 (12) 中两个隐函数与多涡卷吸引子的相图. 多涡卷控制参数 n 通过改变隐函数方程组式 (12) 的交点数量来调节系统平衡点的总数, 从而实现多涡卷拓扑结

构的可控生成.

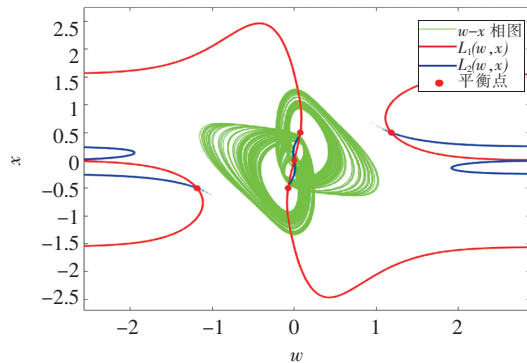


图 10 $n=0$ 时平衡点示意图

Fig. 10 The equilibrium point diagram when $n = 0$

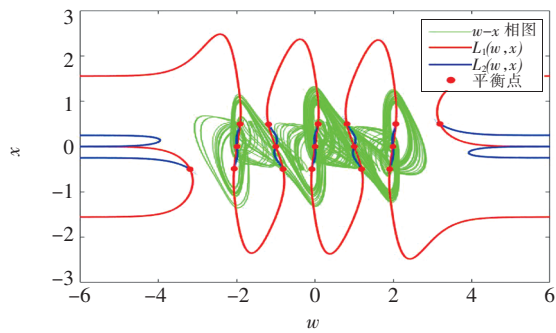


图 11 $n=1$ 时平衡点示意图

Fig. 11 The equilibrium point diagram when $n = 1$

3.2.2 分数阶次对系统动力学的影响

为研究分数阶次对系统动力学的影响, 在耦合强度 $k = 0.1$, 系统初值为 $x = [0.1, 0.1, 0.1, 0]^T$ 的情况下, 使系统分数阶次 α 由 0.85 变化到 1, 步长为 0.000 1. 绘制系统变量 x 随分数阶次 α 变化的分岔图, 如图 12 所示. 分析表明, 系统随 α 增大呈现出复杂的动力学演化路径. 首先通过倍周期分岔途径进入混沌状态, 随后混沌行为退化为瞬态混沌, 最后稳定在周期状态. 随着 α 的进一步增加, 系统再次经由倍周期分岔路径, 重新进入混沌状态.

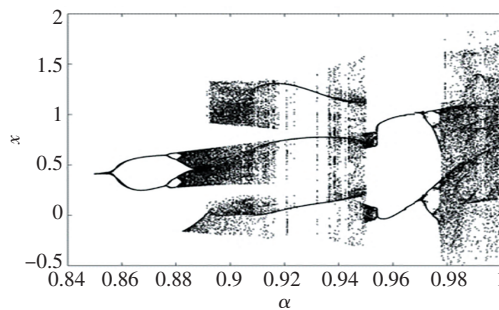


图 12 系统分数阶次变化时状态变量 x 的分岔图

Fig. 12 The bifurcation diagram of the state variable x when the fractional order of the system changes

图 13 与图 14 分别记录了系统两次经历倍周期分岔过程时的相图序列. 图 13 对应第一次倍周期分岔. 当 $\alpha = 0.86$ 时, 系统呈现周期-1 极限环 (图 13 (a)). 随着 α 增大至 0.874, 系统演化为周期-2 轨道 (图 13 (b)). 在 $\alpha = 0.879 4$ 时, 系统进一步分岔为周期-4 轨道 (图 13 (c)). 最终, 当 $\alpha = 0.881$ 时, 系统进入混沌状态 (图 13 (d)). 图 14 则展示了系统第二次经历类似的倍周期分岔通向混沌的路径. 从周期-1 (图 14 (a), $\alpha = 0.96$) 开始, 依次经历周期-2 (图 14 (b), $\alpha = 0.972$)、周期-4 (图 14 (c), $\alpha = 0.976$), 最终再次进入混沌状态 (图 14 (d), $\alpha = 0.99$), 并在该参数下激发出数量可控的多涡卷吸引子.

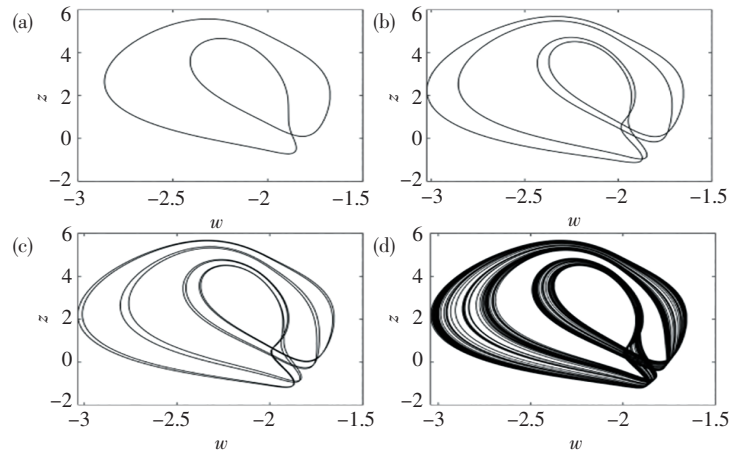


图 13 系统分数阶阶次不同时系统的相图: (a) $\alpha=0.86$ 时, w - z 相图, 周期-1; (b) $\alpha=0.874$ 时, w - z 相图, 周期-2;
(c) $\alpha=0.8794$ 时, w - z 相图, 周期-4; (d) $\alpha=0.881$ 时, w - z 相图, 混沌状态

Fig. 13 The phase diagram of the system with different orders : (a) $\alpha=0.86$, w - z phase diagram, the period-1 ;
(b) $\alpha=0.874$, w - z phase diagram, the period-2; (c) $\alpha=0.8794$, w - z phase diagram, the period-4 ;
(d) $\alpha=0.881$, w - z phase diagram, the chaotic state

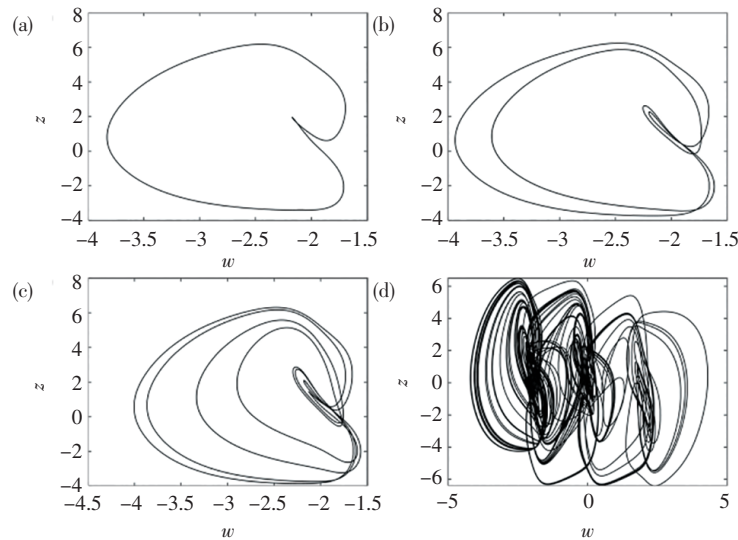


图 14 系统分数阶阶次不同时系统的相图: (a) $\alpha=0.96$ 时, w - z 相图, 周期-1; (b) $\alpha=0.972$ 时, w - z 相图,
周期-2; (c) $\alpha=0.976$ 时, w - z 相图, 周期-4; (d) $\alpha=0.99$ 时, w - z 相图, 混沌状态

Fig. 14 The phase diagram of the system with different orders : (a) $\alpha=0.96$, w - z phase diagram, the period-1;
(b) $\alpha=0.972$, w - z phase diagram, the period-2 ; (c) $\alpha=0.974$, w - z phase diagram, the period-4;
(d) $\alpha=0.99$, w - z phase diagram, the chaotic state

当系统的分数阶阶次 α 在 0.91 至 0.95 区间内变化时, 可观察到典型的瞬态混沌动力学行为, 如图 15 所示. 在动力学中, 瞬态混沌是指系统在有限时间内表现出混沌运动的特征, 随后自发演化并最终稳定于一个非混沌的吸引子^[29]. 在神经科学中, 瞬态混沌被认为是实现复杂认知功能的一种潜在动力学机制. 特别值得注意的是, 大脑可能工作在介于有序与混沌之间的临界状态, 即所谓“混沌边缘”. 在此状态下, 系统的信息处理容量、动力学复杂性以及对

环境变化的适应能力均能达到最优, 而瞬态混沌正是该系统能够抵达并维持于此临界区域的重要动力学特征^[30].

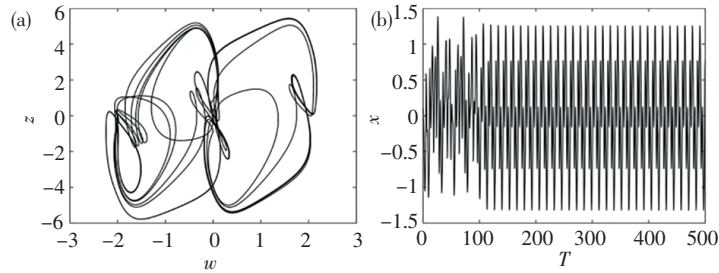


图 15 瞬态混沌状态相图与时序图

Fig. 15 Transient chaotic state phase diagram and timing diagram

随着分数阶阶次的变化, 系统可呈现出复杂的动力学特性, 通过绘制在系统初值为 $x = [-0.1, -0.1, -0.1, 0]^T$ 条件下系统状态 x 随分数阶阶次变化的分岔图可知, 系统存在共存吸引子. 如图 16 所示, 在分数阶阶次为 0.98 时, 系统表现出两个混沌吸引子共存的现象; 在分数阶阶次为 0.96 时, 系统表现出两个周期吸引子共存的现象.

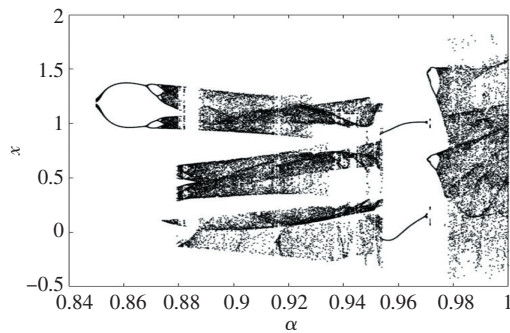


图 16 初值为 $x = [-0.1, -0.1, -0.1, 0]^T$ 时系统状态变量 x 随分数阶阶次变化的分岔图

Fig. 16 The bifurcation diagram of the system state variable x changing with the fractional order when the initial value is $x = [-0.1, -0.1, -0.1, 0]^T$

随着分数阶阶次的变化, 系统展现出丰富的动力学行为, 其中包括多稳态特性, 即共存吸引子. 在固定初值 $x = [-0.1, -0.1, -0.1, 0]^T$ 下绘制的系统分岔图. 图 16 揭示了这一现象. 如图 17 与图 18 所示, 当 $\alpha = 0.978$ 时, 系统表现出混沌吸引子共存; 当 $\alpha = 0.96$ 时, 系统则表现为周期吸引子共存.

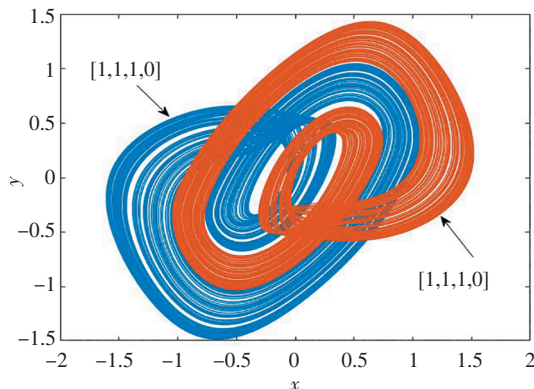


图 17 混沌吸引子共存

Fig. 17 The coexistence of chaotic attractors

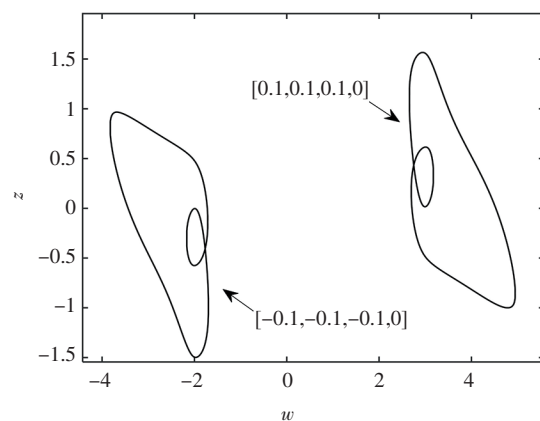


图 18 周期吸引子共存

Fig. 18 The coexisting of periodic attractor

3.2.3 耦合强度对系统动力学的影响

在分数阶阶次为 0.9, 固定初值为 $x = [0.1, 0.1, 0.1, 0]^T$ 的情况下, 随耦合强度 k 增大, 系统的分岔行为如图 19 所示, 其动力学状态按“混沌→倍周期→周期→混沌”的序列演化. 图 21 (a) ~图 21 (d) 的相图分别对应 4 个特征状态: 多涡卷混沌、瞬态混沌、倍周期及新的混沌态. 在最终混沌态 (图 21 (d)) 下, 调整参数 n 会改变吸引子的空间位置, 但不改变其混沌属性.

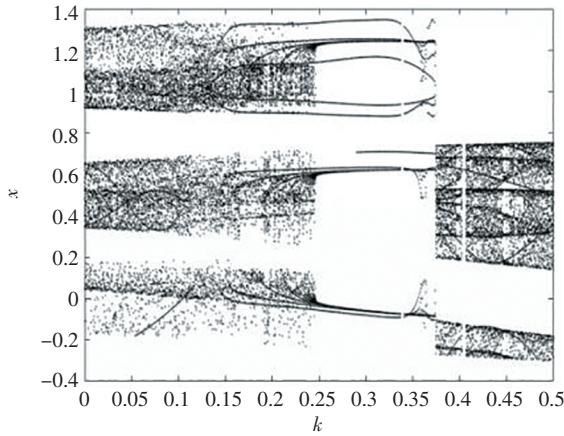


图 19 初值为 $x = [0.1, 0.1, 0.1, 0]^T$ 随耦合强度变化系统状态变量 x 的分岔图

Fig. 19 The initial value is $x = [0.1, 0.1, 0.1, 0]^T$ The bifurcation diagram of the system state variable x with the change of coupling strength

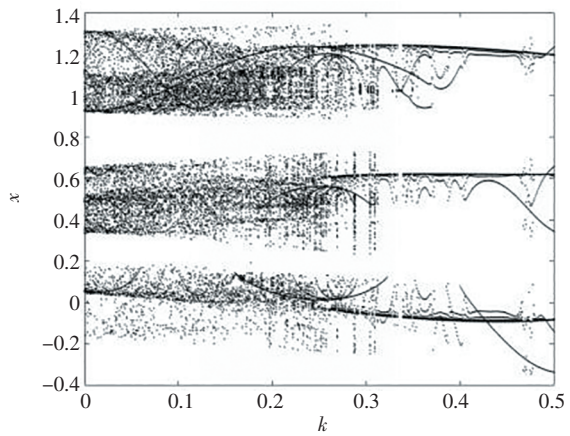


图 20 初值为 $x = [-0.1, -0.1, -0.1, 0]^T$ 随耦合强度变化系统状态变量 x 的分岔图

Fig. 20 The initial value is $x = [-0.1, -0.1, -0.1, 0]^T$ The bifurcation diagram of the system state variable x with the change of coupling strength

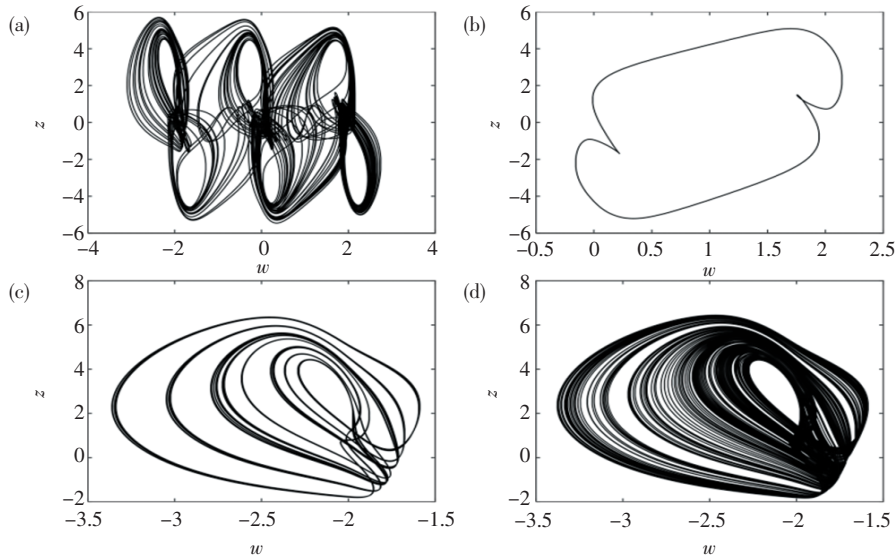


图 21 耦合强度不同时系统的相图: (a) $k=0.15$, w - z 相图; (b) $k=0.3$, w - z 相图; (c) $k=0.45$, w - z 相图; (d) $k=0.5$, w - z 相图

Fig. 21 The phase diagram of the system with different coupling strength: (a) $k=0.15$, w - z phase diagram; (b) $k=0.3$, w - z phase diagram; (c) $k=0.45$, w - z phase diagram; (d) $k=0.5$, w - z phase diagram

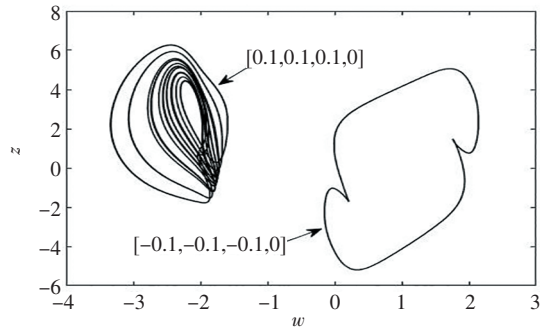


图 22 混沌吸引子与周期吸引子共存

Fig. 22 Chaotic attractors and periodic attractors coexist

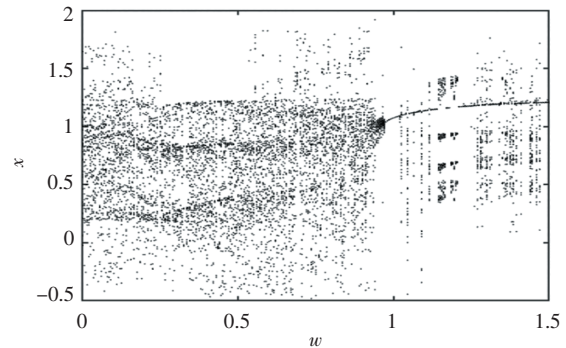


图 23 整数阶系统随耦合强度变化的分岔图

Fig. 23 Bifurcation diagram of the integer-order system as a function of coupling strength

随着耦合强度的增加, 系统同样具有多稳态的特性. 如图 22 所示, 在耦合强度为 0.45 时, 系统呈现出混沌吸引子与周期吸引子共存的现象.

3.3 与整数阶忆阻神经网络模型的对比分析

本节将分数阶忆阻神经网络与其对应的整数阶模型即分数阶阶次为 1 时的模型进行对比.

除分数阶阶次外的所有参数均与 3.2 节保持相同, 且初始条件固定为 $\mathbf{x} = [0.1, 0.1, 0.1, 0]^T$ 的情况下, 绘制系统状态 x 随耦合强度变化的分岔图, 如图 23 所示. 相比之下, 在分数阶模型中观察到丰富的动力学行为, 如瞬态混沌、多类吸引子共存等, 在整数阶仿真中均未出现. 此外, 在相同的混沌参数区域内, 分数阶系统的最大李雅普诺夫指数显著大于整数阶系统, 表明其具有更强的混沌复杂性和初值敏感性.

3.4 与现有分数阶忆阻神经网络模型的对比分析

将本文模型与 Yu 等^[22]提出的 4D 分数阶忆阻 HNN 和 Biamou 等^[23]提出的分数阶忆阻耦合 HNN 进行对比, 如表 3 所示.

表 3 与现有分数阶忆阻神经网络模型动力学行为对比

Tab. 3 Comparison of dynamical behaviors with existing fractional-order memristive HNN models

对比项	文献 [22] 模型	文献 [23] 模型	本文模型
模型结构	4 个神经元, 忆阻器模拟自突触	2 个三维 HNN 通过忆阻器耦合	3 个神经元, 忆阻器模拟神经元间的突触
忆阻函数	双曲正切函数	Joglekar 窗函数	类激活函数构造的通用光滑非线性函数
多涡卷生成	双涡卷吸引子	可生成对称多涡卷	可生成数量与奇偶性可控的多涡卷
共存吸引子	点吸引子与周期吸引子共存	存在共存吸引子	存在多种共存吸引子
瞬态混沌	存在	不存在	存在
主要调控参数	系统参数、分数阶阶次	耦合强度、分数阶阶次	分数阶阶次、耦合强度、涡卷数量参数 n

根据表 3 的对比结果, 本文所提出的模型动力学更加丰富, 多种控制参数使得该模型应用

于加密、信息处理等领域时, 具有更大的灵活性和更高的安全性.

4 结论

本文提出了一种具有 3 个神经元的分数阶忆阻 Hopfield 神经网络模型, 并系统分析了分数阶阶次、忆阻突触的耦合强度对该神经网络动态特性的影响. 研究发现, 该神经网络可以产生由忆阻器内部参数控制的多涡卷吸引子, 随着分数阶阶次、忆阻突触耦合强度的变化, 该神经网络可以呈现出周期状态、混沌状态、瞬态混沌状态及多种吸引子共存等复杂的动态特性, 使其在图像加密、保密通信等需要安全性的领域展现出很大的应用潜力.

参 考 文 献

- [1] KONG X X, YU F, YAO W, et al. Memristor-induced hyperchaos, multiscroll and extreme multistability in fractional-order HNN: Image encryption and FPGA implementation [J]. *Neural Networks*, 2024, 171: 85-103.
- [2] ZHANG S, ZHENG J, WANG X, et al. Multi-scroll hidden attractor in memristive HR neuron model under electromagnetic radiation and its applications [J]. *Chaos*, 2021, 31(1): 011101.
- [3] THOTTIL S K, IGNATIUS R P. Nonlinear feedback coupling in Hindmarsh-Rose neurons [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(3): 1879-1899.
- [4] YANG X S, YUAN Q. Chaos and transient chaos in simple Hopfield neural networks [J]. *Neurocomputing*, 2005, 69(1-3): 232-241.
- [5] HUANG L L, CHEN F Y, YANG Y, et al. A novel memristor Hopfield neural network with homogeneous coexisting multi-scroll attractors [J]. *Physica Scripta*, 2024, 99(6): 065217.
- [6] ZHANG J, YANG L, ZUO J G, et al. Design and application of spatial multi-structure hidden attractors in memristor-coupled heterogeneous neural networks [J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2025, 199: 116662.
- [7] XU X T, CHEN S B. An optical image encryption method using hopfield neural network [J]. *Entropy*, 2022, 24(4): 521.
- [8] LIN H, WANG C, YU F, et al. A review of chaotic systems based on memristive hopfield neural networks [J]. *Mathematics*, 2023, 11(6): 1369.
- [9] WEI Y Q, DU B X, WANG X Y, et al. Multi-ringlike volumes and offset of Hopfield neural networks based on a discrete memristive self-synapse [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2025, 113(3): 2729-2746.
- [10] WAN Q Z, CHEN S M, LIU T Q, et al. Grid multi-double-scroll attractors in a magnetized Hopfield neural network with a memristive self-connection synapse [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(16): 14513-14526.
- [11] LI F Y, BAI L F, CHEN Z G, et al. Scroll-growth and scroll-control attractors in memristive bi-neuron hopfield neural network [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-express Briefs*, 2024, 71(4): 2354-2358.
- [12] 丁大为, 王谋媛, 王金, 等. 电磁感应下分数阶神经网络动力学行为分析及应用 [J]. *物理学报*, 2024, 73(10): 46-58.
- [13] 王梦蛟, 杨琛, 贺少波, 等. 一种新型复合指数型局部有源忆阻器耦合的 Hopfield 神经网络 [J]. *物理学报*, 2024, 73(13): 58-69.
- [14] YAO W, LIU J P, SUN Y C, et al. Dynamics analysis and image encryption application of Hopfield neural network with a novel multistable and highly tunable memristor [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(1): 693-708.
- [15] WANG C H, LIANG J H, DENG Q L. Dynamics of heterogeneous Hopfield neural network with adaptive

- activation function based on memristor [J]. *Neural Networks*, 2024, 178: 106408.
- [16] LIU D X, YU G F, ZHAO Y Z, et al. A novel scheme for constructing grid multi-scroll chaotic systems applied to image encryption [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2025, 113(16): 21925-21949.
- [17] YU F, XU S, LIN Y, et al. Design and analysis of a novel fractional-order system with hidden dynamics, hyperchaotic behavior and multi-scroll attractors [J]. *Mathematics*, 2024, 12(14): 2227.
- [18] LAI Q, WAN Z, ZHANG H, et al. Design and analysis of multiscroll memristive hopfield neural network with adjustable memductance and application to image encryption [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2023, 34(10): 7824-7837.
- [19] WAN Q Z, CHEN S M, YANG Q, et al. Grid multi-scroll attractors in memristive Hopfield neural network under pulse current stimulation and multi-piecewise memristor [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(19): 18505-18521.
- [20] HE S B, WANG H H, SUN K H. Solutions and memory effect of fractional-order chaotic system; A review [J]. *Chinese Physics B*, 2022, 31(6): 060501.
- [21] WANG C, LI Y, YANG G, et al. A review of fractional-order chaotic systems of memristive neural networks [J]. *Mathematics*, 2025, 13(10): 1600.
- [22] YU F, ZHANG S K, SU D, et al. Dynamic analysis and implementation of FPGA for a new 4D fractional-order memristive hopfield neural network [J]. *Fractal and Fractional*, 2025, 9(2): 115.
- [23] BIAMOU A L M, TAMBA V K, TAGNE F K, et al. Fractional-order-induced symmetric multi-scroll chaotic attractors and double bubble bifurcations in a memristive coupled Hopfield neural networks [J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2024, 178: 114267.
- [24] YU F, LIN Y, XU S, et al. Dynamic analysis and FPGA implementation of a new fractional-order hopfield neural network system under electromagnetic radiation [J]. *Biomimetics*, 2023, 8(8): 559.
- [25] QIU L, LI S, XIONG T, et al. Analysis and circuit implementation of fractional-order memristive hyperchaotic system with enhanced memory [J]. *Physica Scripta*, 2025, 100(2): 025212.
- [26] HOPFIELD J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1984, 81(10): 3088-3092.
- [27] LENG X X, WANG X P, ZENG Z G. Memristive Hopfield neural network with multiple controllable nonlinear offset behaviors and its medical encryption application [J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2024, 183: 114944.
- [28] NDASSI H L, KENGNE R, TEGUE A G G, et al. A robust image encryption scheme based on compressed sensing and novel 7D oscillato with complex dynamics [J]. *Heliyon*, 2023, 9(6): e16514.
- [29] LAMPARTOVÁ A, LAMPART M. Exploring diverse trajectory patterns in nonlinear dynamic systems [J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2024, 182:114864.
- [30] CHUA L O. Memristors on ‘edge of chaos’ [J]. *Nature Reviews Electrical Engineering*, 2024, 1(9): 614-627.

(责任编辑:胡 丁)