文章编号：2617-6084 (2024) 02-0045-06

“复变函数论”中研究型教学模式的探索与实践

张红艳[1]，常俊丽[2*]，张 华[3]

（1. 沈阳药科大学 医疗器械学院，辽宁 沈阳 110016；2. 西南大学 物理科学与技术学院，重庆 400715；
3. 西南大学 心理学部，重庆 400715）

摘 要：近些年，以培养学生创新能力为导向的研究型教学模式受到了广泛关注。在高校，科研是重点，教学是基础，教学和科研的有效结合正是研究型教学的出发点。笔者基于复变函数论中的幂级数展开定理（Taylor 定理和 Laurent 定理），探索研究型教学的有效性，并在教学内容、教学方法和教学反馈方面进行了具体实践。结果表明：研究型教学有利于提升学生学习的主观能动性，尤其在培养学生的创新能力方面有明显的优势，是一种值得借鉴的教学模式。

关键词：创新能力；研究型教学；复变函数论；Taylor 定理；Laurent 定理

中图分类号：G642 **文献标志码**：A

1 “复变函数论”中研究型教学模式的提出

数学物理方法是物理学专业本科生必修的一门核心课程。高校一般在大二第二学期开设这门课程。这门课程基于高等数学，同时又高于高等数学。物理专业“四大力学”课程中电动力学和量子力学中涉及到本门课程的诸多数学知识。换言之，这门课程不但是物理专业学生的必修课程，而且与后续必修课程的学习直接相关。同时，数学物理方法也是诸多理工高校研究生入学考试的必考专业课程，其重要性不言而喻。因此，为了能够让学生吸收得更透彻，教育工作者选择什么样的教学模式更恰当尤为重要。“复变函数论”是这门课程的重要组成部分[1-3]。且“复变函数论”也是工科、医学、药学相关专业的重要数学工具。“复变函数论”中的幂级数定理是数学中的一种重要的函数表示方法，被广泛应用于各个领域，包括物理、工程、计算机科学、药物设计等。因此，在“复变函数论”中探索与实践新型的教学模式是一项非常有意义的工作。

相对于以单向知识传授为主的接受型教学，研究型教学是指教师以课程内容和学生知识积累为基础，引导学生创造性地自主发现问题、研究问题和解决问题，在讨论中积累知识、培养能力和训练思维的新型教学模式[4-7]。这一教学模式注重教师的主导作用和学生的主体地位，教师创设一种类似研究的情境，引导学生思考、分析问题，让学生在各自独立思考的基础上，通过小组分工、协作讨论等学习方式创造性地解决问题[8]。

投稿日期：2023-11-16
基金项目：国家自然科学基金面上项目（11874306）；西南大学博士启动基金（SWU119032）；西南大学校级教改项目资助（2019JY122）
作者简介：张红艳（1980-），女（满族），辽宁义县人，讲师，硕士，主要从事物理相关和创新方法教学和研究，**Tel.** 13478196906，**E-mail** 253856426@qq.com；***通信作者**：常俊丽（1980-），女（汉族），山西太谷人，讲师，博士，主要从事数学物理方法教学和光电材料的第一性原理模拟研究，**Tel.** 13527404820，**E-mail** jlchang66@126.com。

物理专业的教学活动，需要学生拥有质疑与批判精神，以及较强的独立思维与解决问题的能力，而研究型教学的特点正好能满足这些需求。针对物理专业的大学生，采用研究型教学，一方面不仅能激发学生的问题意识与创新意识[9]，还利于鼓励学生有依据地怀疑和批判，敢于向现有的科学理论提出挑战，从而培养其创新能力[10-11]。另一方面，在研究型教学模式下，教师在向学生传授相应知识的同时，也注重了其科学研究能力以及团队合作能力的培养。

综上，研究型教学是以培养学生创新能力为导向的一种教学模式，尤其对高校学生而言，这种教学模式对于培养和提升学生的探究能力有非常重要的意义。因此，“复变函数论”中研究型教学模式的探索与实践对物理专业学生加深相关知识的理解有积极的实际意义。同时，对于培养学生发现问题、分析问题、解决问题的能力有重要意义。

2 研究型教学模式的探索与实践——以幂级数定理为例

在“复变函数论”中，幂级数定理（即 Taylor 定理和 Laurent 定理）是一个极其重要的内容[12-14]。其既涉及到前面复变函数解析的知识，又涉及到后面利用留数计算实积分的应用[1-3]。可以说，学生关于幂级数定理的理解好坏直接关系到其对“复变函数论”这部分知识的掌握程度。正因此，本次研究基于幂级数定理展开研究型教学的模式和实践，以期学生能更深入理解和掌握这一重要内容。

2.1 Taylor 定理

Taylor 定理：函数 $f(z)$ 在以 a 为圆心的圆内解析，则对于圆内任意一点 z， $f(z)$ 可用幂级数展开为系数 d_n 与 $(z-a)$ 的 n 次幂相乘并逐项相加求和的形式，即 $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n$，且展式是唯一的。其中 d_n 等于 $f(z)$ 在点 a 的 n 阶导数除以 n 的阶乘。

学生了解 Taylor 定理描述内容之后，教师设问：Taylor 定理的结论是什么？学生很容易回答，教师自然抛出第二个问题：如何把解析函数 $f(z)$ 展为正幂项幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n$？或者说，一个解析函数和一个幂级数如何画等号？这个问题会引起学生的关注或是好奇，这在以前高等数学是没有的。教师启发，解析函数可以如何表示？这就涉及到前面学习的 Cauchy 积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \tag{1}$$

说明：当观察者沿积分路径绕行时，研究区域在其左手方，定义为积分路径的正向，反之称为积分路径的负向。

这时教师启发学生：第二个问题转化为，如何把复变积分展为 $\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$ 正幂项幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n$？此处“柳暗花明又一村”，用几何级数（类似高等数学中等比级数）可以实现。由此，确定了解析函数 $f(z)$ 展为正幂项幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n$ 的基本思路，然后根据 Taylor 定理的前提条件，完善具体证明过程。

接下来，这里证明 Taylor 定理的另一个结论：展式的唯一性。教师启发：正幂项幂级数的形式是唯一的，因此证明“展式的唯一性”，其实是要证明展式 $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n$ 中系数 d_n 的唯一性。从该公式中确定 Taylor 系数 d_n 的方法：方程两边同时求 n 阶导数，使得 d_n 作为常数项出现；方程两边同时在 a 点取值，可以确定 Taylor 系数 d_n。

至此，Taylor 定理证明完毕。

泰勒级数在药物设计中的应用也是很广泛的。药物设计是一门涉及多个领域的交叉学科，其中包括化学、生物学、计算机科学等。泰勒级数常被用来分析药物分子的结构和性质，以便评估它们对于人体的影响。例如，在新药研发中，泰勒级数可以用来模拟分子之间的相互作用。通过将分子表示为泰勒级数的形式，研究人员可以更好地了解分子之间的相互作用、预测药物的活性并优化药物的设计。

2.2　Laurent 定理

教师在介绍 Laurent 定理前，首先会介绍双边幂级数、正幂项幂级数和负幂项幂级数。此时，教师引导学生进一步思考，正幂项幂级数和负幂项幂级数的区别与联系？能否用统一的公式表示？学生正确回答上述问题后，会加深对双边幂级数这一概念的理解。这时，教师再来引入 Laurent 定理。

Laurent 定理：函数 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z-a|<R$ 内解析，则在此圆环域 $f(z)$ 可唯一表示成 c_n 与 $(z-a)^n$ 的乘积并且逐项对 n 从负无穷到正无穷求和，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$。其中，$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f\{\xi\}}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$ 称为 Laurent 系数[1-3]。

基于前面 Taylor 定理的证明过程，这里证明 Laurent 展式，学生自然会联想到前面提到的 Cauchy 积分公式。特别注意的是，这里前提条件变了：Taylor 定理中 a 点是解析点，而 Laurent 定理中 a 点不能确定是否是解析点。所以，这里涉及到的应该是如下的复连通区域的 Cauchy 积分公式，而不是之前提及的单连通区域 Cauchy 积分公式。

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{c_r'}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+\oint_{c_R'}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\right] \tag{2}$$

说明：对比两个柯西公式，学生会有疑问，为什么等式右边由一个积分变为两个积分？教师引导学生，从积分路径思考：①单连通区域，积分路径为圆周 c：$|z-a|=R$；②复连通区域（见图 1），积分路径为c_r'，c_R'。这时自然出现一个问题：如何处理为一个连续的边界呢？显然这就涉及到之前关于 Cauchy 积分定理在复连通区域的推广，具体处理方法为：用一组距离很近的平行线把复连通区域的内外边界连通，构成单连通区域。因此，方程（1）和方程（2）本质上是相同的，区别是积分路径由单围线变成复围线。另外，积分路径方向规定见方程（1）。

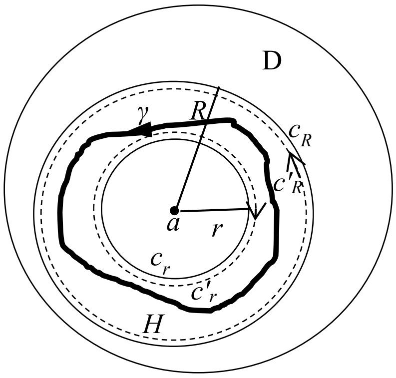

Fig. 1 Point a is the singular point in region D

图 1 区域 D 内 a 点为奇点

在学生理解复连通区域的 Cauchy 积分公式后，教师再讲解 Laurent 定理的证明。类似于 Taylor 定理的证明，还是利用几何级数把解析函数 $f(z)$ 展为双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$。最后，再来证明 Laurent 展式的唯一性，其实就是证明 Laurent 系数的唯一性。教师这里设问，能否按照 Taylor 系数的解题思路来确定 Laurent 系数。答案显然是不能。教师接着提问：为什么不能？答案如前所述：Taylor 定理中 a 点是解析点，而 Laurent 定理中 a 点不能确定是否是解析点，意味着 $f(z)$ 在 a 点可能没有定义（这里就隐含了 Taylor 定理和 Laurent 定理可能有内在的联系，详见后面比较部分 2.3）。因此，Laurent 系数为 c_n，而 Laurent 展式的唯一性则通过公式两端乘以因子 $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-a)^{m+1}}$，然后沿圆环：$r<|z-a|<R,\quad (r\ge 0, R\le\infty)$ 内任一闭合路径 γ 积分，加以证明。

至此，Laurent 定理证明完毕。

2.3 对比 Taylor 定理和 Laurent 定理

从上述“2.1”和“2.2”可以看出，Taylor 定理和 Laurent 定理的教学过程分为如下四个环节：①学生自行比较；②教师课堂提问；③再让学生补充；④最后教师作总结。这一过程中，重在培养

学生思考问题的条理性、层次性和全面性。另外，对比两者同时，一定强调其内在的联系：Laurent 定理中 a 点为解析点时，双边幂级数退化为单边幂级数，即 Laurent 定理即为 Taylor 定理。

这一对比环节涉及到教师与学生的多次互动，客观上增进了师生双方的熟悉程度。因此，教师了解到更多的反馈信息，这些信息利于下一次研究型教学活动的开展，主要表现在如下三个方面：首先，学生体验到教师对其创造性思维的肯定，对提升其创造力有积极作用；其次，学生在比较异同的过程中，逐步培养了研究思维，有利于其深入理解 Taylor 定理和 Laurent 定理；最后，不同类型学生的知识基础与思维特点有一定的差异，教学策略与步骤可以有针对性地再设计、再完善。

2.4　幂级数定理在物理学中的应用

幂级数定理是数学中的一种重要的函数表示方法，被广泛应用于各个领域，包括物理、工程、计算机科学、医药等。

幂级数可以用来近似表示各种复杂的函数，这在科学计算中具有重要意义。通过幂级数展开，可以将复杂的函数转化为简单的多项式形式，从而便于计算和分析。例如，在物理学中，通过 Taylor 展开可以将非线性方程近似为一个无穷级数，从而得到数值解或者进行数值模拟。

物理学中的许多现象可以通过幂级数来描述和解释。例如：速度随时间变化的函数可以使用 Taylor 级数展开来近似描述，从而得到运动的规律。又例如：在研究振动问题时，我们可以将物体的位移函数表示为一个 Laurent 级数，并只取前几项来近似描述它的振动行为。幂级数也常用于研究波动现象、量子力学、电磁学等领域，通过幂级数展开，可以研究波动的传播规律和场的叠加效应，进而预测物理现象的发展和结果。

在物理学中，幂级数定理在信号处理和通信工程中也有重要的应用。通过将信号和波形转化为幂级数的形式，可以分析信号的频谱和时域特性。这对于信号滤波、信号压缩、频谱解构和信号识别等方面具有重要意义。在电路分析和设计中，幂级数被广泛用于表达电路中的信号和波形。通过幂级数展开，可以得到电路中电压和电流的各阶导数，从而分析电路的响应和性能。此外，幂级数还可用于设计电路滤波器和振荡器，优化电路的波形和频率特性。

3　结论

研究型教学中，教师的引导作用非常关键，主要体现在两个环节：设问和启发。相对于传统教学，研究型教学对教师提出了更高的要求，但是实践效果非常明显：具体体现在学生学习主观能动性和创新能力的培养和提升。对理工科专业学生而言，研究型教学尤为重要，究其原因，主要有以下三点：①物理学科是一门应用型学科，偏重学生的动手能力；②优秀的理科生应具有良好的逻辑思维能力；③学生未来无论就业还是深造，影响其人生发展的一项重要因素就是创新能力。

本文重点讨论"复变函数论"课程中研究型教学模式的探索与实践。研究型教学主要是通过教师的适时引导，以激发学生学习的自主能动性；在教师引导学生发现问题、分析问题并解决问题的过程中，逐步培养学生的创新能力。鉴于此，研究型教学是一种出色的教学模式。

参考文献：

[1] 四川大学数学学院高等数学、微分方程教研室. 高等数学（第四册）（物理类专业适用）[M]. 第三版. 北京：高等教育出版社, 2010: 371−375.

[2] 梁昆淼, 刘法, 缪国庆. 数学物理方法[M]. 第 4 版. 北京：高等教育出版社, 2010: 273−308.

[3] 冉扬强. 数学物理方法[M]. 北京：科学出版社, 2012: 164−171.

[4] 苏丽, 兰海. 试论研究型教学模式：基于培养高级应用型人才的视角[J]. 黑龙江高教研究, 2008,26(12): 175−176.

[5] 袁成福, 李志红, 彭帆, 等. 研究型教学模式在《生物化学与分子生物学》课程中的探索与实践[J]. 教育教学论坛, 2016(18): 146−147.

[6] 邱环环, 汪剑津, 蒋丰兴. 研究型教学模式下《原子物理学》课程教学改革与实践[J]. 江西科技师范大学学报, 2019(6): 111−114.

[7] 王洪磊. 研究型教学对外语专业学生思辨能力的促进作用：以“语义学”课程为案例[J]. 中国大学教学, 2020(Z1): 46−53.

[8] 屈波, 程哲, 马忠. 基于自主性学习和研究性教学的本科教学模式的研究与实践[J]. 中国高教研究, 2011(4): 85−87.

[9] 边洁, 施宙. 略谈研究型教学的内涵与特征[J]. 成才之路, 2010(11): 24−25.

[10] 别敦荣. 大学课堂革命的主要任务、重点、难点和突破口[J]. 中国高教研究, 2019(6): 1−7.

[11] 谢和平. 以创新创业教育为引导全面深化教育教学改革：在 2016 年四川大学本科教学工作会上的讲话（摘要）[J]. 高等教育发展研究, 2017,34(1): 1−7.

[12] 王少辉, 王洪涛. 《高等数学》与《复变函数》之关系探讨[J]. 教育教学论坛, 2015(4): 63−64.

[13] 吴崇试. 关于数学物理方法课程的若干问答[J]. 大学物理, 2011,30(5): 1−6.

[14] 彭芳麟. “图解”数学物理方法的教学实践[J]. 物理, 2007,36(2): 153−158.

The exploration and practice of research-oriented teaching mode in the theory of complex functions

ZHANG Hongyan[1], CHANG Junli[2*], ZHANG Hua[3]

(1. *School of Medical Instrument*, *Shenyang Pharmaceutical University*, *Shenyang* 110016, *China*; 2. *School of Physical Science and Technology*, *Southwest University*, *Chongqing* 400715, *China*; 3. *Department of Psychology*, *Southwest University*, *Chongqing* 400715, *China*)

Abstract: In recent years, the research-oriented teaching mode guided by cultivating students' innovative abilities has received widespread attention. In universities, scientific research is the focus, and teaching is the foundation. The effective combination of them is the starting point of research- oriented teaching. This article explores the effectiveness of research- oriented teaching based on the power series expansion theorem (Taylor's theorem and Laurent's theorem) in the theory of complex functions. Moreover, specific practices are carried out in teaching content, teaching methods and teaching feedback. The results indicate that the research-oriented teaching is beneficial for enhancing students' subjective initiative in learning, especially in cultivating their innovative abilities, and the teaching model is worth learning.

Keywords: innovative abilities; research-oriented teaching; the theory of complex functions; Taylor's theorem; Laurent's theorem