DOI: 10.3969/j.issn.2097-583X.2026.01.013　　**文章编号：** 2097-583X(2026)01-0094-07

一类(ρ, k, φ)-比例 Hilfer 分数阶演化方程温和解的存在性

王海华[1*]，封全喜[2]，赵　婕[1]

(1. 琼台师范学院 理学院， 海口 海南 570100；2. 桂林理工大学 数学与统计学院， 桂林 广西 541006)

摘　要： 在最新引入的(ρ, k, φ)-比例分数阶算子基础上，研究了一类(ρ, k, φ)-比例 Hilfer 分数阶 Cauchy 问题温和解的存在唯一性和解的连续依赖性。利用概率密度函数、(ρ, k, φ)-比例 Hilfer 分数阶导数的性质和半群理论，得到了温和解的定义。通过构造合适的加权空间，根据 Banach 压缩映射原理，研究了解的存在唯一性。构造广义 Gronwall 不等式，得到了解的连续依赖性。

关键词： 分数阶导数；存在性；温和解；连续依赖

中图分类号： O175　　**文献标志码：** A　　**开放科学(资源服务)标识码(OSID)：**

Existence of mild solutions for a class of (ρ, k, φ)-proportional Hilfer fractional evolution equation

WANG Haihua[1*], FENG Quanxi[2], ZHAO Jie[1]

(1. School of Science, Qiongtai Normal University, Haikou 570100, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Guilin University of Technology, Guilin 541006, China)

Abstract: The existence, uniqueness and continuous dependence of solutions for a class of (ρ, k, φ)-proportional Hilfer fractional Cauchy problems were investigated. The probability density function, properties of the (ρ, k, φ)-proportional Hilfer fractional derivative and semigroup theory were utilized to define mild solutions. A proper weighted space was introduced, and within this space, the Banach contraction principle was applied to discuss the uniqueness of the solutions. The continuous dependence of the data on the Cauchy problem was proven by constructing a generalized Gronwall inequality.

Key words: fractional derivative; existence; mild solutions; continuous dependence

0　引言

近年来，分数阶微分方程的研究吸引了越来越多学者的注意，因为它比整数阶微分方程在物理、医学及其他领域的应用更为广泛[1-4]。从最初的 Caputo 型、Riemann-Liouville 型分数阶导数开始，大量分数阶微分方程的研究都基于这两类导数，特别是前者。2000 年，HILFER[5]引入了 Hilfer 分数阶导数，Hilfer 分数阶导数统一了 Caputo 和 Riemann-Liouville 这两类导数，并且 Hilfer 分数阶导数自身的性质使得它在现实模型中的应用较之前的分数阶导数更具有应用性，如电子电路模型[6]。2018 年，VANTERLER 等[7]提出的ψ-Hilfer 分数阶导数不仅统一了 Caputo、Riemann-Liouville 和 Hilfer 导数，而且研究人员可以根据问题的需要，选择合适的单调核函数ψ。尽管从莱布尼茨提

收稿日期： 2024-08-12；**修回日期：** 2024-12-26；*. **通信联系人，** E-mail：wanghoiwan@163.com

基金项目： 国家自然科学基金项目(62166015)；海南省自然科学基金项目(122MS088)

作者简介： 王海华(1981—)，男，湖南娄底人，副教授，博士，主要从事微分方程研究。

引用格式： 王海华，封全喜，赵婕．一类(ρ, k, φ)-比例 Hilfer 分数阶演化方程温和解的存在性[J]．信阳师范大学学报(自然科学版)，2026，39(1)：94-100.

WANG Haihua, FENG Quanxi, ZHAO Jie. Existence of mild solutions for a class of (ρ, k, φ)-proportional Hilfer fractional evolution equation[J].Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2026, 39(1):94-100.

出分数阶导数的问题,直到ψ-Hilfer分数阶导数的出现,分数阶微积分理论及应用似乎已经很完美了,但是这些分数阶导数的定义都依赖于伽马函数$\Gamma(\cdot)$。2007年,DÍAZ等[8]给出了广义伽马函数$\Gamma_k(\cdot)$,这为分数阶导数的进一步发展提供了空间。在广义伽马函数的基础上,2021年,KUCCHE等[9]给出了(k,ψ)-Hilfer分数阶导数,它包含ψ-Hilfer、k-Hilfer-Hadamard、(k,ψ)-Caputo、(k,ψ)-Riemann-Liouville等分数阶导数。2017年,JARAD等[10]在ANDERSON比例分数阶导数[11]的基础上,考虑特殊比例,给出了广义比例分数阶GPF积分和GPF导数的定义,它的好处是可以选择合适的比例常数$\rho\in(0,1]$来研究问题。

分数阶演化方程[12]的研究比分数阶微分方程更具有一般性,如何得到由无穷小生成元A产生的合适预解族,是研究分数阶演化方程的关键。基于(k,ψ)-Hilfer和GPF分数阶导数的定义,文献[13]首次给出了(ρ,k,φ)-比例Hilfer分数阶导数的定义,并且给出了比(α,β)-预解族更具一般性的(α,β,ρ)-预解族,利用$\{S_{\alpha,\beta,\rho}(t)\}_{t\geqslant 0}$的性质,对一类$(\rho,k,\varphi)$-比例Hilfer分数阶Cauchy问题温和解的存在性进行了研究。

本文将不以预解族为切入点,而是利用概率密度函数[14]和半群理论[15],得到(ρ,k,φ)-比例Hilfer分数阶Cauchy问题温和解的另一种表示,通过定义合适的加权范数空间,在没有C_0半群紧性的条件下,利用压缩映射原理得到解的存在唯一性,利用广义Gronwall不等式,对解的连续依赖性进行研究。

1　(ρ,k,φ)-比例积分和(ρ,k,φ)-比例Hilfer导数的定义

为方便起见,设函数$\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$\varphi'(t)>0$。记

$$g_{a,\rho,k,\eta;\varphi}(t)=\begin{cases}0,\ t\leqslant a,\\ \hat{g}_{\rho,k,\eta;\varphi}(t,a),\ t>a,\end{cases}$$

式中:

$$\hat{g}_{\rho,k,\eta;\varphi}(t,s)=\frac{g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)}{\rho^{\frac{\eta}{k}}k\Gamma_k(\eta)}\mathrm{e}^{\frac{(\rho-1)g(t,s)}{\rho k}},$$

$g(t,s)=\varphi(t)-\varphi(s),(\rho,k,\eta>0)$。

广义伽马函数$\Gamma_k(\cdot)$定义为

$$\Gamma_k(z)=\int_0^{+\infty}s^{z-1}\mathrm{e}^{-\frac{s^k}{k}}\mathrm{d}s,\mathrm{Re}(z)>0。$$

首先给出广义卷积和广义Laplace变换的定义。

定义1[16]　若$f,h:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$是两个函数,则其广义卷积定义为

$$(f*_{\varphi}h)(t)=\int_a^t f(s)h(\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varphi(s)+\varphi(a)))\mathrm{d}s。$$

定义2[17]　设$r,k>0$,$h:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$,$(k,\varphi)$-Laplace变换定义为

$$L_{k,a}^{r;\varphi}(h(t))(\lambda)=\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda k^{1-\frac{r}{k}}g(t,a)}h(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t。$$

下面给出(ρ,k,φ)-比例分数阶积分和Hilfer分数阶算子的定义。

定义3[13]　设$\rho\in(0,1]$,$k>0$,一阶左(ρ,k,φ)-比例导数${}^kD^{1,\rho;\varphi}h$定义为

$${}^kD^{1,\rho;\varphi}h=\rho\delta_{k,\delta}^1h(t)+(1-\rho)h(t),$$

式中:$\delta_{k,\delta}^1=\dfrac{k}{\varphi'(t)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$。

注意到方程

$${}^kD^{1,\rho;\varphi}\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(t,a)}f(t)=h(t)$$

在区间$t\geqslant a$上的解为

$$f(t)=\int_a^t\hat{g}_{\rho,k,k;\varphi}(t,s)h(s)\mathrm{d}s,$$

因此很自然地引入如下定义:

定义4[13]　设$\rho\in(0,1]$,$k>0$,$\eta>0$,函数h在$[a,b]$上可积,η阶左(ρ,k,φ)-比例积分定义为

$${}^kI_{a+}^{\eta,\rho;\varphi}h(t)=\int_a^t\hat{g}_{\rho,k,\eta;\varphi}(t,s)h(s)\varphi'(s)\mathrm{d}s。$$

定义5[13]　设$\rho\in(0,1]$,$v\in[0,1]$,$k>0$,$m=[\eta/k]+1$,函数h在$[a,b]$上m次连续可导,则

$${}^{k,H}D_{a+}^{\eta,\rho,v;\varphi}h={}^kI_{a+}^{v(mk-\eta),\rho;\varphi}D^{m,\rho;\varphi}\,{}^kI_{a+}^{(1-v)(mk-\eta),\rho;\varphi}h(t),$$

称为函数h的左(ρ,k,φ)-比例Hilfer导数。

设$p\geqslant 1$,记

$$Q_{\rho,k,\varphi}(t,a)=\mathrm{e}^{\frac{-(\rho-1)g(t,a)}{\rho k}},$$

考虑如下空间

$$L_{\rho,k,\varphi}^p[a,b]=\{x(t):(a,b]\to\mathbf{R}:\varphi'(t)\left|Q_{\rho,k,\varphi}(t,a)x(t)\right|^p\in L[a,b]\},$$

则$L_{\rho,k,\varphi}^p[a,b]$在范数

$$\|x\|_{L_{\rho,k,\varphi}^p}=\left(\int_a^b\varphi'(t)\left|Q_{\rho,k,\varphi}(t,a)x(t)\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

下为Banach空间。

引理1[18]　设$\eta>0$,$h\in L_{\rho,k,\varphi}^p[a,b]$,当$\lambda>$

$(\rho-1)/\rho k^{2-\frac{r}{k}}$时,

$$L_{k,a}^{r;\varphi}({}^{k}I_{a+}^{\eta,\rho;\varphi}h(t))(\lambda)=(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{-\frac{\eta}{k}}L_{k,a}^{r;\varphi}(h(t))(\lambda)。$$

引理 2[18]　设$\eta>0, m=[\eta/k]+1, h\in L_{\rho,k,\varphi}^{p}[a,b]$且${}^{k}I_{a+}^{(1-v)(mk-\eta),\rho;\varphi}h\in AC^{m}[a,b]$,则

$$L_{k,a}^{r;\varphi}({}^{k,H}D_{a+}^{\eta,\rho,v;\varphi}h(t))(\lambda)=(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{\eta}{k}}L_{k,a}^{r;\varphi}(h(t))(\lambda)-\rho k\sum_{i=0}^{m-1}(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{m-i-1+\frac{v(\eta-mk)}{k}}\times[{}^{k}D^{i,\rho;\varphi}\,{}^{k}I_{a+}^{(1-v)(mk-\eta)}h(t)]_{t=a}。$$

2　温和解的定义

本节将给出如下(ρ,k,φ)-比例 Hilfer 分数阶 Cauchy 问题

$$\begin{cases}{}^{k,H}D_{0+}^{\eta,\rho,v;\varphi}x(t)=Ax(t)+f(t,x(t)),\ t\in(0,b],\\({}^{k}I_{0+}^{(1-v)(k-\eta),\rho;\varphi}x(t))_{t=0}=x_0\end{cases}\tag{1}$$

温和解的定义,其中$\eta\in(0,k]$;$A:D(A)\to X$为C_0半群$\{T(t):t\geqslant0\}$的无穷小生成元;$f:(0,b]\times X\to X$,X为范数$\|\cdot\|$下的Banach空间。记

$$\gamma=(1-v)(k-\eta)/k,$$

$$Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(t,a)=Q_{\rho,k,\varphi}(t,a)g^{\gamma}(t,a),$$

$$E=\{x\in C((0,b],X):Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(t,0)x(t)\in C([0,b],X)\},$$

则空间E在范数

$$\|x\|_E=\max_{t\in[0,b]}\|Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(t,0)x(t)\|$$

下成为Banach空间。假设

$$M:=\sup_{[0,+\infty)}\|T(t)\|<+\infty。$$

记单侧稳定k-概率密度函数为

$$\psi_{k,q}(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\cdot\frac{\Gamma_k(knq+k)}{n!k^{qn}\pi}\sin(n\pi q),$$

式中:$k,\theta>0$。对$0<q<1$,有

$$\int_0^{+\infty}e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)\theta}\psi_{k,q}(\theta)d\theta=e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{q}}。\tag{2}$$

引理 3　问题(1)有满足如下积分方程

$$x(t)=\rho\,{}^{k}I_{0+}^{v(k-\eta),\rho;\varphi}T_1(t,0)x_0+\frac{1}{k}\int_0^t\varphi'(s)T_1(t,s)f(s,x(s))ds\tag{3}$$

的解,式中:

$$T_1(t,s)x=\eta(\rho k)^{-\frac{\eta}{k}}g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)e^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(t,s)}\times\int_0^{+\infty}h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)T([\frac{g(t,s)}{\rho k}]^{\frac{\eta}{k}}\theta)\theta d\theta x,$$

$$h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)=\frac{k}{\eta}\theta^{-\frac{k}{\eta}-1}\psi_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta^{-\frac{k}{\eta}})。$$

证明　对问题(1)第一个方程两边应用(k,φ)-Laplace变换,结合引理2与半群的表示,有

$$\begin{aligned}L_{k,0}^{r;\varphi}(x(t))(\lambda)=&\rho k(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{v(\eta-k)}{k}}\times[(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{\eta}{k}}I-A]^{-1}x_0+\\&[(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{\eta}{k}}I-A]^{-1}L_{k,0}^{r;\varphi}(f(t,x(t)))(\lambda)=\\&\rho k(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{v(\eta-k)}{k}}\times\int_0^{+\infty}e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{\eta}{k}}s}T(s)dsx_0+\\&\int_0^{+\infty}e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{\eta}{k}}s}T(s)ds\cdot L_{k,0}^{r;\varphi}(f(t,x(t)))(\lambda)=:I_1+I_2。\end{aligned}\tag{4}$$

对于I_1中的积分项,利用式(2)和积分变量代换,可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{\eta}{k}}s}T(s)ds=\\&\frac{\eta}{k}\int_0^{+\infty}e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{\eta}{k}}t^{\frac{\eta}{k}}}T(t^{\frac{\eta}{k}})t^{\frac{\eta}{k}-1}dt=\\&\frac{\eta}{k}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)t\theta}\psi_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)T(t^{\frac{\eta}{k}})t^{\frac{\eta}{k}-1}d\theta dt=\\&\frac{\eta}{k}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda k^{1-\frac{r}{k}}\rho kt\theta}e^{-(1-\rho)t\theta}\psi_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)T(t^{\frac{\eta}{k}})t^{\frac{\eta}{k}-1}d\theta dt=\\&\frac{\eta}{k}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda k^{1-\frac{r}{k}}g(\tau,0)}\varphi'(\tau)\int_0^{+\infty}e^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(\tau,0)}\psi_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)\times\\&T([\frac{g(\tau,0)}{\rho k\theta}]^{\frac{\eta}{k}})(\frac{g(\tau,0)}{\rho k\theta})^{\frac{\eta}{k}-1}\frac{1}{\rho k\theta}d\theta d\tau,\end{aligned}\tag{5}$$

对于I_2,有

$$\begin{aligned}I_2=&\int_0^{+\infty}e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{\eta}{k}}s}T(s)ds\cdot L_{k,0}^{r;\varphi}(f(t,x(t)))(\lambda)=\\&\int_0^{+\infty}e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{\eta}{k}}s}T(s)\cdot\int_0^{+\infty}e^{-\lambda k^{1-\frac{r}{k}}g(w,0)}\varphi'(w)\cdot f(w,x(w))dwds=\\&\frac{\eta}{k}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)^{\frac{\eta}{k}}u^{\frac{\eta}{k}}}T(u^{\frac{\eta}{k}})\cdot\int_0^{+\infty}e^{-\lambda k^{1-\frac{r}{k}}g(w,0)}\varphi'(w)f(w,x(w))dwu^{\frac{\eta}{k}-1}du=\\&\frac{\eta}{k}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)u\theta}\psi_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)d\theta T(u^{\frac{\eta}{k}})\times e^{-\lambda k^{1-\frac{r}{k}}g(w,0)}\varphi'(w)f(w,x(w))dwu^{\frac{\eta}{k}-1}du=\\&\frac{\eta}{k}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(\rho k^{2-\frac{r}{k}}\lambda+1-\rho)g(\sigma,0)\theta}\psi_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)d\theta\times T(g^{\frac{\eta}{k}}(\sigma,0))e^{-\lambda k^{1-\frac{r}{k}}g(w,0)}\varphi'(w)f(w,x(w))dw\times\\&g^{\frac{\eta}{k}-1}(\sigma,0)\varphi'(\sigma)d\sigma=\end{aligned}$$

$$\frac{\eta}{k}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda k^{1-\frac{r}{k}}g(\delta,0)}\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(\delta,0)}\psi_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)\mathrm{d}\theta\times$$
$$T([\frac{g(\delta,0)}{\rho k\theta}]^{\frac{\eta}{k}})\mathrm{e}^{-\lambda k^{1-\frac{r}{k}}g(w,0)}\varphi'(w)f(w,x(w))\mathrm{d}w\times$$
$$[\frac{g(\delta,0)}{\rho k\theta}]^{\frac{\eta}{k}-1}\frac{\varphi'(\delta)}{\rho k\theta}\mathrm{d}\delta=$$
$$\frac{\eta}{k}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda k^{1-\frac{r}{k}}[g(\delta,0)+g(w,0)]}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(\delta,0)}\psi_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)\times$$
$$T([\frac{g(\delta,0)}{\rho k\theta}]^{\frac{\eta}{k}})\varphi'(w)f(w,x(w))\mathrm{d}w\times$$
$$[\frac{g(\delta,0)}{\rho k\theta}]^{\frac{\eta}{k}-1}\frac{\varphi'(\delta)}{\rho k\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\delta=$$
$$\frac{\eta}{k}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda k^{1-\frac{r}{k}}g(\tau,0)}\varphi'(\tau)\int_0^{+\infty}\int_0^{\tau}\mathrm{e}^{\frac{(\rho-1)g(\tau,w)}{\rho k}}\psi_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)\times$$
$$T([\frac{g(\tau,w)}{\rho k\theta}]^{\frac{\eta}{k}})f(w,x(w))[\frac{g(\tau,w)}{\rho k\theta}]^{\frac{\eta}{k}-1}\times$$
$$\frac{\varphi'(w)}{\rho k\theta}\mathrm{d}w\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau。\qquad(6)$$

利用引理1,综合式(4)—式(6),化简可得

$$L_{k,0}^{r;\varphi}(x(t))(\lambda)=L_{k,0}^{r;\varphi}(g_{0,\rho,k,v(k-\eta);\varphi}(t))(\lambda)\times$$
$$L_{k,0}^{r;\varphi}(\rho\eta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(\tau,0)}h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)T([\frac{g(\tau,0)}{\rho k}\theta]^{\frac{\eta}{k}})\times$$
$$\frac{g^{\frac{\eta}{k}-1}(\tau,0)}{(\rho k)^{\frac{\eta}{k}}}\theta\mathrm{d}\theta)(\lambda)x_0+\frac{\eta}{k}L_{k,0}^{r;\varphi}(\int_0^{+\infty}\int_0^{\tau}\mathrm{e}^{\frac{(\rho-1)g(\tau,w)}{\rho k}}\times$$
$$h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)T([\frac{g(\tau,w)}{\rho k}]^{\frac{\eta}{k}}\theta)f(w,x(w))\times$$
$$\frac{g^{\frac{\eta}{k}-1}(\tau,w)}{(\rho k)^{\frac{\eta}{k}}}\theta\mathrm{d}w\mathrm{d}\theta,$$

由(k,φ)-Laplace逆变换,可知$x(t)$满足式(3)。证毕。

定义6　若$x(t)$满足式(3),则称$x(t)$为问题(1)的温和解。

3　解的存在性及连续依赖性

引理4　(1)对于$0\leqslant s\leqslant t$, T_1为$X\to E$中线性算子,${}^kI_{0+}^{v(k-\eta),\rho;\varphi}T_1(t,0)$为$X\to E$中线性有界算子,且

$$\|{}^kI_{0+}^{v(k-\eta),\rho;\varphi}T_1(t,0)x\|_E\leqslant\Lambda_1\|x\|,$$

式中:

$$\Lambda_1=\frac{M}{\rho^{\frac{v(k-\eta)+\eta}{k}}\Gamma_k(v(k-\eta)+\eta)};$$

(2) 当$0\leqslant s\leqslant t$时,

$$\int_0^{+\infty}h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)T([\frac{g(t,s)}{\rho k}]^{\frac{\eta}{k}}\theta)\theta\mathrm{d}\theta$$

为X中强连续算子。

证明　(1) 对于$x\in X$,由定义1,有

$$\|T_1(t,s)x\|\leqslant\eta M\frac{1}{(\rho k)^{\frac{\eta}{k}}}g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)\times$$
$$\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(t,s)}\int_0^{+\infty}h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)\theta\mathrm{d}\theta\|x\|=$$
$$\Lambda_2g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(t,s)}\|x\|,$$
$$\|{}^kI_{0+}^{v(k-\eta),\rho;\varphi}T_1(t,0)x\|_E\leqslant$$
$$Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(t,0)\times$$
$$\frac{\eta M\int_0^t g^{\frac{v(k-\eta)}{k}-1}(t,s)\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(t,0)}\varphi'(s)g^{\frac{\eta}{k}-1}(s,0)\mathrm{d}s}{\rho^{\frac{v(k-\eta)+\eta}{k}}k^{1+\frac{\eta}{k}}\Gamma_k(v(k-\eta))\Gamma(1+\eta/k)}\|x\|=$$
$$\Lambda_1\|x\|,$$

式中:

$$\Lambda_2=\eta M\frac{1}{(\rho k)^{\frac{\eta}{k}}\Gamma(1+\eta/k)}。$$

(2)对于$0\leqslant s\leqslant t$, $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant b$,有

$$\left\|\int_0^{+\infty}h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)\{T([\frac{g(t_2,s)}{\rho k}]^{\frac{\eta}{k}}\theta)-\right.$$
$$\left.T([\frac{g(t_1,s)}{\rho k}]^{\frac{\eta}{k}}\theta)\}\theta x\mathrm{d}\theta\right\|\leqslant$$
$$M\int_0^{+\infty}\theta h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)\times\left\|\{T([\frac{g(t_2,s)}{\rho k}]^{\frac{\eta}{k}}\theta-\right.$$
$$\left.[\frac{g(t_1,s)}{\rho k}]^{\frac{\eta}{k}}\theta)-I\}x\right\|\mathrm{d}\theta。$$

根据算子$T(t)$的强连续性,可知

$$\int_0^{+\infty}h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)T([\frac{g(t,s)}{\rho k}]^{\frac{\eta}{k}}\theta)\theta\mathrm{d}\theta$$

为X中强连续算子。证毕。

为了讨论解的连续依赖性,需要如下广义Gronwall不等式。下面引理5是文献[19]中定理3的推广。

引理5　设$u,v\in L([a,b],\mathbf{R}^+)$, $h\in C([a,b],\mathbf{R}^+)$单调不减,$k\gamma<\eta$,当$t\in[a,b]$时,有

$$u(t)\leqslant v(t)+h(t)\times$$
$$\int_a^t g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,\tau)g^{-\gamma}(\tau,a)\varphi'(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad(7)$$

则

$$u(t)\leqslant v(t)+$$
$$\int_a^t\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h^n(t)\Gamma(\eta/k)\Gamma^n(\eta/k-\gamma)}{\Gamma(n\eta/k-(n-1)\gamma)}\times$$
$$g^{\frac{n\eta}{k}-(n-1)\gamma-1}(t,\tau)g^{-\gamma}(\tau,a)\varphi'(\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau。$$

证明　令

$$Au(t)=h(t)\int_a^t g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,\tau)\cdot g^{-\gamma}(\tau,a)\varphi'(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则式(7)可写为

$$u(t)\leqslant v(t)+Au(t),$$

依次迭代下去,可知

$$u(t)\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}A^i v(t)+A^n u(t)。\tag{8}$$

由 h 的单调性及交换累次积分顺序,可得不等式

$$\begin{aligned}A^2u(t)=&h(t)\int_a^t g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)g^{-\gamma}(s,a)\varphi'(s)u(s)h(s)\times\\&\int_a^s g^{\frac{\eta}{k}-1}(s,\tau)g^{-\gamma}(\tau,a)\varphi'(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\\&h^2(t)\int_a^t g^{-\gamma}(\tau,a)\varphi'(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\times\\&\int_\tau^t g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)g^{\frac{\eta}{k}-1}(s,\tau)g^{-\gamma}(s,a)\varphi'(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&h^2(t)\int_a^t g^{-\gamma}(\tau,a)\varphi'(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\times\\&\int_\tau^t g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)g^{\frac{\eta}{k}-\gamma-1}(s,\tau)\varphi'(s)\mathrm{d}s=\\&h^2(t)B(\frac{\eta}{k},\frac{\eta}{k}-\gamma)\times\\&\int_a^t g^{\frac{2\eta}{k}-\gamma-1}(t,\tau)g^{-\gamma}(\tau,a)\varphi'(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau。\end{aligned}$$

由数学归纳法易知,当 $n\to\infty$ 时,有

$$\begin{aligned}A^nu(t)\leqslant&\frac{h^n(t)\Gamma(\eta/k)\Gamma^n(\eta/k-\gamma)}{\Gamma(n\eta/k-(n-1)\gamma)}\times\\&\int_a^t g^{\frac{n\eta}{k}-(n-1)\gamma-1}(t,\tau)g^{-\gamma}(\tau,a)\varphi'(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\to0。\end{aligned}$$

最后,在式(8)两边令 $n\to\infty$,有

$$\begin{aligned}u(t)\leqslant&\sum_{i=0}^{\infty}A^iv(t)\leqslant\\&v(t)+\int_a^t\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h^n(t)\Gamma(\eta/k)\Gamma^n(\eta/k-\gamma)}{\Gamma(n\eta/k-(n-1)\gamma)}\times\\&g^{\frac{n\eta}{k}-(n-1)\gamma-1}(t,\tau)g^{-\gamma}(\tau,a)\varphi'(\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau。\end{aligned}$$

证毕。

定理 1　设

(H1) 对几乎所有的 $t\in(0,b]$, $f(t,\cdot)\in C(X,X)$,对任何 $x\in X$, $f(\cdot,x):(0,b]\to E$ 强可测;

(H2) 存在正数 $L>0$,满足

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant L\|x-y\|,$$

$t\in(0,b]$;$x,y\in X$,且 $f(t,0)$ 在 E 中有界,若

$$\Lambda_2Lg^{\frac{\eta}{k}}(b,0)B(\frac{\eta}{k},1-\gamma)<k,$$

则问题(1)有唯一的温和解。

证明　取 $r>0$ 满足

$$\begin{aligned}k\rho\Lambda_1\|x_0\|+\Lambda_2g^{\frac{\eta}{k}}(b,0)B(\frac{\eta}{k},1-\gamma)\times\\ [Lr+\sup_{s\in[0,b]}\|f(s,0)\|_E]\leqslant kr。\end{aligned}$$

首先考虑算子 $F:E_r\to X$,其中 $E_r=\{x\in E:\|x\|_E\leqslant r\}$,

$$\begin{aligned}(Fx)(t)=&\rho\ {}^kI_{0+}^{v(k-\eta),\rho;\varphi}T_1(t,0)x_0+\\&\frac{1}{k}\int_0^t\varphi'(s)T_1(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s。\end{aligned}$$

由定义 4 和引理 4 易知,$Q_{\rho,k,\varphi;\gamma}(t,0)Fx(t)\in C([0,b],E)$。因为

$$\begin{aligned}\|Fx\|_E\leqslant&\rho\Lambda_1\|x_0\|+\frac{1}{k}Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(t,0)\int_0^t\varphi'(s)\|T_1(t,s)\|\times\\&[\|f(s,x(s))-f(s,0)\|+\|f(s,0)\|]\mathrm{d}s\leqslant\\&\rho\Lambda_1\|x_0\|+\frac{1}{k}Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(t,0)\Lambda_2\int_0^t\varphi'(s)g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)\times\\&\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(t,s)}[L\|x(s)\|+\|f(s,0)\|]\mathrm{d}s\leqslant\\&\rho\Lambda_1\|x_0\|+\frac{1}{k}\Lambda_2g^{\gamma}(t,0)\int_0^t\varphi'(s)g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)\times\\&g^{-\gamma}(s,0)[L\|x\|_E+\|f(s,0)\|_E]\mathrm{d}s\leqslant\\&\rho\Lambda_1\|x_0\|+\frac{1}{k}\Lambda_2g^{\frac{\eta}{k}}(b,0)B(\frac{\eta}{k},1-\gamma)\times\\&[L\|x\|_E+\sup_{s\in[0,b]}\|f(s,0)\|_E],\end{aligned}$$

从而 $\|Fx\|_E\leqslant r$,即 F 为 E_r 中的自映射。

另一方面,对任意的 $x,y\in E_r$, $t\in[0,b]$,

$$\begin{aligned}\|Fx-Fy\|_E\leqslant&\frac{1}{k}Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(t,0)\int_0^t\varphi'(s)\|T_1(t,s)\|\times\\&\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{1}{k}\Lambda_2g^{\gamma}(t,0)\int_0^t\varphi'(s)g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)g^{-\gamma}(s,0)\mathrm{d}s\times\\&L\|x-y\|_E\leqslant\\&\frac{1}{k}\Lambda_2Lg^{\frac{\eta}{k}}(b,0)B(\frac{\eta}{k},1-\gamma)\|x-y\|_E,\end{aligned}$$

即 F 为 E_r 中的压缩映射,从而 F 有唯一的不动点 $x\in E_r$,也即 x 为问题(1)的温和解。证毕。

定理 2　设 $0<\eta-\hat{\eta}<\eta\leqslant k$, $k\gamma<\eta$, $f:(0,b]\times E\to E$, $x(t)$ 为问题(1)的温和解,$\hat{x}(t)$ 为如下问题

$$\begin{cases}{}^{k,H}D_{0+}^{\eta-\hat{\eta},\rho,v;\varphi}\hat{x}(t)=\\\qquad Ax(t)+f(t,\hat{x}(t)),t\in(0,b],\\({}^kI_{0+}^{(1-v)(k-\eta+\hat{\eta}),\rho;\varphi}\hat{x}(t))_{t=0}=\hat{x}_0\end{cases}\tag{9}$$

的温和解,则

$$\begin{aligned}&Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(t,0)\|x(t)-\hat{x}(t)\|\leqslant\Lambda_3(t)+\\&\int_0^t\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{M\eta}{k}\frac{\Lambda}{(\rho k)^{\frac{\eta-\hat{\eta}}{k}}}\frac{1}{\Gamma(1+\eta/k)})^n\times\\&\frac{\Gamma(\eta/k)\Gamma^n(\eta/k-\gamma)}{\Gamma(n\eta/k-(n-1)\gamma)}\times\\&g^{\frac{n\eta}{k}-(n-1)\gamma-1}(t,\tau)g^{-\gamma}(\tau,a)\varphi'(\tau)\Lambda_3(\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

式中:

$$\Lambda_3(t)=Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(t,0)\|\rho\,{}^kI_{0+}^{v(k-\eta),\rho;\varphi}T_1(t,0)x_0-\rho\,{}^kI_{0+}^{v(k-\eta+\hat\eta),\rho;\varphi}\hat T_1(t,0)\hat x_0\|+\frac{M\eta}{k}\Big[\frac{1}{(\rho k)^{\frac{\eta}{k}}}+2\frac{1}{(\rho k)^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}}}\Big]g^{\frac{\eta}{k}}(t,0)B\Big(\frac{\eta}{k},1-\gamma\Big)\times\frac{1}{\Gamma(1+\eta/k)}\|f\|_E+\frac{M(\eta-\hat\eta)}{k}\frac{1}{(\rho k)^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}}}g^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}}(t,0)B\Big(\frac{\eta-\hat\eta}{k},1-\gamma\Big)\times\frac{1}{\Gamma(1+(\eta-\hat\eta/)/k)}\|f\|_E。$$

证明　类似引理3,问题(9)的温和解为

$$\hat x(t)=\rho\,{}^kI_{0+}^{v(k-\eta+\hat\eta),\rho;\varphi}\hat T_1(t,0)\hat x_0+\frac{1}{k}\int_0^t\varphi'(s)\hat T_1(t,s)f(s,\hat x(s))\mathrm{d}s,$$

式中:

$$\hat T_1(t,s)x=\frac{\eta-\hat\eta}{(\rho k)^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}}}g^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}-1}(t,s)\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(t,s)}\times\int_0^{+\infty}h_{k,\frac{\eta-\hat\eta}{k}}(\theta)T\Big(\Big[\frac{g(t,s)}{\rho k}\Big]^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}}\theta\Big)\theta\mathrm{d}\theta x。$$

由三角不等式,可知

$$\|x(t)-\hat x(t)\|\leqslant\|\rho\,{}^kI_{0+}^{v(k-\eta),\rho;\varphi}T_1(t,0)x_0-\rho\,{}^kI_{0+}^{v(k-\eta+\hat\eta),\rho;\varphi}\hat T_1(t,0)\hat x_0\|+\frac{\eta}{k}\Big|\frac{1}{(\rho k)^{\frac{\eta}{k}}}-\frac{1}{(\rho k)^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}}}\Big|\int_0^t g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(t,s)}\varphi'(s)\times\int_0^{+\infty}h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)\Big\|T\Big(\Big[\frac{g(t,s)}{\rho k}\Big]^{\frac{\eta}{k}}\theta\Big)\Big\|\theta\mathrm{d}\theta\times\|f(s,x(s))\|\mathrm{d}s+\frac{\eta}{k}\frac{1}{(\rho k)^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}}}\int_0^t g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(t,s)}\varphi'(s)\int_0^{+\infty}h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)\times\Big\|T\Big(\Big[\frac{g(t,s)}{\rho k}\Big]^{\frac{\eta}{k}}\theta\Big)\Big\|\theta\mathrm{d}\theta\|f(s,x(s))-f(s,\hat x(s))\|\mathrm{d}s+\frac{1}{(\rho k)^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}}}\int_0^t\mathrm{e}^{\frac{\rho-1}{\rho k}g(t,s)}\varphi'(s)\int_0^{+\infty}\Big\|\frac{\eta}{k}g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)h_{k,\frac{\eta}{k}}(\theta)\times T\Big(\Big[\frac{g(t,s)}{\rho k}\Big]^{\frac{\eta}{k}}\theta\Big)-\frac{\eta-\hat\eta}{k}g^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}-1}(t,s)h_{k,\frac{\eta-\hat\eta}{k}}(\theta)\times T\Big(\Big[\frac{g(t,s)}{\rho k}\Big]^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}}\theta\Big)\Big\|\theta\mathrm{d}\theta\|f(s,\hat x(s))\|\mathrm{d}s,$$

进一步地,有

$$Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(t,0)\|x(t)-\hat x(t)\|\leqslant\Lambda_3(t)+\frac{M\eta}{k}\frac{\Lambda}{(\rho k)^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}}}\frac{1}{\Gamma(1+\eta/k)}\times\int_0^t g^{\frac{\eta}{k}-1}(t,s)g^{-\gamma}(s,0)\varphi'(s)\times Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(s,0)\|x(s)-\hat x(s)\|\mathrm{d}s,$$

由引理5,有

$$Q_{\rho,k,\varphi,\gamma}(t,0)\|x(t)-\hat x(t)\|\leqslant\Lambda_3(t)+\int_0^t\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{M\eta}{k}\frac{\Lambda}{(\rho k)^{\frac{\eta-\hat\eta}{k}}}\frac{1}{\Gamma(1+\eta/k)}\Big)^n\times\frac{\Gamma(\eta/k)\Gamma^n(\eta/k-\gamma)}{\Gamma(n\eta/k-(n-1)\gamma)}\times g^{\frac{n\eta}{k}-(n-1)\gamma-1}(t,\tau)g^{-\gamma}(\tau,a)\varphi'(\tau)\Lambda_3(\tau)\mathrm{d}\tau。$$

证毕。

4　结束语

文献[13]引入了一类(ρ,k,φ)-Hilfer分数阶导数,此类分数阶导数包含了许多著名的分数阶导数。在此类导数的基础上,本文研究了一类(ρ,k,φ)-Hilfer分数阶Cauchy问题,利用概率密度函数和广义拉普拉斯变换,得到了Cauchy问题温和解的正确表示形式,纠正了某些文献中关于分数阶Cauchy问题温和解的错误表示。通过Banach压缩映射原理,考虑了解的存在唯一性,也建立了更一般的广义Gronwall不等式,并利用它对解的连续依赖性进行了研究。所得结果可为(ρ,k,φ)-分数阶微积分的相关研究提供理论依据。

若C_0半群$\{T(t):t\geqslant0\}$具有紧性,则可利用其他不动点定理(如Krasnoselskii不动点定理、Schauder不动点定理)得到解的存在性,结合广义Gronwall不等式,在适当条件下,可得到解的唯一性。本文只考虑了非线性项f映入空间X中,还可进一步考虑f映入X的子空间X_β中,其中$X_\beta=D(A^\beta)$,$0<\beta<1$。

参考文献:

[1] 高云飞,牛洁楠. 服从分数阶Zener模型黏弹性体的力学特性研究[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版),2019,32(2):191-195.
GAO Yunfei, NIU Jienan. Study on mechanical properties of viscoelastic body subjected to fractional Zener model[J]. Journal of Xinyang Normal University(Natural Science Edition), 2019, 32(2): 191-195.

[2] 周学勇,路振国,程晓明. 一类分数阶计算机病毒模型的稳定性分析[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版),2022,35(3):345-350.

ZHOU Xueyong, LU Zhenguo, CHENG Xiaoming. Stability analysis of a fractional order computer virus model[J]. Journal of Xinyang Normal University(Natural Science Edition), 2022, 35(3): 345-350.

[3] BENCHOHRA M, KARAPINAR E, LAZREG J E, et al. Advanced topics in fractional differential equations[M]. Cham: Springer, 2023.

[4] 黄承代，汪华南，刘恒．分数阶时滞金融混沌系统的完全同步[J]．信阳师范大学学报(自然科学版)，2025，38(1)：87-91.

HUANG Chengdai, WANG Huanan, LIU Heng. Complete synchronization of time delayed fractional-order chaotic financial system[J]. Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2025, 38(1): 87-91.

[5] HILFER R. Applications of fractional calculus in physics[M]. Hackensack: World Scientific, 2000.

[6] SATHIYARAJ T, WANG Jinrong, BALASUBRAMANIAM P. Ulam's stability of Hilfer fractional stochastic differential systems[J]. The European Physical Journal Plus, 2019, 134(12): 605.

[7] VANTERLER DA C SOUSA J, CAPELAS DE OLIVEIRA E. On the ψ-Hilfer fractional derivative [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 60: 72-91.

[8] DÍAZ R, PARIGUAN E. On hypergeometric functions and Pochhammer k-symbol[J]. Divulgaciones Matemáticas, 2007, 15(2): 179-192.

[9] KUCCHE K D, MALI A D. On the nonlinear (k,Ψ)-Hilfer fractional differential equations[J]. Chaos, Solitons, and Fractals, 2021, 152: 111335.

[10] JARAD F, ABDELJAWAD T, ALZABUT J. Generalized fractional derivatives generated by a class of local proportional derivatives[J]. The European Physical Journal Special Topics, 2017, 226(16): 3457-3471.

[11] ANDERSON D R, ULNESS D J. Newly defined conformable derivatives[J]. Advances in Dynamical Systems and Applications, 2015, 10(2): 109-137.

[12] ZHOU Yong, AHMAD B, ALSAEDI A. Theory of fractional evolution equations[M]. Berlin: De Gruyter, 2022.

[13] WANG Haihua. Mild solution for (ρ,k,Ψ)-proportional Hilfer fractional Cauchy problem[J]. Advances in Continuous and Discrete Models, 2024, 2024(1): 17.

[14] MAINARDI F, PARADISI P, GORENFLO R. Probability distributions generated by fractional diffusion equations [EB/OL]. (2007-04-03) [2024-08-10]. https://arxiv. org/abs/0704. 0320.

[15] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations[M]. New York: Springer, 1983.

[16] JARAD F, ABDELJAWAD T. Generalized fractional derivatives and Laplace transform[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems - S, 2020, 13(3): 709-722.

[17] BAŞCI Y, MISIR A, ÖĞREKÇI S. Generalized derivatives and Laplace transform in (k,Ψ)-Hilfer form [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2023, 46(9): 10400-10420.

[18] WANG Haihua. Generalized fractional (ρ,k,φ)-proportional Hilfer derivatives and some properties [J]. Journal of Mathematics, 2024, 2024(1): 4864945.

[19] COSTA SOUSA J VDA, DE OLIVEIRA E C. A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of Ψ-Hilfer operator[J]. Differential Equations and Applications, 2019, 11(1): 87-106.

责任编辑：郭红建　张伟博