

# 基于共识性测度的多粒度概率语言广义 TODIM 方法

徐迎军\*

(曲阜师范大学 经济学院, 山东 日照 276826)

**摘要:** 针对准则值为多粒度概率语言决策信息、准则权重未知的多属性群决策问题, 在综合考虑概率语言评价信息的期望值、偏离度和犹豫度的基础上, 提出了新的多粒度概率语言距离测度公式, 有效克服了现有距离测度公式在某些情况下不能准确测度的问题。基于所提出的距离测度, 在综合考虑评价信息数量和质量的基础上, 提出了一种基于共识性测度的广义 TODIM 决策方法, 并将其应用于垃圾分类回收 APP 的选择中。与现有方法的对比结果表明, 所提出的多粒度概率语言环境下的距离测度具有良好的有效性, 同时验证了基于共识性测度的多粒度概率语言广义 TODIM 方法的可行性与优越性。

**关键词:** 多粒度概率语言术语集; 距离测度; 共识性测度; 广义 TODIM 方法

中图分类号: TP391.1; C934

文献标志码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Multi-granular probabilistic linguistic generalized TODIM method based on consensus measurement

XU Yingjun\*

(School of Economics, Qufu Normal University, Rizhao 276826, China)

**Abstract:** Based on the expectation value, deviation degree and hesitancy degree of the probabilistic linguistic judgment information, a new multi-granular probability linguistic distance measure was proposed to solve multi-attribute decision-making problems, where the attribute values were demonstrated in multi-granularity probabilistic linguistic information, and the attribute weights were unknown. The new distance measure could effectively overcome the difficulty that the existing distance measure cannot exactly measure the distance in some circumstances. Based on the new distance measure, a generalized TODIM method was proposed by comprehensively considering the quality and quantity of the judgement information and the consensus measurement and was applied in the selection of waste sorting and recycling APP. The comparison results with existing methods demonstrated that the proposed distance measure in the multi-granular probabilistic linguistic environment had good effectiveness, which also verified the feasibility and superiority of the consensus measure-based generalized TODIM method for multi-granular probabilistic linguistic information.

**Key words:** multi-granular probabilistic linguistic term sets; distance measure; consensus measurement; generalized TODIM method

### 0 引言

决策分析广泛应用于生产与生活的各个方面<sup>[1]</sup>。决策分析的第一步是根据合适的信息表达形式来选择合适的决策分析方法<sup>[2]</sup>。对某一方案关于某一属性的评估而言, 语言术语集是一个合

适的信息表达形式<sup>[3]</sup>。决策者可能在语言术语间表现出犹豫, RODEIGUEZ<sup>[4]</sup>把 TORRA 提出的犹豫模糊集思想<sup>[5]</sup>和 ZADEH<sup>[3]</sup>提出的语言变量思想相结合, 提出了犹豫模糊语言术语集。其中, 每个语言术语具有相同的概率或权重。决策者可能偏好几个不相邻的语言术语及其权重来表达其评

收稿日期: 2024-06-09; 修回日期: 2024-09-06; \* 通信联系人, E-mail: xuyingjun@qfnu.edu.cn

基金项目: 国家社会科学基金项目(18BJY153)

作者简介: 徐迎军(1974—), 男, 山东临沂人, 副教授, 博士, 主要从事决策理论与方法研究。

引用格式: 徐迎军. 基于共识性测度的多粒度概率语言广义 TODIM 方法[J]. 信阳师范大学学报(自然科学版), 2026, 39(1): 101-108.

XU Yingjun. Multi-granular probabilistic linguistic generalized TODIM method based on consensus measurement[J]. Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2026, 39(1): 101-108.

估值。为此,ZHANG等<sup>[6]</sup>提出了语言分布的概念;WU等<sup>[7]</sup>利用语言分布思想构建评估分布来表达决策者的偏好分布;PANG等<sup>[8]</sup>提出了概率语言术语集的概念,其特点是语言术语集的概率之和小于等于1。概率语言术语集更适合现实的决策情景,逐渐引起了学者们的广泛关注<sup>[9]</sup>。

多粒度概率语言术语集是评估者进行评估的语言集之一<sup>[10]</sup>。DU等<sup>[11]</sup>提出了基于前景理论的多粒度概率语言决策分析方法;LIU等<sup>[12]</sup>设计了多粒度概率语言环境下基于Choquet积分算子的群决策方法。本文采用多粒度概率语言术语集来表达决策者的评估值。

在群决策中,决策者权重的确定是一个复杂的问题<sup>[13]</sup>,本文在提出的多粒度概率语言评价信息之间距离的基础上,给出群体共识性测度公式,基于此公式,对决策者的初始权重进行修正。

在决策分析过程中,属性权重的确定是一个重要步骤<sup>[8,14-20]</sup>,本文基于提出的多粒度概率语言术语之间的距离,建立最优化模型来确定属性权重。

总之,本文的创新在于两个方面:(1)综合多粒度概率语言评价信息的均值、偏离度和犹豫度,提出多粒度概率语言术语间新的距离测度,在此基础上提出新的共识性测度;(2)提出基于新距离测度的广义TODIM(Interactive and Multi-Criteria Decision Making)方法,并在垃圾回收APP中应用,与现有方法进行比较分析,以验证所提出方法的可行性和有效性。

## 1 多粒度概率语言术语集距离

**定义1**<sup>[8]</sup> 令  $h_s^1(p) = \{s^{1(l)}(p_1^{(l)}) | l=1, 2, \dots, L_1\}$ ,  $h_s^2(p) = \{s^{2(l)}(p_2^{(l)}) | l=1, 2, \dots, L_2\}$  是两个规范的概率语言术语集(Probabilistic Linguistic Term Sets, PLTSs),且  $L_1 = L_2$ ,则  $h_s^1(p)$  和  $h_s^2(p)$  之间的距离定义为:

$$d_p(h_s^1(p), h_s^2(p)) = \sqrt{\sum_{l=1}^{L_1} (p_1^{(l)} r_1^{(l)} - p_2^{(l)} r_2^{(l)})^2 / L_1}, \quad (1)$$

式中:  $r_1^{(l)}$  和  $r_2^{(l)}$  分别是语言术语  $s^{1(l)}$  和  $s^{2(l)}$  的下标。

然而,当两个PLTSs中每个语言术语下标与其概率的乘积都相等时,式(1)定义的距离公式不能正确测量两个概率语言术语集之间的偏离程度。

**例1** 设  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_5\}$  为选定的语言术语集,  $L_1(p) = \{s_0(0.4), s_1(0.3), s_3(0.3)\}$  和  $L_2(p) = \{s_0(0.625), s_2(0.15), s_4(0.225)\}$  是专家给出的基于  $S$  的两个概率语言术语集。由式(1)可得  $d(L_1(p), L_2(p)) = 0$ 。显然这两个概率语言术语集是不同的,其距离不应为0。

**定义2**<sup>[21]</sup> 设  $L_1(p)$  和  $L_2(p)$  是基于  $S$  的两个规范的概率语言术语集,且  $L_1 = L_2$ ,则两个概率语言术语集之间的Hamming距离为:

$$d_L(L_1(p), L_2(p)) = \left( \sum_{l=1}^{L_1(p)} |p_1^{(l)} r_1^{(l)} - p_2^{(l)} r_2^{(l)}| \right) / L_1(p). \quad (2)$$

由式(2)计算可得例1中的两个概率语言术语集之间的距离为  $d(L_1(p), L_2(p)) = 0$ 。显然这两个概率语言术语集是不同的,其距离也不应该为0。

针对上述距离公式不能准确度量概率语言术语集之间偏差的问题,ZHANG等<sup>[22]</sup>提出了概率语言数据集之间的距离公式(式(3))。

**定义3**<sup>[22]</sup> 设  $L_1(p)$  和  $L_2(p)$  是基于  $S$  的两个概率语言术语集,则两个概率语言术语集之间的距离为:

$$d_Z(L_1(p), L_2(p)) = \sum_{k=1}^{L_1(p)} p(r_{1k}, r_{2k}) d(r_{1k}, r_{2k}), \quad (3)$$

式中:  $d(r_{1k}, r_{2k}) = (r_{1k} - r_{2k}) / T$ ,  $p(r_{1k}, r_{2k}) = p_{1k} p_{2k}$ ,  $T$  是语言术语集  $S$  中概率语言术语的个数。

当两个概率语言术语集由相同的概率语言术语组成但其概率不同时,由式(3)计算得到的概率语言数据集之间的距离总是0,这是不合理的。

**例2** 设  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_5\}$  为选定的语言术语集,  $L_1(p) = \{s_1(0.5), s_3(0.3), s_5(0.2)\}$  和  $L_2(p) = \{s_1(0.4), s_3(0.55), s_5(0.05)\}$  是专家给出的  $S$  上的两个概率语言术语集。用式(3)计算可得其距离为0,然而  $L_1(p)$  和  $L_2(p)$  包含相同的语言术语,但其概率各不相同,因此其距离为0是不合理的。

## 2 决策矩阵共识性测度

### 2.1 改进的多粒度概率语言术语集距离测度

上述公式在有些情形下不能准确度量概率语言术语集之间距离的原因在于,其仅考虑了概率语言术语集的期望值,未充分考虑概率语言术语集之间偏差度和犹豫度。

基于此思想,首先提出概率语言术语集之间

的相似度公式,在此基础上提出概率语言术语集之间的距离公式。

**定义 4** 设  $S$  为选定的语言术语集,  $L_1(p)$  和  $L_2(p)$  是  $S$  上的两个概率语言术语集, 则  $L_1(p)$  和  $L_2(p)$  之间的相似度定义如下:

$$S(L_1(p), L_2(p)) = [\alpha^2 r(s(L_i(p))) \times r(s(L_i(p))) + \beta^2 \sigma(L_1(p)) \sigma(L_2(p)) + \gamma^2 H(L_1(p)) H(L_2(p))] / \left[ \prod_{i=1}^2 (1 + \alpha^2 r(s(L_i(p)))^2 + \beta^2 \sigma(L_i(p))^2 + \gamma^2 H(L_i(p))^2) \right], \quad (4)$$

式中:  $s(L_1(p))$ ,  $\sigma(L_1(p))$ ,  $H(L_1(p))$  分别表示概率语言术语集的得分函数<sup>[8]</sup>、偏离度<sup>[8]</sup>和犹豫度测度<sup>[16]</sup>;  $r(s(L_i(p))) (i=1, 2)$  是  $s(L_i(p)) (i=1, 2)$  的下标;  $\alpha, \beta, \gamma$  为参数, 分别用来控制概率语言术语集的得分函数、偏离度和犹豫度的重要性, 满足  $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1, \alpha + \beta + \gamma = 1$ 。

由柯西不等式的性质可知, 式(4)定义的相似度公式取值在 0 和 1 之间<sup>[23]</sup>。

**定义 5** 设  $S$  为选定的语言术语集。  $L_1(p)$  和  $L_2(p)$  是  $S$  上的两个概率语言术语集, 其距离定义为:

$$d(L_1(p), L_2(p)) = 1 - S(L_1(p), L_2(p)). \quad (5)$$

与现有的距离公式相比, 本文提出的改进概率语言术语集之间的距离公式, 综合考虑了概率语言术语集的期望值及其偏离度和犹豫度信息, 能够更科学地刻画概率语言术语集之间的差异。对于现有距离公式在某些情形下计算结果失真的问题, 提出的距离公式也能较好克服。

对于例 1 中的语言术语集  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_5\}$ , 设  $L_1(p) = \{s_0(0.4), s_1(0.3), s_3(0.3)\}$  和  $L_2(p) = \{s_0(0.5), s_2(0.15), s_4(0.225)\}$  为专家给出的两个概率语言术语集, 利用式(2)和式(3)计算得,

$$d_L(L_1(p), L_2(p)) = 0, \\ d_Z(L_1(p), L_2(p)) = 0.$$

假设  $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$ , 利用式(4)计算得  $d(L_1(p), L_2(p)) = 0.1912$ , 可见本文提出的新距离公式能有效克服现有公式的缺陷。

对于  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_5\}$  上的概率语言术语集  $L_1(p) = \{s_1(0.35), s_3(0.25), s_5(0.4)\}$  和  $L_2(p) = \{s_1(0.4), s_3(0.1), s_5(0.5)\}$ 。利用式(3)可得  $d(L_1(p), L_2(p)) = 0$ , 而用式(5)计算可得

$d(L_1(p), L_2(p)) = 0.1094$ , 可见在某些情形下本文提出的新距离公式能更有效地区分不同的概率语言术语集所包含的信息差异。

## 2.2 决策矩阵共识性测度

共识性测度可用来测量多粒度概率语言术语集之间的一致性以及决策矩阵间的一致性, 根据提出的多粒度概率语言术语集间的距离测度分别定义如下。

**定义 6** 设  $L_1(p)$  和  $L_2(p)$  为基于语言术语集的任意多粒度概率语言术语集, 它们之间的共识性测度定义为:

$$C(L_1(p), L_2(p)) = S(L_1(p), L_2(p)). \quad (6)$$

**定义 7** 针对某个决策问题, 设确定了  $m$  个备选方案  $A_i (i=1, \dots, m)$ , 每个备选方案根据  $n$  个属性  $C_j (j=1, \dots, n)$  进行评估, 共有  $e$  个专家  $E_l (l=1, \dots, e)$  参与评估。

设  $D^l = [L_{ij}^l(p)]_{m \times n} (l=1, \dots, e)$  为  $e$  个专家给出的决策矩阵, 则第  $l$  个专家给出的第  $i$  方案关于第  $j$  个准则的共识性指标  $C_{ij}^l$  定义为:

$$C_{ij}^l = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^e C(L_{ij}^l(p), L_{ij}^k(p)). \quad (7)$$

**定义 8** 第  $l (l=1, \dots, e)$  个专家的群体共识性指标定义为:

$$C^l = \frac{1}{emn} \sum_{i=1}^e \sum_{k=1}^e \sum_{j=1}^m \sum_{j=1}^n C(L_{ij}^l(p), L_{ij}^k(p)). \quad (8)$$

**定义 9** 设  $D^l = [L_{ij}^l(p)]_{m \times n} (l=1, \dots, e)$  为  $e$  个专家给出的决策矩阵, 第  $i$  方案关于第  $j$  个准则的群体共识性指标  $C_{ij}^c$  定义为:

$$C_{ij}^c = \frac{1}{e} \sum_{l=1}^e C_{ij}^l. \quad (9)$$

**定义 10** 设  $D^l = [L_{ij}^l(p)]_{m \times n} (l=1, \dots, e)$  为  $e$  个专家给出的决策矩阵, 则  $e$  个专家之间的群体共识性指标定义为:

$$C^c = \frac{1}{emn} \sum_{i=1}^e \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij}^c. \quad (10)$$

设  $w = (w_1, w_2, \dots, w_e)$  为根据专家们的知识结构、资历等给出的  $e$  个专家的初始权重, 在求取各专家个体决策矩阵后, 可利用式(11)根据个体决策矩阵的共识性水平对专家们的权重进行修正:

$$w_k^r = \lambda w_k + (1 - \lambda) C^k / \sum_{i=1}^e C^i, \quad (11)$$

式中:  $\lambda$  为参数, 满足  $0 \leq \lambda \leq 1$ ;  $w^k (k=1, \dots, e)$  为

给专家预设的权重。

**定义 11** 设  $E_l(l=1, \dots, e)$  为  $e$  个评估专家, 其权重为  $\omega_l(l=1, \dots, e)$ , 满足  $0 \leq \omega_l \leq 1$ ,  $\sum_{l=1}^e \omega_l = 1$ 。由个体决策矩阵

$$D^l = [L_{ij}^l(p)]_{m \times n} (l=1, \dots, e),$$

得到群体决策矩阵为:

$$D^g = [L_{ij}^g(p)]_{m \times n},$$

$$L_{ij}^g(p) = \{L^x(p^x) \mid L^x \in S, p^x = \sum_{l=1}^e \omega_l q_l^x\}. \quad (12)$$

### 3 基于群体共识性测度的多粒度概率语言广义 TODIM 方法

#### 3.1 基于改进优势度的广义 TODIM 决策方法

在决策过程中, 专家具有有限理性<sup>[24]</sup>。在前景理论<sup>[25]</sup>基础上发展起来的 TODIM 方法, 以决策者的有限理性为决策基础, 充分考虑决策者在面对风险时对于收益和损失的不同态度对决策过程以及决策结果的影响, 受到了学者的广泛关注<sup>[26]</sup>。LLAMAZARES<sup>[27]</sup>研究发现传统的 TODIM 方法计算步骤复杂且有两个悖论, 提出了广义 TODIM 方法, 对原有步骤进行了简化, 并克服了两个悖论。基于所提出的新距离公式, 把广义 TODIM 方法拓展到多粒度概率语言环境, 具体步骤如下:

**步骤 1** 各专家利用多粒度概率语言术语集, 根据各个属性对所有方案进行评估, 得到个体决策矩阵  $D^l = [L_{ij}^l(p)]_{m \times n} (l=1, \dots, e)$ 。选择粒度最大的概率语言术语集作为基准概率语言术语集, 把基于其他粒度概率语言术语集的个体决策矩阵转化为基于基准概率语言术语集的个体决策矩阵, 仍记为  $D^l = [L_{ij}^l(p)]_{m \times n} (l=1, \dots, e)$ , 设共识性测度指标临界值为  $\alpha_0 = 0.90$ <sup>[20]</sup>, 求取各专家个体决策矩阵的共识性测度指标。

如果每个专家的个体决策矩阵均满足共识性测度要求, 就转入下一步。如果存在某一位专家的个体决策矩阵不满足共识性测度要求, 就提供建议, 让这位专家对个体决策矩阵进行修改, 直至所有个体决策矩阵都满足共识性测度为止, 然后才转入下一步。

**步骤 2** 基于群体决策矩阵, 分别算出在每个属性  $c_j (j=1, 2, \dots, n)$  下方案  $A_i$  相对于所有方案  $A_s$  的单优势度  $\Phi_j(A_i, A_s)$ , 从而进一步得到在属性  $c_j (j=1, 2, \dots, n)$  下所有方案的单优势度矩阵

$$[\Phi_j(A_i, A_s)]_{m \times m}:$$

$$\Phi_j(A_i, A_s) = \begin{cases} g_1(\omega_j) f_1(L_{ij}(p) - L_{sj}(p)), & L_{ij}(p) \geq L_{sj}(p); \\ -g_2(\omega_j) f_2(L_{ij}(p) - L_{sj}(p)), & L_{ij}(p) < L_{sj}(p), \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $L_{ij}(p)$  为群体决策矩阵中方案  $A_i$  在属性  $c_j$  下的评估值;  $g_1, g_2: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}^+$ ;  $f_1, f_2: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}^+$ , 且  $f_1(0) = f_2(0) = 0$ 。

**步骤 3** 利用式(14)计算方案  $A_i$  相对于所有方案  $A_s$  的优势度  $\Phi(A_i, A_s)$ , 得到方案  $A_i$  相对于所有方案  $A_s$  的优势度矩阵  $[\Phi(A_i, A_s)]_{m \times m}$ , 其中

$$\Phi(A_i, A_s) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(A_i, A_s). \quad (14)$$

**步骤 4** 利用式(15)计算每一个方案  $A_i (i=1, 2, \dots, m)$  的总优势度  $\Phi(A_i) (i=1, 2, \dots, m)$ , 并根据方案的总优势度, 按照从大到小的顺序对方案进行排序。

$$\Phi(A_i) = \sum_{s=1}^m \Phi(A_i, A_s). \quad (15)$$

广义 TODIM 简化了传统 TODIM 的应用步骤, 使其更加简洁, 且解决了传统 TODIM 的两个悖论。在下面的案例<sup>[27]</sup>中, 取  $f_1(x) = x^\alpha, f_2(x) = \lambda x^\beta$ , 其中  $\alpha = \beta = 0.88, \lambda = 2.25$ , 即:

$$\Phi_k(A_i, A_j) = \begin{cases} \omega_k (z_{ik} - z_{jk})^{0.88}, & z_{ik} \geq z_{jk}, \\ -2.25 \omega_k (z_{jk} - z_{ik})^{0.88}, & z_{ik} < z_{jk}. \end{cases} \quad (16)$$

#### 3.2 问题描述

考虑多粒度概率语言多属性群决策问题。针对某个具体问题, 经过专家初选, 设确定了  $m$  个备选方案  $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ , 每个备选方案根据  $n$  个属性  $C_j (j=1, 2, \dots, n)$  进行评估, 准则权重为  $\omega_j (j=1, 2, \dots, n)$ , 且满足

$$0 \leq \omega_j \leq 1, \sum_{j=1}^n \omega_j = 1,$$

共有  $e$  个专家  $E_l (l=1, 2, \dots, e)$  参与, 专家们的初始权重向量为  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ , 满足  $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$  和  $\omega_j \in [0, 1]$ 。每个专家根据某一粒度的概率语言术语集, 针对各个属性对所有备选方案进行评价, 得到个体决策矩阵  $D^l = [L_{ij}^l(p)]_{m \times n} (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n; l=1, \dots, e)$ , 其中  $L_{ij}^l(p)$  为专家  $l$  给出的备选方案  $i$  在属性  $j$  下的个体评估值。

### 3.3 决策具体步骤

**步骤 1** 识别决策者集合  $DM = \{E_1, \dots, E_l\}$ , 属性集合  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  和方案集合  $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ , 获取属性权重  $\omega_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 。

**步骤 2** 建立多粒度概率语言决策矩阵

$$D = [L_{ij}^l(\rho)]_{m \times n}$$

**步骤 3** 统一粒度, 利用规范化原则使评估信息中语言术语的个数相等<sup>[18]</sup>。

**步骤 4** 建立规范化的概率语言决策分析矩阵, 仍记为  $D = [L_{ij}^l(\rho)]_{m \times n}$ 。

**步骤 5** 基于定义 11 集结个体决策矩阵  $D^l = [L_{ij}^l(\rho)]_{m \times n} (l = 1, 2, \dots, e)$  为群体决策矩阵  $D^g = [L_{ij}^g(\rho)]_{m \times n}$ 。

**步骤 6** 专家组成员协商给出群体共识性测度和每个专家的共识性测度的下界值  $\epsilon_0$ 。根据式 (10) 计算出相应数值。若  $C^c \geq \epsilon_0$ , 则称决策问题满足群体共识性测度要求。

**步骤 7** 用式 (8) 计算每个专家的共识性测度。若所有个体决策矩阵都满足群体共识性测度要求, 则利用式 (11) 对专家的初始权重  $w$  进行修正, 然后转步骤 9; 否则, 识别不满足群体共识性测度要求的个体决策矩阵  $D^l (l = e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r})$ , 转到步骤 8。

**步骤 8** 与不满足群体共识性测度的专家进行交流, 给出信息修改建议。若专家愿意亲自调整, 则获取其修改后的决策矩阵, 转步骤 6。若专家不愿意亲自调整, 则利用下面的式 (17a) 和式 (17b) 对其权重进行修正。

$$w_l' = w_l \times C(D^l, D^g) / \sum_{j=1}^e C(D^j, D^g), \quad (17a)$$

$$w_l^r = w_l' / \sum_{j=1}^e w_j', \quad (17b)$$

式中:  $l = 1, 2, \dots, e$ 。

**步骤 9** 此时所有专家的个体决策矩阵都满足群体共识性测度要求。利用定义 11 中的方法对个体决策矩阵进行集结, 得到可接受群体决策矩阵  $D^c = [L_{ij}^c(\rho)]_{m \times n}$ 。

**步骤 10** 群决策中, 群体共识性水平越高, 则决策越令人信服, 从而更容易推进。根据此原理, 建立下面的最优化模型来获取属性权重。

$$\min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1, k \neq i}^m G(L_{ij}^c(\rho), L_{kj}^c(\rho)) w_j \quad (18)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \geq 0.$$

**步骤 11** 基于达到群体共识性要求的群体决策矩阵和准则权重, 利用 3.1 节中给出的基于改进优势度的广义 TODIM 决策方法对备选方案进行排序择优。

## 4 算例分析

根据手机应用商店中垃圾分类回收 APP 的下载量, 确定备选方案, 分别为小黄狗  $A_1$ 、爱回收  $A_2$ 、章鱼回收  $A_3$  和蚂上回收  $A_4$ 。小黄狗和章鱼回收设有线下垃圾回收箱, 居民可就近选择垃圾回收箱, 分类投放垃圾; 爱回收和蚂上回收需要线上预订, 回收人员提供上门垃圾回收服务。5 个属性为技术特征  $C_1$ 、界面设计  $C_2$ 、APP 安全性  $C_3$ 、回收价格及种类  $C_4$  和 APP 服务质量  $C_5$ 。专家们采用合适粒度的概率语言术语集对备选方案进行评价。计算机领域、设计领域和回收领域专家的权重为  $\{w_1 = 0.5, w_2 = 0.1, w_3 = 0.4\}$ 。在上述条件下, 对各个垃圾分类回收 APP 进行评估<sup>[28]</sup>。

### 4.1 算法的应用

**步骤 1** 专家  $E_1$  选择 5 粒度的概率语言术语集, 专家  $E_2$  选择 7 粒度的概率语言术语集, 专家  $E_3$  选择 9 粒度的概率语言术语集进行评估, 给出多粒度概率语言决策矩阵, 如表 1 所示。

**步骤 2** 选择 9 粒度的概率语言术语集为基本概率语言术语集。把专家  $E_1$  给出的基于 5 粒度概率语言术语集  $S^2$  的决策矩阵和专家  $E_2$  给出的基于 7 粒度概率语言术语集  $S^3$  的决策矩阵转换为基于 9 粒度概率语言术语集的决策矩阵<sup>[18]</sup>。

**步骤 3** 利用式 (12) 把专家的个体决策矩阵集结为群体决策矩阵。

**步骤 4** 专家组成员协商给出共识性测度的下界值  $\epsilon_0 = 0.9$ 。根据式 (10) 计算可得决策问题群体共识性测度指标值为  $C^c = 0.9449$ 。3 位专家的个体共识性指标分别为  $C^1 = 0.9393$ ,  $C^2 = 0.9569$ ,  $C^3 = 0.9384$ , 3 位专家的个体决策矩阵满足群体共识性测度要求。根据式 (11) 对各专家的初始权重进行修正, 得修正后的专家权重为  $w = \{0.4993, 0.1017, 0.3990\}$ 。

**步骤 5** 利用最优化模型 (18) 求取属性权重为:  $w = (0.3111, 0.1676, 0.2342, 0.1300, 0.1571)$ 。

**步骤 6** 利用 3.1 节中提出的多粒度概率语言

表 1 多粒度概率语言方案评价矩阵

Tab. 1 Evaluating matrix in multi-granularity probability linguistic

专家方案	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
E1A1	$\{s_3^5(0.1), s_4^5(0.9)\}$	$\{s_3^5(0.5), s_4^5(0.5)\}$	$\{s_3^5(0.6), s_5^5(0.4)\}$	$\{s_1^5(0.1), s_3^5(0.9)\}$	$\{s_4^5(1)\}$
E1A2	$\{s_4^5(1)\}$	$\{s_3^5(0.6), s_4^5(0.4)\}$	$\{s_3^5(0.5), s_4^5(0.5)\}$	$\{s_0^5(1)\}$	$\{s_3^5(0.5), s_4^5(0.5)\}$
E1A3	$\{s_3^5(0.5), s_4^5(0.5)\}$	$\{s_2^5(0.2), s_3^5(0.8)\}$	$\{s_4^5(1)\}$	$\{s_3^5(0.8), s_4^5(0.2)\}$	$\{s_3^5(1)\}$
E1A4	$\{s_3^5(0.6), s_4^5(0.4)\}$	$\{s_3^5(1)\}$	$\{s_3^5(0.2), s_4^5(0.8)\}$	$\{s_2^5(1)\}$	$\{s_2^5(0.5), s_3^5(0.5)\}$
E2A1	$\{s_5^7(0.4), s_6^7(0.6)\}$	$\{s_4^7(1)\}$	$\{s_2^7(0.5), s_6^7(0.5)\}$	$\{s_2^7(0.3), s_3^7(0.7)\}$	$\{s_5^7(0.6), s_6^7(0.4)\}$
E2A2	$\{s_3^7(0.8), s_6^7(0.2)\}$	$\{s_3^7(0.8), s_6^7(0.2)\}$	$\{s_7^7(1)\}$	$\{s_1^7(0.5), s_3^7(0.5)\}$	$\{s_5^7(0.3), s_6^7(0.7)\}$
E2A3	$\{s_3^7(0.6), s_6^7(0.4)\}$	$\{s_1^7(0.5), s_2^7(0.5)\}$	$\{s_3^7(0.7), s_6^7(0.3)\}$	$\{s_3^7(1)\}$	$\{s_3^7(0.5), s_6^7(0.5)\}$
E2A4	$\{s_4^7(0.5), s_6^7(0.5)\}$	$\{s_3^7(0.5), s_6^7(0.5)\}$	$\{s_6^7(1)\}$	$\{s_2^7(0.8), s_3^7(0.2)\}$	$\{s_1^7(0.5), s_2^7(0.5)\}$
E3A1	$\{s_7^9(0.5), s_8^9(0.5)\}$	$\{s_6^9(0.2), s_7^9(0.8)\}$	$\{s_8^9(1)\}$	$\{s_2^9(0.2), s_4^9(0.8)\}$	$\{s_7^9(0.3), s_8^9(0.7)\}$
E3A2	$\{s_6^9(0.6), s_7^9(0.4)\}$	$\{s_4^9(1)\}$	$\{s_6^9(0.7), s_8^9(0.3)\}$	$\{s_0^9(1)\}$	$\{s_7^9(0.8), s_8^9(0.2)\}$
E3A3	$\{s_4^9(1)\}$	$\{s_2^9(0.5), s_4^9(0.5)\}$	$\{s_2^9(0.4), s_8^9(0.6)\}$	$\{s_4^9(0.9), s_7^9(0.1)\}$	$\{s_4^9(0.4), s_7^9(0.6)\}$
E3A4	$\{s_7^9(0.8), s_8^9(0.2)\}$	$\{s_6^9(0.4), s_7^9(0.6)\}$	$\{s_2^9(0.4), s_8^9(0.6)\}$	$\{s_2^9(1)\}$	$\{s_2^9(0.3), s_4^9(0.7)\}$

环境下的广义 TODIM 方法来求取方案的综合优势度。首先利用式(13)求取方案之间在属性  $C_j$  下的相对优势度。

**步骤 7** 根据式(14), 计算 4 个方案之间的相对优势度。由式(15)求得方案的综合优势度为:

$$\Phi(A_1) = -0.0736, \Phi(A_2) = -0.0593,$$

$$\Phi(A_3) = -0.0333, \Phi(A_4) = 0.0055.$$

因此, APP 排名顺序为: 蚁上回收 > 章鱼回收 > 爱回收 > 小黄狗。

#### 4.2 对比分析

为验证所提出的基于共识性测度的多粒度概率语言决策方法的合理性和可行性, 把本文方法与张燕等<sup>[29]</sup>传统的 TODIM 方法、马艳芳等<sup>[28]</sup>基于前景理论的 TODIM 方法、FANG 等<sup>[30]</sup>基于前景理论的 TOPSIS 方法作比较。

本文方法的排序结果与马艳芳等<sup>[28]</sup>和 FANG 等方法<sup>[30]</sup>排序结果一致, 这 3 种方法与张燕等<sup>[29]</sup>的传统 TODIM 方法排序结果存在差异, 说明本文所提方法的结果是可靠的, 技术是可行有效的。本文所提方法的主要优点是同时考虑了多粒度概率语言评价术语集的均值、偏离度和犹豫度的新距

离测度。

#### 5 结束语

给出了综合考虑多粒度概率语言评价信息期望值、偏离度和犹豫度的新距离测度, 在此基础上定义了测量个体决策矩阵与群体决策矩阵之间一致性的共识性测度指标; 在改进优势度公式的广义 TODIM 方法基础上, 给出了基于群体一致性测度的多粒度概率语言多属性决策分析方法程序。

创新之处: (1) 提出了综合考虑多粒度概率语言评价信息期望值、偏离度和犹豫度的更合理的多粒度概率语言评价信息的距离公式; (2) 提出了新的更合理的群体共识性测度; (3) 提出了基于距离测度的多粒度概率语言环境下的广义 TODIM 多属性决策分析程序。

所提出的方法也适合于解决其他问题, 比如超市食品供应链选择等。另外, 人们的思维具有可变性, 下一步将把研究聚焦于多阶段或动态多粒度概率语言多属性决策问题, 研究相应的多粒度概率语言决策模型。

#### 参考文献:

- [1] 邹睿, 焦慧, 龙文. 求解函数优化和特征选择的改进金豺狼优化算法[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2024, 37(1): 113-119.  
ZOU Rui, JIAO Hui, LONG Wen. Improved golden jackal optimization algorithm for solving function optimization and feature selection[J]. Journal of Xinyang Normal University(Natural Science Edition), 2024, 37(1): 113-119.
- [2] ZHENG Jing, WANG Yingming, ZHANG Kai, et al. A dynamic emergency decision-making method based on group

- decision making with uncertainty information [J]. *International Journal of Disaster Risk Science*, 2020, 11 (5) : 667-679.
- [ 3 ] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I [J]. *Information Sciences*, 1975, 8(3): 199-249.
- [ 4 ] RODRIGUEZ R M, MARTINEZ L, HERRERA F. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(1): 109-119.
- [ 5 ] TORRA V. Hesitant fuzzy sets [J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2010, 25(6): 529-539.
- [ 6 ] ZHANG Guiqing, DONG Yucheng, XU Yinfeng. Consistency and consensus measures for linguistic preference relations based on distribution assessments [J]. *Information Fusion*, 2014, 17: 46-55.
- [ 7 ] WU Yuzhu, ZHANG Zhen, KOU Gang, et al. Distributed linguistic representations in decision making: Taxonomy, key elements and applications, and challenges in data science and explainable artificial intelligence [J]. *Information Fusion*, 2021, 65: 165-178.
- [ 8 ] PANG Qi, WANG Hai, XU Zeshui. Probabilistic linguistic term sets in multi-attribute group decision making [J]. *Information Sciences*, 2016, 369: 128-143.
- [ 9 ] 胡悦, 江登英, 李贺. 基于双向投影法的概率语言多属性群决策 [J]. *系统工程与电子技术*, 2020, 42(9): 2052-2059.  
HU Yue, JIANG Dengying, LI He. Probabilistic linguistic multi-attribute group decision-making based on bidirectional projection method [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2020, 42(9): 2052-2059.
- [10] HERRERA F, MARTINEZ L. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranular hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision-making [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2001, 31(2): 227-234.
- [11] DU Yinfeng, LIU Dun. An integrated method for multi-granular probabilistic linguistic multiple attribute decision-making with prospect theory [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2021, 159: 107500.
- [12] LIU Peide, WANG Xiyu, TENG Fei. Online teaching quality evaluation based on multi-granularity probabilistic linguistic term sets [J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2021, 40(5): 9915-9935.
- [13] 魏翠萍, 马京. 犹豫模糊语言群决策的共识性模型 [J]. *控制与决策*, 2018, 33(2): 275-281.  
WEI Cuiping, MA Jing. Consensus model for hesitant fuzzy linguistic group decision making [J]. *Control and Decision*, 2018, 33(2): 275-281.
- [14] TIAN Xiaoli, XU Zeshui, WANG Xinxin, et al. Decision models to find a promising start-up firm with qualiflex under probabilistic linguistic circumstance [J]. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 2019, 18 (4): 1379-1402.
- [15] CHEN Pengyu. Effects of the entropy weight on TOPSIS [J]. *Expert Systems with Applications*, 2021, 168: 114186.
- [16] 耿秀丽, 潘亚虹. 考虑用户体验的产品服务系统模块重要度判定方法 [J]. *计算机集成制造系统*, 2020, 26(5): 1295-1303.  
GENG Xiuli, PAN Yahong. Importance degree determination approach for product service system modules based on user experience [J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2020, 26(5): 1295-1303.
- [17] WANG Juxiang. A MAGDM algorithm with multi-granular probabilistic linguistic information [J]. *Symmetry*, 2019, 11(2): 127-146.
- [18] XU Zeshui. An interactive approach to multiple attribute group decision making with multigranular uncertain linguistic information [J]. *Group Decision and Negotiation*, 2009, 18(2): 119-145.
- [19] WANG Zengqiang, FUNG R Y K, LI Yanlai, et al. A group multi-granularity linguistic-based methodology for prioritizing engineering characteristics under uncertainties [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2016, 91: 178-187.
- [20] 李树国, 陈国伟, 陈禹. 基于共识性测度的概率语言多准则群决策方法研究 [J]. *数学的实践与认识*, 2022, 52(5): 132-142.  
LI Shuguo, CHEN Guowei, CHEN Yu. Research on probabilistic linguistic multi-criteria group decision making method based on consensus measure [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2022, 52(5): 132-142.
- [21] LIN Mingwei, XU Zeshui. Probabilistic linguistic distance measures and their applications in multi-criteria group decision making [M] // COLLAN M, KACPRZYK J. *Soft Computing Applications for Group Decision-Making and Consensus Modeling*. Cham: Springer, 2018, 357: 411-440.
- [22] ZHANG Yixin, XU Zeshui, WANG Hai, et al. Consistency-based risk assessment with probabilistic linguistic preference relation [J]. *Applied Soft Computing*, 2016, 49: 817-833.

- [23] 黎光明, 欧旭伦. 拉格朗日乘法与柯西不等式最佳样本量估计比较[J]. 统计与决策, 2020, 36(12): 29-33.  
LI Guangming, OU Xulun. Comparing of Lagrange multiplication and Cauchy-Schwarz inequality for optimal sample size estimation[J]. Statistics and Decision, 2020, 36(12): 29-33.
- [24] 林树, 俞乔. 有限理性、动物精神及市场崩溃: 对情绪波动与交易行为的实验研究[J]. 经济研究, 2010, 45(8): 115-127.  
LIN Shu, YU Qiao. Limited rationality, animal spirit and market crash: Experiments on emotional volatility and trading behavior[J]. Economic Research Journal, 2010, 45(8): 115-127.
- [25] 樊治平, 刘洋, 沈荣鉴. 基于前景理论的突发事件应急响应的风险决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(5): 977-984.  
FAN Zhiping, LIU Yang, SHEN Rongjian. Risk decision analysis method for emergency response based on prospect theory[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2012, 32(5): 977-984.
- [26] LIU Peide, SHEN Mengjiao, TENG Fei, et al. Double hierarchy hesitant fuzzy linguistic entropy-based TODIM approach using evidential theory[J]. Information Sciences, 2021, 547: 223-243.
- [27] LLAMAZARES B. An analysis of the generalized TODIM method[J]. European Journal of Operational Research, 2018, 269(3): 1041-1049.
- [28] 马艳芳, 赵媛媛, 冯翠英, 等. 多粒度概率语言 TODIM 方法在垃圾回收 APP 评价中的应用[J]. 系统科学与数学, 2021, 41(12): 3530-3547.  
MA Yanfang, ZHAO Yuanyuan, FENG Cuiying, et al. Applying multi-granularity probabilistic linguistic TODIM method for evaluating waste recycling APP [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2021, 41(12): 3530-3547.
- [29] 张燕, 杨威. 基于犹豫毕达哥拉斯模糊环境下的 TODIM 方法[J]. 模糊系统与数学, 2020, 34(2): 85-92.  
ZHANG Yan, YANG Wei. Hesitation pythagorean fuzzy TODIM approach[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2020, 34(2): 85-92.
- [30] FANG Hong, LI Jing, SONG Wenyan. Failure mode and effects analysis: An integrated approach based on rough set theory and prospect theory[J]. Soft Computing, 2020, 24(9): 6673-6685.

责任编辑: 郭红建 张伟博